PROPRIETĂŢI PRIVIND MONOTONIA ŞIRULUI POLINOAMELOR DE INTERPOLARE ALE LUI S. N. BERNSTEIN ŞI APLICAREA LOR LA STUDIUL APROXIMĂRII FUNCŢIILOR

DE

O. ARAMĂ

În această comunicare se studiază aproximaţia dată de polinomul $B_n(x\,;f)$ al lui S. N. Bernstein, în cazul cînd funcţia $f(x)$, care se aproximează, are diferenţele divizate de ordinul doi mărginite în intervalul $[0,1]$. Se arată că prin impunerea unei astfel de condiţii funcţiei $f(x)$, are loc egalitatea

$$f(x) - B_n(x\,;f) = -\frac{x(1-x)}{n}\cdot[\xi_1, \xi_2, \xi_3\,; f]$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3, sînt valori din intervalul $[0,1]$.

Se demonstrează în prealabil proprietatea că dacă o funcţie $f(x)$, definită în intervalul $[0,1]$, satisface în acest interval o condiţie de convexitate de ordinul 1, atunci şirul corespunzător al polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein este monoton în $[0,1]$. Se stabileşte apoi o proprietate asemănătoare pentru şirul derivatelor polinoamelor lui S. N. Bernstein. In ultimul paragraf al acestei lucrări se consideră o aplicaţie a teoriei precedente la rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale. Anume se consideră o modificare a metodei aproximaţiilor succesive a lui E. Picard, modificare care constă în a aplica integralelor ce intervin succesiv în definirea aproximaţiilor, formule de cuadratură de forma

$$\int_a^b \varphi(s)ds \approx \int_a^b B_n(s\,;\varphi)ds$$

unde $B_n(x\,;\varphi)$ reprezintă polinomul de interpolare de gradul n al lui S. N. Bernstein, corespunzător intervalului (a, b) şi funcţiei $\varphi(x)$:

$$B_n(x\,;\varphi)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\varphi(a_i)(x-a)^i(b-x)^{n-i}\,;\quad a_i=a+\frac{i(b-a)}{n}.$$

Se studiază apoi convergenţa metodei astfel obţinute.

I.

PROPRIETĂŢI PRIVIND MONOTONIA ŞIRULUI POLINOAMELOR DE INTERPOLARE ALE LUI S. N. BERNSTEIN

§ 1. În acest paragraf vom stabili

TEOREMA 1 : a). *Dacă funcţia $f(x)$ definită în intervalul* $[0,1]$ *este în acest interval respectiv convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă, concavă de ordinul* 1 *(adică orice diferenţă divizată de ordinul doi a ei este în intervalul* $[0,1]$ *respectiv* >0, $\geqq 0$, $=0$, $\leqq 0$, <0), *atunci şirul polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein, corespunzător acestei funcţii şi intervalului* $[0,1]$,

$$B_1(x\,;f)\ ,\ B_2(x\,;f),\ldots,\ B_n(x\,;f),\ldots \tag{1.1}$$

este respectiv descrescător, necrescător, staţionar, nedescrescător, crescător.

b). *Oricare ar fi funcţia $f(x)$, definită în intervalul* $[0,1]$ *şi continuă în acest interval, indiferent dacă verifică sau nu vreo proprietate de convexitate, pentru ea au loc egalităţile:*

$$B_{n+1}(x\,;f)-B_n(x\,;f)=-\frac{x(1-x)}{n(n+1)}\cdot[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\ f] \tag{1.2}$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3, sînt valori din intervalul $[0,1]$.

În *demonstraţia* acestei teoreme ne-am folosit de următoarea indicaţie dată în acest scop de prof. T. Popoviciu :

Scriind

$$B_n=\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right)x^i(1-x)^{n-i}\right][x+(1-x)]$$

$$B_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i f\left(\frac{i}{n+1}\right)x^i(1-x)^{n-i+1}$$

şi efectuînd diferenţa se obţine :

$$B_{n+1}-B_n=\sum_{i=1}^{n}\left[C_{n+1}^i f\left(\frac{i}{n+1}\right)-C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right)-C_n^{i-1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]x^i(1-x)^{n-i+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i(1-x)^{n-i+1}. \tag{1.3}$$

Coeficientul λ_i se poate scrie

$$\lambda_i=-C_n^i\left[\frac{i}{n-i+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)-\frac{n+1}{n-i+1}f\left(\frac{i}{n+1}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)\right]=$$
$$=-\frac{i}{n^2(n+1)}C_n^i\left[\frac{n^2(n+1)}{n-i+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)-\frac{n^2(n+1)^2}{i(n-i+1)}f\left(\frac{i}{n+1}\right)+\frac{n^2(n+1)}{i}f\left(\frac{i}{n}\right)\right].$$

Expresia din ultima paranteză dreaptă reprezintă diferenţa divizată de ordinul 2 a funcţiei $f(x)$ pe nodurile

$$x_{i,1}=\frac{i-1}{n},\quad x_{i,2}=\frac{i}{n+1},\quad x_{i,3}=\frac{i}{n}.$$

Se poate deci scrie

$$\lambda_i=-\frac{i}{n^2(n+1)}\cdot C_n^i[x_{i,1},\ x_{i,2},\ x_{i,3};\ f]=-\frac{1}{n(n+1)}C_{n-1}^{i-1}[x_{i,1},\ x_{i,2},\ x_{i,3};\ f]. \tag{1.4}$$

Introducînd aceste valori în expresia dezvoltată a diferenţei $B_{n+1}-B_n$ şi ţinînd seama de proprietatea respectivă de convexitate a funcţiei $f(x)$, se ajunge la prima afirmaţie a teoremei.

A doua afirmaţie a teoremei rezultă precum urmează.

Să fixăm pentru moment variabila x în intervalul $[0,1]$ şi să considerăm funcţionala

$$F_n\{f\}=B_{n+1}(x\,;f)-B_n(x\,;f). \tag{1.5}$$

Se observă că ea se anulează dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 1 şi că ia valori negative pentru orice funcţie convexă de ordinul 1 în $[0,1]$, (conform primei afirmaţii a teoremei 1). Atunci, dintr-un rezultat stabilit de prof. T. Popoviciu în [9], rezultă că această funcţională are o *formă clasică*, adică forma

$$F_n\{f\}=K_n(x)\,.\,[\xi_1,\xi_2,\ \xi_3\,;\ f] \tag{1.6}$$

unde coeficientul $K_n(x)$ nu depinde de funcţia $f(x)$, iar ξ_1, ξ_2, ξ_3 sînt valori din intervalul $[0,1]$, care depind în general de $f(x)$. Valoarea coeficientului $K_n(x)$ se determină îndată, particularizînd convenabil în (1.5) şi (1.6) funcţia $f(x)$. Astfel, dacă se ia $f(x)=x^2$, se obţine

$$K_n(x)=F_n\{x^2\}=B_{n+1}(x\,;x^2)-B_n(x\,;x^2)=-\frac{x(1-x)}{n(n+1)}, \tag{1.7}$$

egalitate ce rezultă îndată, dacă se ţine seama de identitatea

$$\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^m u^m v^{n-m}=nu(nu+v)(u+v)^{n-2}$$

în care se ia $u=x$, $v=1-x$.

Înlocuind expresia lui $K_n(x)$ din (1.7) în (1.6), se ajunge la a doua afirmaţie a teoremei 1.

$B_n(x;x^3)=\frac{(n-2)(n-1)x^3+3(n-1)x^2+x}{n^2}$

Observare. Concluziile teoremei de mai sus rămîn valabile dacă în locul intervalului $[0,1]$ se consideră un interval oarecare $[a, b]$, cu condiția de a raporta polinoamele de interpolare ale lui S. N. Bernstein, relativ la intervalul $[a, b]$. În acest caz obținem egalitatea

$$B_{n+1}(x;f)-B_n(x;f)=-\frac{(x-a)(b-x)}{n(n+1)}\cdot[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] \tag{1.8}$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3, sînt valori din intervalul $[a, b]$.

§ 2. A doua teoremă pe care o stabilim se referă la șirul derivatelor de ordinul întîi ale polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein, corespunzătoare unei funcții $f(x)$ și unui interval dat.

TEOREMA 2: *Dacă funcția $f(x)$ definită în intervalul $[0, 1]$ este în acest interval respectiv convexă, neconcavă, neconvexă, concavă de ordinul 1 și 2 (adică orice diferență divizată de ordinul 2 și orice diferență divizată de ordinul 3 a acesteia este respectiv >0, $\geqq 0$, $\leqq 0$, <0), și dacă diferențele divizate de ordinul 2 sînt mărginite în intervalul $[0,1]$, iar $\delta_2=\lim|[x_1, x_2, x_3; f]|\neq 0$, atunci șirul derivatelor polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein, corespunzătoare funcției $f(x)$ și intervalului $[0, 1]$, adică șirul*

$$\frac{d}{dx}B_1(x;f),\ \frac{d}{dx}B_2(x;f),\ldots,\ \frac{d}{dx}B_n(x;f),\ldots$$

începînd de la un rang $N(\varepsilon)$), este respectiv descrescător, necrescător, nedescrescător, crescător în intervalul $\left[0, \frac{1}{5}-\varepsilon\right]$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar.*

Demonstrație. Derivînd membru cu membru identitatea (1.3), obținem

$$\frac{d}{dx}\{B_{n+1}-B_n\}=\sum_{i=1}^{n-1}[(i+1)\lambda_{i+1}-(n-i+1)\lambda_i]x^i(1-x)^{n-i}+\lambda_1(1-x)^n-\lambda_n x^n. \tag{2.1}$$

Să considerăm suma

$$S(x)=\sum_{i=1}^{n-1}[(i+1)\lambda_{i+1}-(n-i+1)\lambda_i]x^i(1-x)^{n-i} \tag{2.2}$$

care intervine în (2.1). Înlocuind λ_i cu expresiile lor stabilite anterior în (1.4), se obține

$$S(x)=\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{i(n-i+1)\,C_n^i\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n};f\right]-\right. \tag{2.2'}$$
$$\left.-(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]\right\}x_i(1-x)^{n-i}=\frac{1}{n^2(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}u_ix^i(1-x)^{n-i}$$

*) Rangul $N(\varepsilon)$ nu depinde de variabila x.

unde s-a notat

$$u_i=i(n-i+1)C_n^i\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n};f\right]-(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right].$$

Vom arăta întîi că $u_i\leqq 0$, oricare ar fi $i=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$. În acest scop considerăm expresia auxiliară

$$v_i=-i(n-i+1)C_n^i\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]+(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]=$$
$$=\left[(i+1)^2C_n^{i+1}-i(n-i+1)C_n^i\right]\cdot\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]=$$
$$=C_n^i\left[(n-i)(i+1)-i(n-i+1)\right]\cdot\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]=C_n^i(n\text{-}2i)\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right].$$

Să presupunem pentru fixarea ideilor că $f(x)$ este neconcavă de ordinul 1 și 2 în intervalul $[0,1]$. Observăm că în această ipoteză, dacă $i\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $v_i\geqq 0$. Mai departe, să alcătuim suma :

$$u_i+v_i=i(n-i+1)C_n^i\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n};f\right]-i(n-i+1)C_n^i\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]+$$
$$+(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]-(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]=$$
$$=-\frac{i(n-i+1)(2n-i+1)}{n(n+1)}C_n^i\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]-$$
$$-\frac{(i+1)^2(n+i+1)}{n(n+1)}C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right].$$

Din aceste egalități și din faptul că pentru $i=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$, avem $v_i\geqq 0$, rezultă inegalitățile

$$u_i\leqq 0,\qquad \left(i=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{2.3}$$

Ținînd seama de (2.2) și (2.3), rezultă că toți termenii din suma $S(x)$, care corespund la indici $i\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$, sînt nepozitivi și suma lor, pe care o vom nota cu $S_1(x)$, satisface pentru orice x din intervalul $[0,1]$ inegalitatea

$$S_1(x)\leqq\frac{-1}{n^3(n+1)^2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^i\left\{i(n-i+1)(2n-i+1)\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1};f\right]+\right.$$
$$\left.+(i+1)(n-i)(n+i+1)\left[\frac{i}{n+1},\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]\right\}x^i(1-x)^{n-i}\leqq 0. \tag{2.4}$$

Să considerăm acum suma tuturor termenilor din $S(x)$, care corespund la indici i satisfăcînd inegalitatea $i \geqq \left[\frac{n}{2}\right]+1$. Vom nota această sumă cu $S_2(x)$.

$$S_2(x)=\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\left\{i(n-i+1)C_n^i\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n};f\right]\right.$$
$$\left.-(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]\right\}x^i(1-x)^{n-i} \tag{2.5}$$

Să notăm cu p numărul natural $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ şi să rearanjăm termenii sumei $S_2(x)$ precum urmează:

$$S_2(x)=\frac{1}{n^2(n+1)}\left\{p(n-p+1)C_n^p\left[\frac{p-1}{n},\frac{p}{n+1},\frac{p}{n};f\right]x^p(1-x)^{n-p}-\right.$$
$$\left.-n^2C_n^n\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^{n-1}(1-x)\right\}+$$
$$+\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{i=p}^{n-2}\left\{(i+1)(n-i)C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]x^{i+1}(1-x)^{n-i-1}-\right.$$
$$\left.-(i+1)^2C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right]x^i(1-x)^{n-i}\right\}$$

şi deci

$$S_2(x)=\frac{1}{n^2(n+1)}\left\{p(n-p+1)C_n^p\left[\frac{p-1}{n},\frac{p}{n+1},\frac{p}{n};f\right]x^p(1-x)^{n-p}-\right.$$
$$\left.-n^2\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^{n-1}(1-x)\right\}+ \tag{2.6}$$
$$+\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{i=p}^{n-2}(i+1)\,C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right][(n+1)x-i-1]\,x^i\,(1-x)^{n-i-1}.$$

Să notăm cu $\sigma_1(x)$ următoarea sumă ce intervine în (2.6):

$$\sigma_1(x)=\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{i=p}^{n-2}(i+1)C_n^{i+1}\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n+1},\frac{i+1}{n};f\right][(n+1)x-i-1]x^i\,(1-x)^{n-i-1} \tag{2.7}$$

Se observă că în intervalul $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, factorii $[(n+1)x-i-1]$ ce figurează în (2.7) sînt negativi pentru $i \geqq p$. Deci avem:

$$\sigma_1(x)\leqq 0,\ \text{oricare ar fi}\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{2.8}$$

Să considerăm acum ultimul termen din suma (2.1), adică termenul $-\lambda_n x^n$ şi să-l asociem cu termenul $-\frac{n^2}{n^2(n+1)}\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^{n-1}(1-x)$, ce figurează în (2.6). Suma lor va fi:

$$\sigma_2(x)=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^n-\frac{1}{n+1}\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^{n-1}(1-x)=$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1},1;f\right]x^{n-1}(x-n+nx). \tag{2.9}$$

Observăm că în intervalul $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ factorul $(x-n+nx)$ este nepozitiv şi deci $\sigma_2(x)$ este nepozitiv în acest interval.

$$\sigma_2(x)\leqq 0\quad,\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{2.10}$$

Considerăm acum penultimul termen din (2.1), adică $\lambda_1(1-x)^n$; să-l asociem cu primul termen din (2.6), adică cu termenul

$$\frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)}\cdot C_n^p\left[\frac{p}{n-1},\frac{p}{n+1},\frac{p}{n};f\right]x^p(1-x)^{n-p},\qquad \left(p=\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

Să notăm cu $\sigma_3(x)$ suma acestor doi termeni. Să arătăm că oricare ar fi numărul $\varepsilon>0$, pentru acesta există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n>N(\varepsilon)$, suma $\sigma_3(x)$ este nepozitivă în intervalul $\left[0,\frac{1}{5}-\varepsilon\right]$.

Suma în cauză este

$$\sigma_3(x)=\lambda_1(1-x)^n+\frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)}C_n^p\left[\frac{p-1}{n},\frac{p}{n+1},\frac{p}{n};f\right]x^p(1-x)^{n-p}. \tag{2.11}$$

Înlocuind în (2.11) pe λ_1 cu valoarea sa dată în (1.4), obţinem:

$$\sigma_3(x)=-\frac{1}{n(n+1)}\left[0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n};f\right](1-x)^n+$$
$$+\frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)}C_n^p\left[\frac{p-1}{n},\frac{p}{n+1},\frac{p}{n};f\right]x^p(1-x)^{n-p}. \tag{2.12}$$

De aici rezultă inegalitatea

$$\sigma_3(x)\leqq-\frac{\delta_2[f]}{n(n+1)}(1-x)^n+\frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)}C_n^p\Delta_2[f]\,x^p(1-x)^{n-p}=\bar{\sigma}_3(x) \tag{2.13}$$

unde $\delta_2[f]=\underline{\lim}_{[0,1]}|[x_1,x_2,x_3;f]|$, iar $\Delta_2[f]=\overline{\lim}_{[0,1]}|[x_1,x_2,x_3;f]|$. Punem condiţia ca $\bar{\sigma}_3(x)\leqq 0$. Ţinînd seama de faptul că $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$, această condiţie se transcrie

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^p\leqq\frac{n^2(n+1)}{p(n-p+1)\,C_n^p}\cdot\frac{\delta_2}{\Delta_2}. \tag{2.14}$$

Se verifică ușor că $C_n^p \leqq 2^{n-1}$, unde $p = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Inegalitatea (2.14) este *a fortiori* verificată cînd x satisface inegalitatea

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^p \leqq \frac{n}{p(n-p+1)2^{n-1}} \frac{\delta_2}{\Delta_2}$$

adică inegalitatea

$$\frac{x}{1-x} \leqq \left(\frac{n\,\delta_2}{p(n-p+1)2^{n-1}\Delta_2}\right)^{1/p} = \rho_n. \tag{2.15}$$

Ținînd seamă de faptul că $p = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, precum și de faptul că $\delta_2 \neq 0$ (prin ipoteză), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{1}{4}$. Dacă acum impunem variabilei x să verifice inegalitățile $0 \leqq x \leqq \frac{1}{5} - \varepsilon$, atunci — ținînd seama de faptul că funcția $\frac{x}{1-x}$ este crescătoare în intervalul $[0,1]$ — rezultă inegalitățile

$$0 \leqq \frac{x}{1-x} \leqq \frac{1-5\varepsilon}{4+5\varepsilon} < \frac{1}{4}.$$

Începînd de la un rang $N(\varepsilon)$ (ce nu depinde de x), numerele ρ_n din (2.15) vor depăși raportul $\frac{1-5\varepsilon}{4+5\varepsilon}$ și deci începînd de la acest rang va avea loc inegalitatea (2.15). Rezultă deci că pentru $n > N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea

$$\sigma_3(x) \leqq 0, \quad \text{oricare ar fi} \quad x \in \left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon\right]. \tag{2.16}$$

În concluzie, ținînd seamă de (2.1), (2.2), (2.6), (2.7), (2.9) și (2.11), putem scrie :

$$\frac{d}{dx}\{B_{n+1} - B_n\} = S(x) + \lambda_1(1-x)^n - \lambda_n x^n = S_1(x) + S_2(x) + \lambda_1(1-x)^n - \lambda_n x^n =$$
$$= S_1(x) + \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \sigma_3(x).$$

Apoi ținînd seama de inegalitățile (2.4), (2.8), (2.10), (2.16), rezultă că pentru $n > N(\varepsilon)$, au loc inegalitățile

$$\frac{d}{dx}\{B_{n+1} - B_n\} \leqq 0, \quad \text{oricare ar fi} \quad x \in \left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon\right].$$

q.e.d.

Teorema enunțată se transpune cu ușurință pentru cazul cînd polinoamele de interpolare ale lui S. N. Bernstein se consideră relativ la un interval $[a, b]$ oarecare.

II.

APLICAȚII LA STUDIUL APROXIMĂRII FUNCȚIILOR

§ 3. Asupra aproximației date de polinomul $B_n(x; f)$

Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul $[0,1]$, atunci șirul corespunzător al polinoamelor de interpolare $B_n(x; f)$ este uniform convergent în acest interval și — conform unui rezultat obținut de prof. T. Popoviciu în [1] — au loc delimitările

$$|f(x) - B_n(x; f)| \leqq \frac{2}{3}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

unde $\omega(\delta)$ reprezintă modulul de oscilație al funcției $f(x)$.

E. Voronowskaja, studiind caracterul asimptotic al aproximației date de polinomul $B_n(x; f)$, stabilește în [2] următorul rezultat: Dacă funcția $f(x)$ admite în intervalul $[0, 1]$ derivată de ordinul doi continuă, atunci are loc relația :

$$\lim_{n\to\infty} n[f(x) - B_n(x; f)] = -\frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

(a se vedea de asemenea [3], [4], [5]).

În acest paragraf, stabilim următoarea teoremă, care într-un anume sens generalizează rezultatul obținut de E. Voronovskaja, amintit mai sus :

TEOREMA 3: *Dacă funcția $f(x)$, definită în intervalul $[0, 1]$, este continuă în acest interval, atunci are loc egalitatea*

$$f(x) - B_n(x; f) = -\frac{x(1-x)}{n} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] \tag{3.1}$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3 sînt valori din intervalul $[0,1]$.

Demonstrație. Să fixăm pentru moment variabila x și să considerăm funcționala

$$R_n\{f\} = f(x) - B_n(x; f). \tag{3.2}$$

Ținînd seamă de teorema 1, se observă că ea se anulează dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 1 și că ia valori negative pentru orice funcție convexă de ordinul 1 în $[0,1]$. Atunci, conform unui rezultat stabilit de prof. T. Popoviciu în [9], rezultă că această funcțională are o *formă clasică*, adică forma

$$R_n\{f\} = K_n(x) \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] \tag{3.3}$$

unde $K_n(x)$ este un coeficient ce nu depinde de funcția $f(x)$, iar ξ_1, ξ_2, ξ_3, sînt valori din intervalul $[0,1]$ care depind de $f(x)$. Expresia coeficientului $K_n(x)$ se determină îndată, particularizînd convenabil în (3.2) și (3.3) funcția $f(x)$. Astfel, dacă se ia $f(x) \equiv x^2$ se obține îndată

$$K_n(x) = R_n\{x^2\} = x^2 - B_n(x; x^2) = -\frac{x(1-x)}{n},$$

de unde rezultă afirmația teoremei.

§ 4. O metodă de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Fie o ecuaţie diferenţială

$$y'=f(x, y) \tag{4.1}$$

cu condiţia iniţială

$$y(x_0)=y_0. \tag{4.2}$$

Considerăm şirul de funcţii $y_n(x)$, definite de formula de recurenţă

$$y_0(x)=y_0$$

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} B_n\{s\,;f[s, y_{n-1}(s)]\}\,ds\,; \quad n=1,2,\ldots \tag{4.3}$$

unde prin $B_n(x\,;\varphi)$ înţelegem polinomul de interpolare de gradul n al lui S. N. Bernstein, corespunzător funcţiei $\varphi(s)$ şi intervalului (x_0, x_0+h).

$$B_n(x\,;\varphi)=\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i\,\varphi\left(x_0+\frac{ih}{n}\right)(x-x_0)^i(x_0+h-x)^{n-i} \tag{4.4}$$

Procedee de integrare aproximativă de acest gen au fost tratate de J. Warga în articolul de sinteză [10].

În acest paragraf se arată că în anumite condiţii care vor fi precizate mai jos, şirul (4.3) converge uniform într-un interval $[x_0, x_0+h]$ către integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (4.1), integrală ce satisface condiţia (4.2).

Ipoteze. Presupunem că funcţia $f(x, y)$, ce figurează în membrul doi al ecuaţiei diferenţiale, satisface următoarele condiţii:

α) Funcţia $f(x, y)$ este continuă în domeniul (D), definit de inegalităţile $x_0 \leqq x \leqq x_0+a$, $y_0-b \leqq y \leqq y_0+b$, $(a>0,\ b>0)$, şi satisface în acest domeniu inegalitatea lui Lipschitz relativ la variabila y, cu constanta L.

β) Fie $M=\max\limits_{(D)} f(x, y)$ şi fie h un număr pozitiv, satisfăcînd inegalităţile $h \leqq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ şi $h<\frac{2}{L}$.

γ) Fie (D^*) domeniul definit de inegalităţile $x_0 \leqq x \leqq x_0+h$, $y_0-b \leqq y \leqq y_0+b$. Funcţia $f(x, y)$ admite în (D^*) derivate parţiale de ordinul unu şi doi, continue.

Vom nota în cele ce urmează cu $y(x)$ integrala ecuaţiei diferenţiale (4.1) ce satisface condiţia (4.2). Are loc

TEOREMA 4: *În condiţiile* α), β), γ), *şirul* [4.3] *converge uniform în intervalul* $[x_0, x_0+h]$ *către integrala* $y(x)$.

Demonstraţie.

1°. Pentru orice $x \in [x_0, x_0+h]$, aproximaţia de ordinul n are sens şi satisface inegalităţile

$$y_0-b \leqq y_n(x) \leqq y_0+b\,; \quad n=1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Într-adevăr, pentru $n=1$ avem:

$$|y(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} B_1\{s\,;f(s, y_0)\}ds\right| \leqq (x-x_0)\,|B_1\{\xi\,;f(s,y_0)\}| \leqq$$
$$\leqq M(x-x_0) \leqq Mh \leqq b\,.$$

Aici s-a aplicat formula obişnuită de medie pentru integrale definite, iar ξ reprezintă un număr intermediar din intervalul (x_0, x_0+h). Presupunem acum că aproximaţia de ordinul n are sens şi satisface inegalităţile (4.5) în intervalul $[x_0, x_0+h]$. În această ipoteză, rezultă pentru aproximaţia de ordinul $n+1$ delimitarea

$$|y_{n+1}(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} B_{n+1}\{s\,;f[s, y_n(s)]\}ds\right| \leqq (x-x_0)\cdot|B_{n+1}\{\xi\,;f[s, y_n(s)]\}| \leqq$$
$$\leqq M(x-x_0) \leqq b\,; \quad x \in [x_0, x_0+h].$$

Conform principiului inducţiei complete, inegalităţile (4.5) sînt valabile în intervalul $[x_0, x_0+h]$ pentru orice indice natural n.

2°. Convergenţa şirului (4.3) este echivalentă cu convergenţa seriei

$$y_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}[y_{n+1}(x)-y_n(x)]\,. \tag{4.6}$$

Să arătăm că în intervalul $[x_0, x_0+h]$ această serie este uniform convergentă. Termenul general al ei se delimitează precum urmează:

$$\varepsilon_n(x)=|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqq \int_{x_0}^{x}|B_{n+1}\{s; f[s, y_n(s)]\}-B_n\{s; f[s,y_{n-1}(s)]\}|\,ds \leqq$$
$$\leqq \int_{x_0}^{x}|B_{n+1}\{s\,;f[s, y_n(s)]\}-B_n\{s\,;f[s, y_n(s)]\}|\,ds+ \tag{4.7}$$
$$+\int_{x_0}^{x}|B_n\{s; f[s, y_n(s)]\}-B_n\{s\,;f[s, y_{n-1}(s)]\}|\,ds\,.$$

Ţinînd seama de formula (1.2), precum şi de o formulă de medie stabilită de prof. T. Popoviciu în [8], obţinem pentru prima integrală delimitarea

$$I_1(x)=\int_{x_0}^{x}|B_{n+1}\{s\,;f[s, y_n(s)]\}-B_n\{s\,;f[s, y_n(s)]\}|\,ds \leqq \tag{4.8}$$
$$\leqq \int_{x_0}^{x}\frac{(s-x_0)(x_0+h-s)}{2n(n+1)}\cdot\max_{(D^*)}\left|\frac{d^2}{dx^2}f[x, y_n(x)]\right|ds$$

Notînd cu $M_1=\max\limits_{(D^*)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$; $M_2=\max\limits_{(D^*)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$; $M_{11}=\max\limits_{(D^*)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$

$$M_{12}=\max_{(D^*)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|; \quad M_{22}=\max_{(D^*)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|,$$

şi ţinînd seama de următoarea formulă stabilită de T. Popoviciu în [1]

$$\frac{d}{dx}B_n(x;\varphi)=\frac{1}{h^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}\cdot\left[x_0+\frac{ih}{n},\ x_0+\frac{(i+1)h}{n};\ \varphi\right](x-x_0)^i(x_0+h-x)^{n-1-i}$$

obţinem delimitarea

$$\max_{(D^*)}\left|\frac{d^2}{dx^2}f[x,y_n(x)]\right|\leqq M_{11}+M_1M_2+M(2M_{12}+M_2^2+MM_{22})=N_2$$

şi deci din (4.8) obţinem:

$$I_1(x)\leqq\frac{N_2}{2n(n+1)}\int_{x_0}^{x}(s-x_0)(x_0+h-s)ds\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4n(n+1)}N_2. \tag{4.8'}$$

Apoi, pentru cea de a doua integrală ce figurează în membrul drept al inegalităţii (4.7), ţinînd seama de inegalitatea lui Lipschitz, obţinem delimitarea

$$\begin{aligned}I_2(x)&=\int_{x_0}^{x}|B_n\{s;f[s,y_n(s)]\}-B_n\{(s;f[s,y_{n-1}(s)]|\,ds\leqq\\ &\leqq\int_{x_0}^{x}B_n\{s;L\,|\,y_n(s)-y_{n-1}(s)\,|\,\}ds\leqq L\int_{x_0}^{x}B_n\{s;\ \varepsilon_{n-1}(s)\}\,ds.\end{aligned} \tag{4.9}$$

În definitiv, din (4.7), (4.8) şi (4.9) obţinem formula de recurenţă

$$\varepsilon_n(x)\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4n(n+1)}N_2+L\int_{x_0}^{x}B_n\{s;\ \varepsilon_{n-1}(s)\}ds;\quad (n=1,2,\ldots) \tag{4.10}$$

Pentru $n=0$, avem

$$\varepsilon_0(x)\leqq\left|\int_{x_0}^{x}B_1\{s;f(s,y_0)\}ds\right|\leqq\int_{x_0}^{x}B_1\{s;\ M\}ds=M(x-x_0).$$

Utilizînd formula de recurenţă (4.10), obţinem pentru $\varepsilon_1(x)$ delimitarea

$$\varepsilon_1(x)\leqq\left(\frac{h}{4.1.2}N_2+\frac{LM}{2}\right)(x-x_0)^2=\delta_1(x).$$

Apoi pentru $\varepsilon_2(x)$ obţinem:

$$\varepsilon_2(x)\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4.2.3}N_2+L\int_{x_0}^{x}B_2\{s;\ \delta_1(x)\}\,ds.$$

Ţinînd seamă de faptul că expresia $\delta_1(x)$ este convexă (de ordinul 1) în intervalul $[x_0,\ x_0+h]$, precum şi de teorema 1, rezultă inegalităţile

$$0\leqq B_2\{s;\ \delta_1(s)\}\leqq B_1\{s;\ \delta_1(s)\}$$

şi deci obţinem *a fortiori* pentru $\varepsilon_2(x)$ delimitarea

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(x)&\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4.2.3}N_2+L\int_{x_0}^{x}B_1\{s;\ \delta_1(s)\}\,ds=\\ &=\left[\frac{h}{4.2.3}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_1(x_0+h)}{h}\right](x-x_0)^2=\delta_2(x).\end{aligned}$$

In mod analog, pentru $\varepsilon_3(x)$ obţinem delimitarea

$$\begin{aligned}\varepsilon_3(x)&\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4.3.4}N_2+L\int_{x_0}^{x}B_3\{s;\ \delta_2(s)\}\,ds\leqq\frac{h(x-x_0)^2}{4.3.4}N_2+L\int_{x^0}^{x}B_1\{s;\delta_2(s)\}ds=\\ &=\left[\frac{h}{4.3.4}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_2(x_0+h)}{h}\right](x-x_0)^2=\delta_3(x).\end{aligned}$$

Din aproape în aproape, obţinem:

$$\varepsilon_n(x)\leqq\left[\frac{h}{4n(n+1)}N_2+\frac{L}{2}\frac{\delta_{n-1}(x_0+h)}{h}\right](x-x_0)^2=\delta_n(x). \tag{4.11}$$

De aici obţinem următoarea formulă de recurenţă pentru $\delta_n(x_0+h)$:

$$\begin{cases}\delta_n(x_0+h)=\dfrac{Lh}{2}\delta_{n-1}(x_0+h)+\dfrac{h^3}{4n(n+1)}N_2; & (n=1,2,\ldots)\\ \delta_0(x_0+h)=Mh\end{cases}$$

care este de forma

$$\begin{cases}\delta_n=\alpha\delta_{n-1}+\dfrac{\beta}{n(n+1)}, & (n=1,2,\ldots)\\ \delta_0=Mh\end{cases} \tag{4.12}$$

unde

$$\alpha=\frac{Lh}{2},\qquad \beta=\frac{h^3}{4}N_2.$$

Cu ajutorul acestei formule de recurenţă se constată că în ipoteza $\alpha=\frac{Lh}{2}<1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(x_0+h)$ este convergentă avînd ca sumă numărul

$$S=\frac{\delta_0+\beta}{1-\alpha}=\frac{Mh+\frac{h^3}{4}N_2}{1-\frac{Lh}{2}}.$$

Din (4.11) se observă că seria $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(x_0+h)$ constituie o majorantă a seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(x)$, în intervalul $[x_0,\ x_0+h]$. Rezultă în definitiv că seria (4.6) este absolut şi uniform convergentă în intervalul $[x_0,\ x_0+h]$ şi deci că şirul (4.3) este şi el uniform convergent în acest interval către o funcţie pe care o notăm cu $y(x)$. Făcînd pe n să tindă către infinit, după cum uşor se poate constata, egalitatea (4.3) devine la limită

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[s,y(s)]ds$$

de unde rezultă că funcţia $y(x)$ este o integrală a ecuaţiei (4.1), ce verifică condiţia (4.2).

Observaţii. 1. Se poate arăta cu uşurinţă că dacă în domeniul (D^*) sînt îndeplinite condiţiile $f \geqq 0, \frac{\partial f}{\partial x} \geqq 0, \frac{\partial f}{\partial y} \geqq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geqq 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leqq 0,$ şi dacă se consideră $y_0(x) = y_0 + b$, atunci şirul (4.3) corespunzător este necrescător în $[x_0, x_0+h]$.

2. Teorema 4, stabilită anterior, se extinde cu uşurinţă la sisteme de ecuaţii diferenţiale.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, Cluj, 10 (1935), 49–54.
2. E. Voronovskaja, *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein.* C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. (1932), 79–85.
3. S. N. Bernstein, *Complétement a l'article de E. Voronowskaja.* C.R.Acad. Sci. U.R.S.S. (1932), 86–92.
4. G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials.* Toronto, 1953.
5. P. L. Butzer, *Linear combinations of Bernstein polynomials.* Can. J. Math., 5 (1953), 559–567.
6. E. Moldovan, *Asupra unei modificări a procedeului de interpolare a lui S. Bernstein.* Studii şi cercetări ştiinţifice — Acad. R.P.R. Filiala Cluj, III, nr. 3–4 (1952), 18–22.
7. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réeles.* Thése (Paris, 1933), 32–33.
8. — *Folytonos függvények középértéktételeiröl,* Magyar Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) osztályának közleményeiböl, IV, nr. 3, (1954), 353–356.
9. — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei.* Lucrările sesiunii generale ştiinţifice a Academiei R.P.R., din 2–12 iunie 1950.
10. J. Warga, *On a class of iterative procedures for solving normal systems of ordinary differential equations.* Journal of Math. and Physics, vol. XXXI, nr. 4. (1953), 223–243.

Относительно свойства монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применение к исследованию приближения функций

(Краткое содержание)

В этой работе устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 1. а) Если функция $f(x)$, заданная в интервале [0,1], является в этом интервале соответственно выпуклой, невогнутой, полиномиальной, невыпуклой, вогнутой 1-го порядка (т. е. всякая её разделенная разность 2-го порядка является в этом интервале соответственно >0, $\geqq 0$, $=0$, $\leqq 0$, <0), тогда последовательность интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна, соответствующая функции $f(x)$ и интервалу [0,1],

является соответственно убывающей, невозрастающей, стационарной, неубывающей, возрастающей последовательностью.

б) Какова бы ни была функция $f(x)$, заданная и непрерывная в интервале [0,1], независимо от того, удовлетворяет или нет некоторому свойству выпуклости, для неё имеют место равенства (1.2).

Теорема 2. Если функция $f(x)$, заданная в интервале [0,1], является в этом интервале соответственно выпуклой, невогнутой, невыпуклой, вогнутой 1-го и 2-го порядка, (т. е. всякая её разделенная разность 2-го порядка и всякая разделенная разность 3-го порядка есть соответственно >0, $\geqq 0$, $\leqq 0$, <0) и если разделенные разности 2-го порядка органичены в [0,1], причем $\delta_2 = \lim |[x_i, x_2, x_3; f]| \neq 0$, тогда последовательность производных интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна, соответствующая функции $f(x)$ и интервалу [0,1], начиная с некоторого числа $N(\varepsilon)$, (независимо от x), является соответственно убывающей, невозрастающей, не убывающей, возрастающей в интервале $\left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon\right]$, где ε проивольное положительное число.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале [0,1] тогда имеет место соотношение (3.1).

Теорема 4. Пусть дано дифференицальное уравнение (4.1) с начальным условием (4.2) и пусть $y_n(x)$, последовательность функций, определена рекурентной формулой (4.3). В условиях α), β), γ) последовательность (4.3) разномерно сходится в интервале $[x_0, x_0+h]$ к интегралу $y(x)$ уравнения (4.1) с условием (4.2).

Propriétés concernant la monotonie de la suite des polynômes d'interpolation de S. N. Bernstein et leur application à l'étude de l'approximation des fonctions

(Résumé)

Dans la présente note on établit les théorèmes suivants :

1er *théoréme. a*) Si la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle [0,1] est dans cet intervalle respectivement convexe, non concave, polynomiale, non convexe, concave du premier ordre (c'est-à-dire que n'importe quelle différence divisée du second ordre est dans l'intervalle [0,1] respectivement $>0, \geqq 0, =0, \leqq 0, <0$), alors toute la suite des polynômes d'interpolation de S. N. Bernstein correspondant à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle [0,1], est respectivement décroissante, non croissante, stationnaire, non décroissante, croissante.

b) Quelle que soit la fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle [0,1], indifféremment si elle vérifie ou non une propriété de convexité, pour elle ont lieu les égalités (1.2).

2[e] *théorème.* Si la fonction $f(x)$ définie dans $[0,1]$ est dans cet intervalle respectivement convexe, non concave, non convexe, concave du premier et du second ordre (c'est-à-dire que n'importe quelle différence divisée du second ordre et n'importe quelle différence divisée du troisième ordre est respectivement >0, $\geqq 0$, $\leqq 0$, <0) et si les différences divisées du second ordre sont bornées dans $[0,1]$, et $\delta_2 = \underline{\lim} \, |[x_1, x_2, x_3, f]| \neq 0$, alors la suite des dérivées des polynômes d'interpolation de S. N. Bernstein correspondant à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle $[0,1]$ depuis un rang $N(\varepsilon)$ (qui ne dépend pas de x) est respectivement décroissante, non croissante, non décroissante, croissante dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon\right]$, où ε est un nombre positivement arbitraire.

3[e] *théorème.* Si la fonction $f(x)$ est définie et continue dans l'intervalle $[0,1]$, alors a lieu la relation (3.1).

4[e] *théorème.* Soit une équation différentielle (4.1) à la condition initiale (4.2) et soit la suite de fonctions $y_n(x)$ définie par la formule de récurrence (4.3). Dans les conditions α), β), γ), la suite (4.3) converge uniformément dans l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ vers l'intégrale $y(x)$ de l'équation (4.1), avec la condition (4.2).