ASUPRA INTEGRĂRII NUMERICE A ECUAŢIEI $u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$

DE

E. SCHECHTER

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj.

1. În lucrarea [2] am dat o metodă de integrare numerică a ecuaţiei :

$$u_{xy} = F(x, y, u, p, q), \tag{1}$$

cu condiţiile iniţiale date pe dreapta $y = -x$. În cele ce urmează vom generaliza rezultatele obţinute pentru cazul cînd curba iniţială are ecuaţia :

$$y = f(x), \quad a < x < b;$$

în care $f(x)$ este o funcţie strict monotonă (de exemplu descrescătoare) pe (a, b).

Construcţia metodei precum şi metoda de aproximaţie ,,pas cu pas'', se dau în §§ 2, 3. Paragraful 4 conţine o evaluare recurentă a erorilor comise precum şi demonstrarea convergenţei metodei-convergenţă de ordinul $O(h^3)$, iar § 5 chestiuni legate de aplicarea în practică a metodei propuse.

Vom nota în cele ce urmează inversa funcţiei $f(x)$, cu $\bar{f}(x)$ şi vom pune :

$$\Phi(x, y) = F(x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)).$$

2. Să considerăm deci ecuaţia (1) cu condiţiile iniţiale :

$$u(x, f(x)) = u_0(x), \quad p(x, f(x)) = p_0(x), \quad q(x, f(x)) = q_0(x); \tag{2}$$

şi să presupunem că această problemă are o soluţie unică pe domeniul ABC (figura 1). Să împărţim segmentul AB în n părţi egale prin punctele $P_{i,0}$; iar prin aceste puncte cît şi prin mijloacele segmentelor $P_{i,0}\, P_{i+1,0}$, să ducem paralele la BC. Aceste paralele determină pe arcul AC, $2n + 1$ puncte $P_{0,k}$, pe care le numerotăm de la A înspre C. Reţeaua de noduri $P_{i,k}$ se formează atunci prin intersecţia familiilor de verticale prin $P_{i,0}$ cu orizontalele prin $P_{0,2i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ şi prin intersecţia celorlalte verticale cu orizontalele prin $P_{0,2i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Coordonatele lui $P_{i,k}$ să le notăm cu $(x_{i,k}, y_{i,k})$. Constatăm că punctele cu acelaşi indice i se află pe curba $y = f_i(x)$, unde

$$f_i(x) = f(x - ih).$$

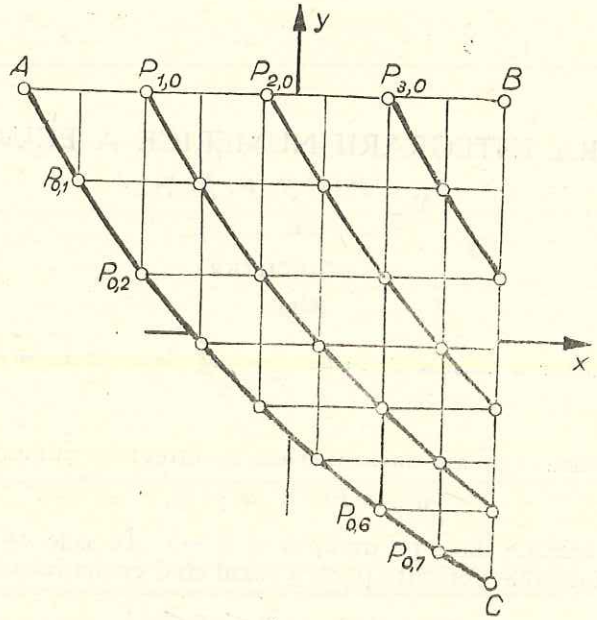

Fig. 1

Avem $x_{i,k+1} = x_{i,k} + \frac{h}{2}$; $x_{i,k-1} = x_{1,k} - \frac{h}{2}$. Ordonatele $y_{i,k}$ nu sînt în general echidistante şi de aceea notăm :

$$y_{i,k-1} - y_{i,k-1} = f(x_{0,k+1}) - f(x_{0,k+1}) = l_k$$
$$y_{i,k+1} - y_{i,k} \quad = f(x_{0,k-1}) - f(x_{0,k}) \quad = m_k;$$
$$y_{i,k} \quad - y_{i,k+1} = f(x_{0,k+1}) - f(x_{0,k+1}) = n_k.$$

Din condiţiile impuse lui $f(x)$ rezultă :

$$l_k = O(h); \quad m_k = O(h); \quad n_k = O(h).$$

Dacă în ecuaţia (1) facem schimbarea de funcţie :

$$\bar{u}(x, y) = u(x, y) - g^0(x, y), \tag{3}$$

unde

$$g^0(x, y) = u_0(x) + (y - f(x))q_0(x),$$

condiţiile (2) devin omogene, iar ecuaţia cu derivate parţiale îşi păstrează forma, întrucît

$$\bar{u}_{xy} = u_{xy} - g^0_{xy} = F(x, \bar{y}, u + g^0, \bar{p} + g^0_x, \bar{q} + g^0_y) - g^0_{xy}$$

sau

$$\bar{u}_{xy} = F_0(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q}).$$

Deoarece soluţia problemei noastre este unic determinată pe ABC, este indiferent dacă pe ,,triunghiul'' situat la dreapta curbei $y = f_i(x)$, ea se calculează cu ajutorul condiţiilor iniţiale sau cu valorile lui u de pe $f_i(x)$:

$$u(x, f_i(x)) = u_i(x); \quad p(x, f_i(x)) = p_i(x); \quad q(x, f_i(x)) = q_i(x). \tag{4}$$

Făcînd din nou o transformare de forma :

$$\bar{u}(x, y) = u(x, y) - g^i(x, y),$$

unde

$$g^i(x, y) = u_i(x, y) + (y - f_i(x))q_i(x),$$

ecuaţia (1) îşi păstrează forma, iar în loc de (4) vom avea condiţii iniţiale nule.

Fie acum triunghiul Δ (figura 2), în care arcul DF este situat pe curba $y = f_i(x)$. Punctul D are coordonatele $(d, f_i(d))$; F coordonatele $(e, f_i(e))$ iar E, — $(e, f_i(d))$. Integrînd ambii membrii ai ecuaţiei

$$\bar{u}_{xy} = F_i(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q}) \tag{5}$$

care se obţine după transformarea de mai sus, pe domeniul Δ, găsim :

$$u(e, f_i(d)) = \iint\limits_{\Delta} F_i(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})dx\,dy = \tag{6}$$
$$= g(e, f_i(d)) + \iint\limits_{\Delta} \Phi(x, y)dx\,dy + \iint\limits_{\Delta} q_i'(x)dx\,dy.$$

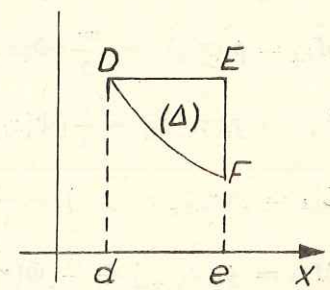

Fig. 2

Făcînd în (1) $x = e$ şi integrînd în raport cu y, obţinem :

$$p(e, f_i(d)) = p_i(e) + \int_{f_i(e)}^{f_i(d)} \Phi(e, y)dy \tag{7}$$

şi în mod analog

$$q(e, f_i(d)) = q_i(d) + \int_{d}^{e} \Phi(x, f_i(d))dx. \tag{8}$$

În cursul lucrării vom presupune că atît funcţia f cît şi F satisfac condiţiile de derivabilitate cerute.

3. Vom demonstra acum că avem următoarele formule :

$$u(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) = S_{i,k} + \frac{h m_k}{3}[\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, L_{i,k}, M_{i,k}, N_{i,k})] + \frac{h l_k}{12}[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}, L^1_{i,k}, M^1_{i,k}, N^1_{i,k})] + R, \tag{9}$$

$$p(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = P_i(x_{i,k+1}) + \frac{h}{6}\Big[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + 4F\Big(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, L^2_{i,k}, M^2_{i,k}, N^2_{i,k}\Big) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{c,k}, M^1_{i,k}, N^1_{i,k})\Big] + R_1, \tag{10}$$

$$q(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{6}[\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}) + 4F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, L_{i,k}, M_{i,i,k}, N_{i,k}) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{i,k}, M^1_{i,k}, N^1_{i,k})] + R_2, \tag{11}$$

unde

$$R < Ch^4; \quad R_1 < C_1 h^4; \quad R_2 < C_2 h^4,$$

iar

$$S_{i,k} = g^i(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \frac{l_k}{6}\left[5q_i(x_{i,k+1}) - 4Q^1_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) - q_i(x_{i,k-1})\right],$$

$$L_{i,k} = g^i(x_{i,k}, y_{i,k-1}) + \frac{m_k}{2}[q_i(x_{i,k}) - q_i(x_{i,k-1})] + \frac{m_k h}{4}\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}),$$

$$M_{i,k} = p_i(x_{i,k}) + \frac{m_k}{2}[\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, L_{i,k}, M'_{i,k}, N'_{i,k})],$$

$$N_{i,k} = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{4}[\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}) + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, L_{i,k}, M'_{i,k}, N'_{i,k})],$$

$$L^1_{i,k} = g^i(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \frac{l_k}{2}[q_i(x_{i,k+1}) - q_i(x_{i,k-1})] + \frac{l_k h}{2}\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}),$$

$$M^1_{i,k} = p_i(x_{i,k+1}) + \frac{l_k}{2}[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{i,k}, M^{11}_{i,k}, N^{11}_{i,k})],$$

$$N^1_{i,k} = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{2}[\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}) + (Fx_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{i,2}, M^{11}_{i,k}, N^{11}_{i,k})],$$

$$L^2_{i,k} = g^i\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + \frac{l_k}{8}[q_i(x_{i,k-1}) - q_i(x_{i,k-1})] + \frac{l_k}{8}h\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}),$$

$$M^2_{i,k} = p_i(x_{i,k+1}) + \frac{l_k}{8}[3\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{i,k}, M^{11}_{i,k}, N^{11}_{i,k})],$$

$$N^2_{i,k} = Q^1_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + (1-\theta_k)\frac{h}{4}\left[F\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, L^1_{i,k}, M^2_{i,k}, N^{22}_{i,k}\right) + F\left(x_{i,k} + \theta_k\frac{h}{2}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, U_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right), P_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right), Q_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right)\right],$$

$$M'_{i,k} = p_i(x_{i,k}) + m_k\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}); \quad N'_{i,k} = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{2}\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}),$$

$$M^{11}_{i,k} = p_i(x_{i,k+1}) + l_k\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}); \quad N^{11}_{i,k} = q_i(x_{i,k-1}) + h\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}),$$

$$N^{22}_{i,k} = Q_{i,k}\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + (1-\theta_k)\frac{h}{2}\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}).$$

$$\theta_k = \frac{(n_k - m_k)l_k}{4m_k n_k},$$

$U_{i,k}(y)$, $P_{i,k}(y)$, $Q_{i,k}(y)$ sînt polinoamele de interpolare de gradul 1 relativ la funcțiile $u_i(\bar{f}_i(y))$; $p_i(\bar{f}_i(y))$; $q_i(\bar{f}_i(y))$ pe nodurile $y_{i,k}$, $y_{i,k+1}$; iar $U^1_{i,k}(y)$ polinomul de interpolare al lui Lagrange de gradul al doilea relativ la a treia dintre funcțiile de mai sus, pe nodurile :

$$y_{i,k-1}, y_{i,k}, y_{i,k+1}.$$

Pentru demonstrație vom folosi relațiile (6), (7) și (8), în care $e = x_{i,k+1}$, $d = x_{i,k-1}$. Găsim :

$$u(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = g^i(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \int_{x_{i,k-1}}^{y_{i,k-1}} dx \int_{f_i(x)}^{y_{i,k-1}} \Phi(x, y)dy + \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k-1}} [q_i(x_{i,k+1}) - q_i(f_i(y))]dy, \tag{12}$$

$$p(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = p_i(x_{i,k+1}) + \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k-1}} \Phi(x_{i,k+1}, y)dy, \tag{13}$$

$$q(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = q_i(x_{i,k-1}) + \int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k+1}} \Phi(x, y_{i,k+1})dx. \tag{14}$$

Să ne ocupăm întîi de integrala dublă din (12). Ea este egală cu

$$\int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k+1}} \varphi(x)dx, \tag{15}$$

în care :

$$\varphi_i(x) = \int_{f_i(x)}^{y_{i,k-1}} \Phi(x, y)dy.$$

Dacă aplicăm integralei (15) formula lui Simpson, primim valoarea :

$$\frac{h}{6}\left[\varphi(x_{i,k+1}) + 4\varphi(x_{i,k}) + \varphi(x_{i,k-1})\right] + Ch^5 \tag{16}$$

în care $\varphi(x_{i,k-1}) = 0$, iar

$$\varphi(x_{i,k}) = \int_{y_{i,k}}^{y_{i,k-1}} \Phi(x_{i,k}, y)dy \quad \text{şi} \quad \varphi(x_{i,k+1}) = \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k-1}} \Phi(x_{i,k+1}, y)dy.$$

Cu ajutorul formulei trapezului, găsim pentru aceste două integrale

$$\varphi(x_{i,k}) = \frac{m_k}{2}\left[\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + \Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1})\right] + Cm_k^3$$

$$\varphi(x_{i,k+1}) = \frac{l_k}{2}\left[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})\right] + Cl_k^3.$$

Cealaltă integrală din (12) o vom calcula cu formula lui Simpson şi primim :

$$l_k\, q_i(x_{i,k+1}) - \frac{l_k}{6}\left[\, q_i(x_{i,k+1}) + 4q_i\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k} + \frac{l_k}{2}\right)\right) + q_i(x_{i,k-1})\,\right] + Ch^5. \tag{17}$$

Introducînd (16) şi (17) în (12), obţinem :

$$\begin{aligned} u(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) &= g^i\,(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \\ &+ \frac{l_k}{6}\left[\, 5q_i(x_{i,k+1}) - 4q_i\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right) - q_i(x_{i,k-1})\,\right] + \\ &+ \frac{hm_k}{3}\left[\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + \Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1})\right] + \\ &+ \frac{hl_k}{4}\left[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})\right] + R, \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$|\, R\,| < Ch^5.$$

Să considerăm acum formulele (13) şi (14). Dacă aplicăm şi acestora formula lui Simpson, ajungem la relaţiile

$$\begin{aligned} p(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) &= p_i\,(x_{i,k+1}) + \frac{l_k}{6}\left[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \right. \\ &\left. + 4\,\Phi\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})\right] + Cl_k^5, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} q(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) &= q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{6}\left[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \right. \\ &\left. + 4\,\Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1}) + \Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1})\right] + Ch^5. \end{aligned} \tag{20}$$

În formulele (18), (19), (20) nu cunoaştem valorile funcţiei pe punctele $(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}),\left(x_{i,k+1},\ y_{i,k-1} + \frac{l_k}{2}\right)$ şi $(x_{i,k}, y_{i,k-1})$. Pentru a păstra o precizie de ordinul lui h^4, este suficient să calculăm aceste valori cu o precizie de ordinul h^3. Cu aceeaşi exactitate vom calcula valoarea :

$$q_i\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k} + \frac{l_k}{2}\right)\right),$$

înlocuind-o prin

$$U^1_{i,k}\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right).$$

Să începem cu primul dintre aceste puncte. Vom calcula deci u, p şi q pe $(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})$ cu o eroare de ordinul $O(h^3)$.

Pentru u scriem din nou relaţia (12), şi găsim cu ajutorul formulei trapezului :

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)dx\, dy = \int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k+1}} \varphi(x)dx = \frac{h}{2}\,\varphi(x_{i,k+1}) + C\,h^3$$

$$(\varphi(x_{i,k-1}) = 0).$$

Din cauza coeficientului $\frac{h}{2}$, este suficient să calculăm valoarea $\varphi(x_{i,k+1})$ cu o precizie de ordinul lui h^2, prin formula dreptunghiului :

$$\varphi(x_{i,k+1}) = l_k\ \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + C\,l_k^2.$$

Cealaltă integrală se tratează la fel ca şi (17), numai că folosim de această dată formula trapezului :

$$\iint_\Delta q_i'(x)dx\, dy = \frac{l_k}{3}\left[q_i(x_{i,k+1}) - q_i(x_{i,k-1})\right].$$

Găsim deci în definitiv :

$$u(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = L^1_{i,k} + r, \quad \text{unde} \quad |r| < Ch^3. \tag{21}$$

Pentru calculul lui p şi q vom pleca de la (13), (14) şi de la formula trapezului :

$$p(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = p_i(x_{i,k}) + \frac{l_k}{2}\ \left[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})\right] + C\,l_k^3$$

$$q(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{2}\ \left[\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})\right] + Ch^3.$$

Din nou apare $\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})$, de astă dată însă eroarea cu care trebuie calculat p şi q este de ordinul lui h^2 (u este calculat deja). Obţinem din (13), (14) :

$$p(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = M^{11}_{i,k} + C\,l_k^2\,;\ q(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = N^{11}_{i,k} + Ch^2,$$

Cu ajutorul acestori valori, şi a condiţiei lui Lipschitz, primim :

$$p(x_{i,k+}, y_{i,k-1}) = M^1_{i,k} + r; \quad q(x_{i,k+1} y_{i,k-1}) = N^1_{i,k} + r \tag{22}$$
$$|r| < Ch^3.$$

Înlocuind (21), (22) în Φ căutat, găsim, în baza aceleiaşi condiţii Lipschitz :

$$\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) = F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, L^1_{i,k}, M^1_{i,k}, N^1_{i,k}) + r \quad (|r| < Ch^3).$$

Să trecem acum la calculul valorii aceleiaşi funcţii pe $\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)$. Pentru aceasta ne vom folosi tot de relaţiile (6), (7) şi (8), în care :

$$e = x_{i,k+1};\ d = \bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)$$

şi prin urmare :

$$u\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = g^i\left(x_{i\,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k+1} + l_k/2} \varphi(y)dy +$$
$$+ \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k+1} + l_k/2} [q_i(x_{i,k+1}) - q_i(\bar{f}_i(y))]\,dy, \tag{23}$$

$$p\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = p_i(x_{i,k+1}) + \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k+1} + l_k/2} \Phi(x_{i,k+1}, y)\,dy, \tag{24}$$

$$q\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = q_i\left(f_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right) +$$
$$+ \int_{\bar{f}_i(y_{i,k+1} + l_k/2)}^{i,k+1} \Phi\left(x, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) dx. \tag{25}$$

Să ne purtăm întîi atenţia asupra primei integrale din formula (23). Pentru calculul aproximativ al acestei integrale vom folosi formula de cuadratură :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}\,\frac{(x-x_2)^2}{2}\Big|_a^b + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}\,\frac{(x-x_1)^2}{2}\Big|_a^b +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f''(\zeta)\,dx, \tag{26}$$

care se obţine integrînd polinomul lui Lagrange, relativ la nodurile x_1, x_2, pe intervalul $[a, b]$.

Să luăm în cazul nostru :

$$a = y_{i,k+1};\ b = y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2};\ x_1 = a;\ x_2 = y_{i,k-1};$$

atunci integrala noastră este egală cu :

$$\frac{l_k}{8}[3\varphi(y_{i,k+1}) + \varphi(y_{i,k-1})] + r = \frac{l_k}{8}\int_{x_{i,k+1}}^{x_{i,k+1}} \Phi(x, y_{i,k+1})dx + r =$$
$$= \frac{l_k h}{8}\,\Phi\,(x_{i,k-1}), y_{i,k-1}) + r, \quad (r' < Ch^3).$$

Cealaltă integrală este egală cu :

$$\frac{l_k}{2} q_i(x_{i,k+1}) - \int_{y_{i,k+1}}^{y_{i,k+1} + l_k/2} q(f_i(y))\,dx =$$
$$= \frac{l_k}{8}[q_i(x_{i,k+1}) - q_i(x_{i,k-1})] + r \quad (|r| < Ch^3),$$

în baza aceleaşi formule (26).

Ţinînd seama de aceste două rezultate, deducem că

$$u\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = L^2_{i,k} + r; \quad |r| < Ch^3. \tag{27}$$

Aplicînd lui (24), formula (26), primim :

$$p\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = p_i(x_{i,k+1}) +$$
$$+ \frac{l_k}{2}[\Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \Phi(x_{i,k+1}, y_{i,k-1})] + r. \quad (|r| < Ch^3).$$

Valorile lui Φ sînt deja cunoscute, prin urmare :

$$p\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = M^2_{i,k} + r; \quad |r| < Ch^3. \tag{28}$$

Aplicînd formula trapezului relaţiei (25), primim :

$$q\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) = q_i\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[x_{i,k+1} - \bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\Phi\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right) + \Phi\left(\bar{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right), y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)\right] + r.$$

Dacă calculăm $\bar{f}_i\left(y_{i,k+1}+\frac{l_k}{2}\right)$ prin interpolare pe nodurile $y_{i,k+1}, y_{i,k}, y_{i,k-1}$ și dacă ținem seama de faptul că

$$q\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}+\frac{l_k}{2}\right) = N^{22}_{i,k} + r, \quad |r| < Ch^2,$$

găsim

$$q\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}+\frac{l_k}{2}\right) = N^2_{i,k} + r, \quad |r| < Ch^3, \tag{29}$$

din care rezultă

$$\Phi\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}+\frac{l_k}{2}\right) = F\left(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}+\frac{l_k}{2}, L^2_{i,k}, M^2_{i,k}, N^2_{i,k}\right) + r,$$

unde $|r| < Ch^3$.

Să considerăm acum punctul $(x_{i,k}, y_{i,k-1})$.

$$u(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = g^i(x_{i,k}, y_{i,k-1}) + \int_{y_{i,k}}^{y_{i,k-1}} [q_i(x_{i,k}) - q_i(\bar{f}_i(y))]\,dy + \int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k}} \varphi(x)\,dx$$

$$\int_{y_{i,k}}^{y_{i,k-1}} [q_i(x_{i,k}) - q_i(\bar{f}_i(y))]\,dy = \frac{m_k}{2}[q_i(x_{i,k}) - q_i(x_{i,k-1})] + Cm_k^3,$$

iar

$$\int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k}} \varphi(x)\,dx = \frac{hm_k}{4}\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + r; \qquad |r| < Ch^3,$$

deoarece $\varphi(x_{i,k-1}) = 0$. Deci:

$$u(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = g^i(x_{i,k}, y_{i,k-1}) + \frac{m_k}{2}[q_i(x_{i,k}) - q_i(x_{i,k-1})] + \frac{hm_k}{4}\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + r,$$

în care $|r| < Ch^3$.

Pe de altă parte:

$$p(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = p_i(x_{i,k}) + \int_{y_{i,k}}^{y_{i,k-1}} \Phi(x_{i,k}, y)\,dy = p_i(x_{i,k}) + \frac{m_k}{2}[\Phi(x_{i,k}, y_{i,k}) + \Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1})] + Cm_k^3,$$

$$q(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = q_i(x_{i,k-1}) + \int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k}} \Phi(x, y_{i,k-1})\,dx = q_i(x_{i,k-1}) + \frac{h}{4}[\Phi(x_{i,k-1}, y_{i,k-1}) + \Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1})] + Ch^3.$$

Deoarece

$$p(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = M'_{i,k} + Cm_k^2;\; q(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = N'_{i,k} + Ch^2,$$

rezultă în baza condiției lui Lipschitz

$$p(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = M_{i,k} + r;\; q(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = N_{i,k} + r \quad |r| < Ch^3.$$

Deci, conform aceleiași condiții

$$\Phi(x_{i,k}, y_{i,k-1}) = F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, L_{i,k}, M_{i,k} N_{i,k}) + r \quad (|r| < Ch^3).$$

Cu aceasta am demonstrat valabilitatea celor trei formule.

4. Dacă în formulele (9), (10) și (11) lăsăm la o parte termenii rest, primim niște formule aproximative pentru calculul succesiv al valorilor u, p, q de pe arcul $y = f_{i+1}(x)$ cu ajutorul valorilor găsite pe $f_i(x)$. Plecînd de la valorile cunoscute de pe curba inițială, putem găsi astfel valorile căutate pe întreaga rețea. Formulele găsite au însă dezavantajul de a folosi valorile *exacte* de pe arcul precedent, care nu se cunosc în practică. De aceea, în locul acestor formule trebuie scrise altele în care figurează valorile aproximative *cunoscute*: $u_{i,k}$, $p_{i,k}$, $q_{i,k}$ de pe punctul $P_{i,k}$.
Folosind notația:

$$\Phi_{i,k} = F(x_{i,k}, y_{i,k}, u_{i,k}, p_{i,k}, q_{i,k}),$$

putem scrie formulele:

$$u_{i+1,k-1} = s_{i,k} + \frac{hm_k}{3}[\Phi_{i,k} + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, l_{i,k}, m_{i,k}, n_{i,k})] + \frac{hl_k}{12}[\Phi_{i,k+1} + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^1_{i,k}, n^1_{i,k})], \tag{30}$$

$$p_{i+1,k-1} = p_{i,k+1} + \frac{h}{6}\Big[\Phi_{i,k+1} + 4F\Big(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, l^2_{i,k}, m^2_{i,k}, n^2_{i,k}\Big) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^1_{i,k}, n^1_{i,k})\Big], \tag{31}$$

$$q_{i+1,k-1} = q_{i,k-1} + \frac{h}{6}[\Phi_{i,k-1} + 4F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, l_{i,k}, m_{i,k}, n_{i,k}) + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^1_{i,k}, n^1_{i,k})]. \tag{32}$$

În aceste formule am pus :

$$s_{i,k} = G^i(x_{i,k+1}, y_{i,k+1}) + \frac{l_k}{6}[5q_{i,k+1} - 4Q^1_{i,k} - q_{i,k-1}],$$

$$l_{i,k} = G^i(x_{i,k}, y_{i,k-1}) + \frac{m_k}{2}[q_{i,k} - q_{i,k-1}] + \frac{hm_k}{4}\Phi_{i,k},$$

$$m_{i,k} = p_{i,k} + \frac{m_k}{2}[\Phi_{i,k} + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, l_{i,k}, m'_{i,k}, n'_{i,k})],$$

$$n_{i,k} = q_{i,k-1} + \frac{h}{4}[\Phi_{i,k-1} + F(x_{i,k}, y_{i,k-1}, l_{i,k}, m'_{i,k}, n'_{i,k})],$$

$$l^1_{i,k} = G^i(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}) + \frac{l_k}{2}[q_{i,k+1} - q_{i,k-1}] + \frac{hl_k}{2}\Phi_{i,k+1},$$

$$m^1_{i,k} = p_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}[\Phi_{i,k+1} + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^{11}_{i,k}, n^{11}_{i,k})],$$

$$n^1_{i,k} = q_{i,k+1} + \frac{h}{2}[\Phi_{i,k-1} + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^{11}_{i,k}, n^{11}_{i,k})],$$

$$l^2_{i,k} = G^i(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2} + \frac{l_k}{8}[q_{i,k+1} - q_{i,k-1}] + \frac{hl_k}{8}\Phi_{i,k-1},$$

$$m^2_{i,k} = p_{i,k+1} + \frac{l_k}{8}[3\Phi_{i,k+1} + F(x_{i,k+1}, y_{i,k-1}, l^1_{i,k}, m^{11}_{i,k}, n^{11}_{i,k})],$$

$$n^2_{i,k} = Q^1_{i,k} + (1-\theta_k)\frac{h}{4}[F(x_{i,k+1}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, l^1_{i,k}, m^1_{i,k}, n^1_{i,k}) +$$
$$+ F(x_{i,k} + \theta_k\frac{h}{2}, y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}, U_{i,k}, P_{i,k}, Q_{i,k})].$$

$$m'_{i,k} = p_{i,k} + m_k\Phi_{i,k};\ n'_{i,k} = q_{i,k-1} + \frac{h}{2}\Phi_{i,k-1}$$

$$m^{11}_{i,k} = p_{i,k+1} + l_k\Phi_{i,k+1};\ n^{11}_{i,k} = q_{i,k-1} + h\Phi_{i,k-1}$$

$$n^{22}_{i,k} = Q_{i,k} + (1-\theta_k)\frac{h}{2}\Phi_{i,k+1}.$$

Celelalte notaţii au următoarele semnificaţii :

$$G^i(x_{i,k}, y_{i,k} + v) = u_{i,k} + (y_{i,k} + v - f_i(x_{i,k}))\, q_{i,k},$$

iar

$$U_{i,k} = A_{i,k}u_{i,k} + B_{i,k}u_{i,k+1};\ P_{i,k} = A_{i,k}p_{i,k} + B_{i,k}p_{i,k+1},$$

$$Q_{i,k} = A_{i,k}q_{i,k} + B_{i,k}q_{i,k+1};\ Q^1_{i,k} = \frac{1}{2}A_{i,k}q_{i,k+1} + C_{i,k}q_{i,k} + D_{i,k}q_{i,k-1},$$

unde

$$A_{i,k} = \frac{n_k - m_k}{2n_k};\ B_{i,k} = \frac{l_k}{2n_k};\ C_{i,k} = \frac{l_k^2}{4m_k n_k};\ D_{i,k} = \frac{m_k - n_k}{4m_k}.$$

Să facem următoarea observaţie privitoare la formulele de mai sus : în cazul cînd se cunoaşte inversa $\overline{f}(x)$, vom scrie în locul valorilor polinoamelor de interpolare, valorile funcţilor respective pe $y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}$. Vom lua la fel, în loc de $x_{i,k} + \theta_k\frac{h}{2}$, $\overline{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)$ şi în loc de $(1-\theta_k)\frac{h}{2}$, $x_{i,k+1} - \overline{f}_i\left(y_{i,k+1} + \frac{l_k}{2}\right)$.

În continuare vom arăta că procedeul de integrare numerică dat de (30), (31) şi (32) este convergent, adică $u_{i,k}, p_{i,k}, q_{i,k}$ tind către valorile exacte ale funcţiilor respective pe $P_{i,k}$.

Vom nota pentru aceasta, ca şi în [2],

$$\varepsilon_{i,k} = |u_i(x_{i,k}) - u_{i,k}|;\ \rho_{i,k} = |p_i(x_{i,k}) - p_{i,k}|;\ \eta_{i,k} = |q_i(x_{i,k}) - q_{i,k}|$$

şi

$$\varepsilon_i = \max_k \varepsilon_{i,k};\qquad \delta_i = \max_k \delta_{i,k};\qquad \eta_i = \max_k \eta_{i,k}.$$

Avem nevoie şi de această dată de o evaluare recurentă a eroilor. Aceasta se poate face, ca şi în [2], făcînd diferenţa dintre (9) şi (30) ; (10) şi (31) respectiv (11) şi (32), luînd apoi valorile absolute ale diferenţelor şi majorîndu-le cu ajutorul condiţiei lui Lipschitz. Inegalităţile astfel obţinute leagă erorile de pe linia $i+1$ cu cele de pe linia i. Aceste inegalităţi însă sînt prea complicate pentru a fi utile în practică. Avînd în vedere că scopul nostru este demonstrarea convergenţei metodei, vom face următoarele majorări simplificatoare:

Notăm :

$$K = \max\{K_1, K_2, K_3\},$$

unde K_1 este constanta lui Lipschitz referitoare la funcţia F, K_2 aceeaşi constantă a funcţiei $f(x)$, iar K_3 a funcţiei inverse. Avem atunci :

$$l_k \leqq Kh \qquad m_k \leqq K\frac{h}{2} \qquad n_k \leqq K\frac{h}{2}$$

şi de asemenea :

$$\frac{|n_k - m_k|}{n_k} < 1;\quad \frac{|l_k - 2n_k|}{m_k} < 1;\quad \frac{l_k}{n_k} < 2K^2.$$

Cu ajutorul acestor inegalităţi obţinem, pe calea indicată mai sus, un sistem de trei inecuaţii, de forma :

$$X_{i+1} \leqq CX_i + D,$$

în care

$$X_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \rho_i \\ \eta_i \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 + h^2\alpha_1 & h^2\alpha_2 & h\alpha_3 \\ h\beta_1 & 1 + h\beta_2 & h\beta_3 \\ h\gamma_1 & h\gamma_2 & 1 + h\gamma_3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \end{pmatrix},$$

X_0 fiind o matrice coloană nulă, iar $\varphi = ch^4$. Valorile α_j, β_j, γ_j, $j = 1, 2, 3$, sînt mărimi de ordinul O (1), în raport cu h, iar c o constantă.

Considerînd aceleași norme ca și în [2], adică

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \,; \quad \|B\| = \max_i |b_i|,$$

unde A este o matrice patratică iar B o matrice coloană, în acest caz [1]:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|,$$

deci

$$\|X_{i+1}\| \leq \|C\| \, \|X_i\| + \|D\| = \|D\| \sum_{k=0}^{i} \|C\|^k = \|D\| \frac{\|C\|^{i+1} - 1}{\|C\| - 1}.$$

Trecînd la limită în ultimul termen în raport cu i, obținem tocmai rezultatul căutat, adică:

$$\varepsilon_i = O\,(h^3)\,; \ \delta_i = O\,(h^3)\,; \ \eta_i = O\,(h^3).$$

5. Așa cum am arătat în [2], rezultatele obținute se pot extinde și la sisteme de ecuații de forma (1). La fel schema de calcul dată acolo se menține fără modificări esențiale și în cazul general. Poate interveni însă alt fapt

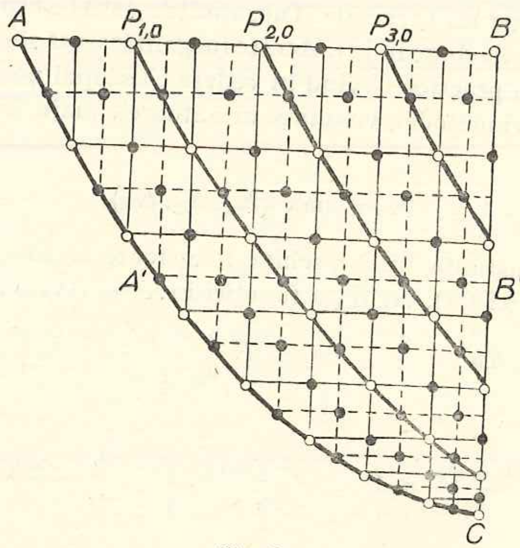

Fig. 3

important pentru calculele numerice, anume ca nodurile rețelei să nu fie distribuite uniform, pe domeniul nostru (figura 3). Teoretic, este posibil

să facem ca nodurile să fie oricît de apropiate unele de altele, prin micșorarea lui h. Aceasta însă duce la apariția prea multor noduri în unele regiuni ale domeniului; în cazul figurii, în $A'B'C$. Pentru a avea o distribuție relativ uniformă vom completa rețeaua în $AA'B'B$ cu niște drepte întrerupte. Verticalele se duc între vechile verticale la distanța $h/4$, iar orizontalele prin punctele determinate de acestea pe $f(x)$ (în regiunea cu noduri rare). Noul sistem de noduri se situează pe curbele

$$f_{\frac{i}{2}}(x) = f\left(x - i\frac{h}{2}\right); \quad i = 0, 1, \ldots, 2n - 1.$$

Calculul pe noile noduri se face la fel ca și pentru celelalte, folosind însă mărimile calculate deja pe acestea din urmă.

Observăm, în fine, că folosind formule de cuadratură mai precise putem obține formule de integrare numerică de un ordin de convergență mai înalt; la fel, că în formulele date pasul h poate fi luat variabil (adică în (30), (31), (32) se poate pune $h = h_i$, ceea ce poate fi folositor la uniformizarea rețelei.

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ $u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде [1] мы изложили метод численного интегрирования уравнения (1) в том случае, когда начальные условия задавались на второй биссектрисе координатных осей. Известно, что задачи типа Коши с начальными данными на некоторой монотонной кривой можно свести к предыдущей задаче путем преобразования. Но в практике такое преобразование является, вообще очень сложным.

Метод, изложенный в настоящей статье дает возможность непосредственно произвести численное интегрирование уравнения (1) при начальном условии (2) при помощи явных формул (30), (31) и (32), аналогичных формулам из [1].

Сходимость метода такая же как и в упомянутом труде.

SUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION $u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$

RÉSUMÉ

Dans le travail [1] nous avons donné une méthode d'intégration numérique de l'équation (1) aux conditions initiales données sur la deuxième bissectrice des axes des coordonnées. On sait que, moyennant une trans-

formation, les problèmes de type Cauchy aux données initiales sur une courbe monotone quelconque peuvent être réduits au problème précédent. Dans la pratique, cette transformation est néanmoins trop compliquée.

La méthode que nous donnons dans cet article permet de procéder directement à l'intégration numérique de l'équation (1) à la condition initiale (2), à l'aide des formules explicites (3), (31) et (32), analogues à celles de [1]. La convergence de la méthode est la même que celle donnée dans le travail mentionné.

BIBLIOGRAFIE

1. Березин И. С. и Жидков Н. П., *Методы вычислений*, том. II, стр. 50, Москва, 1959.

2. Schechter E., *O metodă de integrare numerică a ecuației* $u_{yy} = F(x, y, u, p, q)$. Studii și cercetări de matematică (Cluj), XII, *1*, 155 – 169 (1961).

Primit la 1. X. 1960.