# OBSERVAŢII ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE LA ECUAŢIA $y'' + g(x)y = 0$

DE

C. FOIAŞ, GH. GUSSI şi V. POENARU

(Bucureşti)

*Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj*

Ch. de la Vallée — Poussin [4] a obţinut o evaluare a distanţei minime între rădăcinile unei soluţii oarecare ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul $n$, cu coeficienţi variabili, omogenă. Alte rezultate în această direcţie au fost obţinute de O. Aramă şi D. Ripianu [1, 2]. În cazul particular al ecuaţiei de ordinul doi, în lucrarea [3] se arată cum această distanţă poate fi aproximată oricît de bine.

În nota de faţă ne propunem să arătăm cum se poate obţine distanţa dintre două rădăcini consecutive ale unei soluţii a ecuaţiei $y'' + g(x)y = 0$, dînd în acelaşi timp şi un criteriu de minorare a acestei distanţe, destul de tare în anumite condiţii.

Fie ecuaţia

$$y'' + g(x)y = 0, \tag{1}$$

unde $g(x) > 0$, este continuu derivabilă pentru $x \in [a, \infty)$. Deoarece două soluţii ale ecuaţiei noastre care au o rădăcină comună, au toate rădăcinile comune, va fi suficent să studiem o soluţie a ecuaţiei (1), care se anulează în punctul $x = a$; de exemplu soluţia satisfăcînd condiţiile :

$$y(a) = 0, y'(a) = 1.$$

Fie $b$, $b > a$, rădăcina consecutivă lui $a$ a soluţiei $y(x)$, $(d)$ o diviziune a intervalului $[a, b] : a = x_0^d < \ldots < x_n^d < x_{n+1}^d = b$ şi $g_d(x)$ funcţia definită astfel :

$$g_d(x) = \begin{cases} M_d^i & \text{pentru } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ M_d^n & \text{pentru } x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1} = b, \end{cases}$$

unde $M_d^i = \max\limits_{x_i \leqq x < x_{i+1}} g(x)$.

Ecuaţia $z'' + g_d(x)\, z = 0$ are o singură soluţie $z_d(x)$ care se anulează în punctul $x = a$ şi pentru care $z_d'(a) = 1$.

Cînd norma diviziunii $(d)$ tinde către zero, $g_d(x)$ tinde uniform către $g(x)$ și în consecință $z_d(x)$ tinde uniform către $y(x)$. În plus, soluția $z_d(x)$ se anulează, conform teoremei lui Sturm, într-un punct $c_d$ $(a < c_d \leqslant b)$, care tinde către $b$ atunci cînd norma lui $(d)$ tinde către zero. Calculînd soluția $z_d(x)$, punînd $0 = A_d^0$ și $1 = B_d^0$, obținem :

$$z_d(x)=\begin{cases} A_d^0 \cos\sqrt{M_d^0}\,(x-x_0^d)+\dfrac{B_d^0}{\sqrt{M_d^0}}\sin\sqrt{M_d^0}\,(x-x_0^d) \text{ pentru } x_0^d\leqslant x\leqslant x_1^d,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_d^i \cos\sqrt{M_d^i}\,(x-x_i^d)+\dfrac{B_d^i}{\sqrt{M_d^i}}\sin\sqrt{M_d^i}\,(x-x_i^d) \text{ pentru } x_i^d\leqslant x\leqslant x_{i+1}^d,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_d^n \cos\sqrt{M_d^n}\,(x-x_n^d)+\dfrac{B_d^n}{\sqrt{M_d^n}}\sin\sqrt{M_d^n}\,(x-x_n^d) \text{ pentru } x_n^d\leqslant x\leqslant x_{n+1}^d,\end{cases}$$

unde

$$A_d^{i+1}=A_d^i\cos\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d)+\frac{B_d^i}{\sqrt{M_d^i}}\sin\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d),$$

$$B_d^{i+1}=-\sqrt{M_d^i}\,A_d^i\sin\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d)+B_d^i\cos\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d).$$

Este clar că pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ putem lua :

$$z_d(x)=\sqrt{A_d^{i^2}+\frac{B_d^{i^2}}{M_d^i}}\sin\left[\sqrt{M_d^i}\,(x-x_i^d)+\varphi_d^i\right],\quad \operatorname{tg}\varphi_d^i=\frac{A_d^i\sqrt{M_d^i}}{B_d^i},$$

$$z_d'(x)=\sqrt{A_d^{i^2}+\frac{B_d^{i^2}}{M_d^i}}\sqrt{M_d^i}\cos\left[\sqrt{M_d^i}\,(x-x_i^d)+\varphi_d^i\right].$$

Scriind că în $x_{i+1}^d$ valorile lui $z_d(x)$ și $z_d'(x)$ sînt aceleași, fie că $x_{i+1}^d \in [x_i^d, x_{i+1}^d]$, fie că $x_{i+1}^d \in [x_{i+1}^d, x_{i+2}^d]$, obținem :

$$\frac{1}{\sqrt{M_d^{i+1}}}\operatorname{tg}\varphi_d^{i+1}=\frac{1}{\sqrt{M_d^i}}\operatorname{tg}\left[\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d)+\varphi_d^i\right].$$

Aplicînd teorema creșterilor finite, obținem :

$$\varphi_d^{i+1}-\varphi_d^i=\sqrt{M_d^i}\,(x_{i+1}^d-x_i^d)+$$

$$+\frac{\sqrt{M_d^{i+1}}-\sqrt{M_d^i}}{2\sqrt{M_d^i}}\cdot\frac{\sin 2\left[\sqrt{M_d^i}\;(x_{i+1}^d-x_i^d)+\varphi_d^i\right]}{1+\theta_i\dfrac{\sqrt{M_d^{i+1}}-\sqrt{M_d^i}}{\sqrt{M_d^i}}\left(2+\theta_i\dfrac{\sqrt{M_d^{i+1}}-\sqrt{M_d^i}}{\sqrt{M_d^i}}\sin^2[\;\;]\right)}$$

$0<\theta_i<1$, egalitatea pe care o vom folosi în cele ce urmează.



Se poate demostra că $\sqrt{(A_d^i)^2+\dfrac{(B_d^i)^2}{M_d^i}}$ nu se poate anula oricare ar fi $i$ și oricare ar fi divizinea $(d)$. Într-adevăr, notînd $M=\max\limits_{a\leqq x\leqq b} g(x)$, obținem :

$$(A_d^i)^2+\frac{(B_d^i)^2}{M_d^i}\geqslant\frac{(A_d^i)^2M+(B_d^i)^2}{M}\geqslant\begin{cases}\dfrac{(A_d^i)^2+(B_d^i)^2}{M} & \text{dacă } M\geqslant 1,\\ (A_d^i)^2+(B_d^i)^2 & \text{dacă } M\leqslant 1.\end{cases}$$

Ori $(A_d^i)^2+(B_d^i)^2\geqslant\frac{1}{2}\,(|A_d^i|+|B_d^i|)^2$ și deoarece $A_d^i=z_d(x_i^d)$, $B_d^i=z_d'(x_i^d)$, conform unei formule cunoscute avem

$$|A_d^i|+|B_d^i|\geqslant(|z_d(a)|+|z_d^i(a)|)\,f(M_d)>0$$

(expresia lui $f$ rezultă din aplicarea aproximațiilor succesive), unde $M_d = \max g_d(x) = M$, deci $|A_d^i|+|B_d^i|\geqslant f(M)>0$, deci $\sqrt{(A_d^i)^2+\dfrac{(B_d^i)^2}{M_d^i}}\geqslant\mu>0$ pentru orice $i$ și orice $(d)$.

În consecință, pentru ca soluția $z_d(x)$ să se anuleze trebuie ca $\sin[\sqrt{M_d^i}(x-x_i^d)+\varphi_d^i]$ să se anuleze, adică expresia din paranteză să ia una din valorile $0 - k\pi$, $k\pi$, deci $c_d$ este primul punct $> a$ în care această expresie ia una din valorile $0, -k\pi, k\pi$. Să luăm deci un șir de diviziuni $(d_p)$, de normă tinzînd către zero, cu convenția ca în locul indicelui $d_p$ să scriem doar $p$. Fie

$$\Phi_p(x)=\begin{cases}\varphi_p^i, & x_i^p\leqslant x\leqslant x_{i+1}^p,\\ \varphi_p^{n_p}, & x_{n_p}^p\leqslant x\leqslant x_{n_{p+1}}^p=b.\end{cases}$$

Putem extrage din șirul $\{\Phi_p(x)\}$ un subșir $\{\Phi_{p_k}(x)\}$ care să conveargă uniform pe $[a, b]$ către funcția continuă $\Phi(x)$. Într-adevăr, folosind derivabilitatea lui $g(x)$, cît și uniform-continuitatea obținem :

$$\varphi_p^{i+1}-\varphi_p^i=\sqrt{g(\xi_i^p)}\,(x_{i+1}^p-x_i^p)+\frac{g'(\zeta_i^p)}{4g(\xi_i^p)}\sin 2\varphi_p^i(\xi_{i+1}^p-\xi_i^p)+\varepsilon_p^i(\xi_{i+1}^p-\xi_p^p),$$

unde $\xi_p^i\in[x_i^n, x_{i+1}^p]$, $\zeta_i^p\in[\xi_i^p, \xi_{i+1}^p]$ și $\varepsilon_p^i$ tinde uniform către zero odată cu $\frac{1}{p}$.

De aici rezultă că

$$|\Phi_p(x')-\Phi_p(x'')|=\int_{x'}^{x''}\sqrt{g(t)}\,dt+\int_{x'}^{x''}\frac{g'(t)}{4g(t)}\,dt+\varepsilon_p\leqslant K|x'-x''|+\varepsilon_p,$$

unde $\varepsilon_p>0$ și $\varepsilon_p\to 0$ odată cu $\frac{1}{p}$; folosind procedeul diagonal și relația anterioară, decurge imediat veracitatea afirmaţiei noastre. Vom presupune acest şir chiar şirul iniţial. Deoarece $\varphi_p^i = 0$, pentru orice $p$ avem:

$$|\Phi_p(x) - \int_a^x \left[\sqrt{g} + \frac{g'}{4g} \sin 2\Phi(t)\right] dt| < \varepsilon_p',$$

unde $\varepsilon_p' \to 0$ odată cu $\frac{1}{p}$, deci

$$\Phi(x) = \int_a^x \left(\sqrt{g} + \frac{g'}{4g} \sin 2\Phi(t)\right) dt.$$

În punctul $b$, $\Phi(x)$ ia sau valoarea 0, sau $-\pi$, sau $\pi$, deoarece în punctul $c_d$, $\Phi(x)$ ia o valoare ce diferă de $0, -\pi, \pi$ printr-o mărime ce tinde către zero şi întrucît $c_d \to b$, iar $\Phi(x)$ este continuă, rezultă într-adevăr că $\Phi(b) = 0, -\pi$ sau $\pi$. Se poate arăta că primul punct în care $\Phi(x)$ ia una din aceste trei valori este chiar $b$.

Am obţinut următorul rezultat:

*Fie* $\Phi(x)$ *soluţia ecuaţiei* $\Phi'(x) = \sqrt{g} + \frac{g'}{4g} \sin 2\Phi$, $\Phi(a) = 0$. *Atunci dacă* $c$ *este primul punct* $c > a$ *în care* $\Phi(c) = 0, \pi, -\pi$, *avem* $c = b$.

Rezolvarea acestei ecuaţii nu este o problemă mai simplă decît rezolvarea ecuaţiei (1), însă putem obţine un criteriu de minorare a distanţei $b$-$a$.

Să presupunem că

$$\frac{|g'|}{4g} \leqslant \sqrt{g}. \tag{2}$$

În acest caz $\Phi(x)$ este crescătoare şi $\Phi(x) \leqslant \int_a^x \left(\sqrt{g} + \frac{|g'|}{4g}\right) dt = I(x)$.

Dacă $x_a$ este punctul în care $I(x_a) = \pi$, avem:

$$b - a > x_a - a;$$

condiţia $|g'| < 4\sqrt{g} \cdot g$ fiind echivalentă cu

$$\left|\frac{1}{\sqrt{g(x_1)}} - \frac{1}{\sqrt{g(x_2)}}\right| < 2|x_1 - x_2|, \tag{3}$$

am obţinut astfel următorul criteriu:

*Fie* $a$ *şi* $b$ *două rădăcini consecutive ale unei soluţii a ecuaţiei* (1), *unde* $g(x)$ *este pozitivă şi cu derivată continuă. În acest caz, dacă* $g(x)$ *satisface condiţiile* (2) *sau* (3), *avem*: $b - a > x_a - a$, *unde* $x_a$ *este punctul în care are loc egalitatea* $\pi = \int_a^{x_a} \left(\sqrt{g} + \frac{g'}{4g}\right) dt$.

*Dacă* $g(x)$ *este periodică, criteriul nostru dă o condiţie de stabilitate.*



## ПРИМЕЧАНИЯ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y'' + g(x)y = 0$


### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде показывается, как можно получить расстояние между двумя последовательными корнями одного нетождественно равного нулью решения уравнения (1), устанавливая одновременно и критерии уменьшения этого расстояния, сильный в некоторых условиях.

Предполагается, что функция $g(x)$ является положительной и непрерывно дифференцируемой на интервале $[a, \infty]$ и рассматривается нетождественно равный нулю интеграл $y(x)$ уравнения (1), который обращается в нуль в точке $x = a$. Обозначается через $b$, $b > a$ последовательный за $a$ корень рассматриваемого интеграла $y(x)$. Получается следующий результат:

*При вышеуказанном предположении пусть* $\Phi(x)$ *решение уравнения*

$$\Phi'(x) = \sqrt{g} + \frac{g'}{4g} \sin 2\Phi, \quad \Phi(a) = 0.$$

*Тогда, если* $c$ *является первой точкой* $c > a$ *в которой* $\Phi(c) = 0, -\pi, \pi$, *имеем* $c = b$.

Применяя этот результат получается следующий критерий уменьшения расстояния $b - a$:

*При тех же предположениях, если функция* $g(x)$ *удовлетворяет и условиям* (2) *или* (3), *то имеет место ограничение* $b - a > x_a - a$, *где* $x_a$ *есть точка, в которой имет место равенство*

$$\pi = \int_a^{x_a} \left(\sqrt{g} + \frac{g'}{4g}\right) dt.$$

Если $g(x)$ является периодической функцией, этот критерий выражает условие устойчивости.


## REMARQUES SUR LE PROBLÈME POLYLOCAL RELATIF À L'ÉQUATION $y'' + g(x)y = 0$


### RÉSUMÉ

On montre comment peut être obtenue la distance entre deux racines consécutives d'une solution non identiquement nulle de l'équation (1), et on établit en même temps un critère de minoration de cette distance, efficace dans certaines conditions.

On suppose que la fonction $g(x)$ est positive et à dérivée continue dans l'intervalle $[a, \infty)$, et on considère une intégrale non identiquement nulle

de l'équation (1), qui s'annule pour $x = a$. On désigne par $b$, $b > a$, la racine consécutive de $a$ de l'intégrale $y(x)$ considérée. On obtient le résultat suivant :

*Dans les hypothèses ci-dessus soit $\Phi(x)$ la solution de l'équation*

$$\Phi'(x) = \sqrt{g} + \frac{g'}{4g} \sin 2\Phi, \quad \Phi(a) = 0.$$

*Alors, si $c$ est le premier point $c > a$ où $\Phi(c) = 0, -\pi, \pi$, on a $c = b$.*

En utilisant ce résultat, on obtient le critère suivant de minoration de la distance $b - a$ :

*Dans les mêmes hypothèses, si la fonction $g(x)$ satisfait de plus à la condition (2) ou (3), alors on a la délimitation $b - a > x_a - a$, où $x_a$ est le point dans lequel a lieu l'égalité suivante :*

$$\pi = \int_a^{x_a} \left(\sqrt{g} + \frac{g'}{4g}\right) dt.$$

Si $g(x)$ est périodique, ce critère exprime une condition de stabilité.

## BIBLIOGRAFIE


1. O. Aramă, D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (I)*. Stud. şi cercet. de mat. (Cluj), **VIII**, 37–74 (1957).
2. O. Aramă, *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare*. Stud. şi cercet. de mat. (Cluj), **X**, 207–257 (1959).
3. C. Foiaş G., Gussi şi V. Poenaru, *Despre problema polilocală la ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea*. Bul. ştiinţ. – Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, *3*, 699–721 (1955).
4. Ch. J. de la Valleé Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*. Journ. de Math. poures et appl., (9), **8**, 125–144 (1929).


Primit la 11. XII. 1960.