INTERVALE DE NEOSCILAŢIE LA ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

1. Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = 0. \tag{1}$$

Într-un celebru memoriu [11], Ch. J. de la Vallée Poussin a stabilit următoarea teoremă:

Presupunînd că funcţiile $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sînt continue într-un interval* $[a, b]$, *fie* $M_i = \max\limits_{[a,b]} | a_i(x) |$ *şi fie* h_0 *rădăcina pozitivă a ecuaţiei*

$$M_n \frac{h^n}{n!} + M_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + M_1 \frac{h}{1!} - 1 = 0. \tag{2}$$

Atunci oricum s-ar alege n puncte $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *din planul* xOy, *astfel încît* $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$ *şi* $x_n - x_1 \leq h_0$, *pentru alegerea făcută există o curbă integrală a ecuaţiei* (1) *şi una singură, care să treacă prin punctele* $P_i(x_i, y_i)$.

În legătură cu acest rezultat se pune următoarea problemă:

Să se afle un număr h cît mai mare posibil, astfel încît proprietatea respectivă de interpolaţie a mulţimii soluţiilor ecuaţiei diferenţiale, să aibă loc pentru orice sistem de n noduri situate într-un subinterval de lungime h al intervalului $[a, b]$.

Această problemă a format obiectul mai multor lucrări. Astfel, C. Foiaş, G. Gussi şi V. Poenaru în lucrarea [3] dau o metodă de calcul aproximativ cu ajutorul căreia se poate calcula cu orice precizie, numărul maxim h, în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea. Într-o altă lucrare [4], aceiaşi autori studiază delimitarea distanţei minime dintre două rădăcini consecutive, la integralele ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea, obţinînd criterii de neoscilaţie deosebit de eficace în anumite condiţii.

În lucrarea [13], S. Zaidman, folosind o lemă a lui Beurling, obţine o variantă a teoremei de interpolare a lui De la Vallée Poussin.

Formulări îmbunătăţite ale teoremei lui Ch. de la Vallée Poussin în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea, au fost obţinute de către Ph. Hartman şi A. Wintner în lucrarea [5] iar apoi de către Z. Opial în lucrarea [9].

Recent, A. Iu. Levin în lucrarea [7] a obţinut pentru ecuaţii diferenţiale lineare de un ordin oarecare n următoarea teoremă, care ne furnizează un interval de interpolare mai mare decît acela dat de teorema lui Ch. de la Vallée Poussin:

Pentru ca să existe o soluţie (unică) $y(x)$ *a ecuaţiei diferenţiale* (1), *satisfăcînd condiţiilor polilocale* $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, *unde* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *reprezintă noduri din intervalul de continuitate al coeficienţilor ecuaţiei* (1), *iar* y_i $(i = 1, \ldots, n)$ *reprezintă numere reale oarecari date, este suficient ca să fie îndeplinită inegalitatea*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k h^k}{2^k \cdot k \cdot \left[\frac{k-1}{2}\right]! \left[\frac{k}{2}\right]!} < 1,$$

unde s-a notat $h = x_n - x_1$, *iar* $m_k = \max\limits_{x_1 \leqq x \leqq x_n} | a_k(x) |$.

De aici rezultă că dacă coeficienţii ecuaţiei diferenţiale (1) sînt funcţii continue într-un interval (a, b), atunci pentru ca problema polilocală formulată anterior să admită o soluţie, este suficient ca nodurile de interpolare $x_1, \ldots, x_n$ să fie situate în intervalul $(a, a + \bar{h}_0)$, unde $\bar{h}_0$ reprezintă rădăcina din intervalul $(0, b - a)$ (dacă există o astfel de rădăcină) a următoarei ecuaţii în necunoscuta h:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k(h) \cdot h^k}{2^k \cdot k \cdot \left[\frac{k-1}{2}\right]! \left[\frac{k}{2}\right]!} - 1 = 0. \qquad (2')$$

Aici s-a notat $m_k(h) = \max\limits_{a \leqq x \leqq a+h} |a_k(x)|$, $(0 < h < b - a)$.

După cum se arată în lucrarea [7], are loc inegalitatea

$$\left\{2^k \cdot k \cdot \left[\frac{k-1}{2}\right]! \left[\frac{k}{2}\right]!\right\}^{-1} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k!},$$

din care rezultă că rădăcina $\bar{h}_0$ a ecuaţiei (2'), în cazul cînd există o astfel de rădăcină, este în general mai mare decît rădăcină h_0 a ecuaţiei obţinute din (2) prin înlocuirea numerelor M_k cu $m_k(h)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

În lucrarea de faţă se stabilesc noi teoreme de tipul teoremei lui De la Vallée Poussin, care permit în anumite condiţii obţinerea unor delimitări mai bune a numărului căutat h.

2. Dăm la început cîteva definiţii şi rezultate preliminare, de care ne vom servi în cursul expunerii.

Vom presupune în cele ce urmează că operatorul diferenţial L_n din formula (1), are coeficienţii continui într-un interval $[a, b)$.

DEFINIŢIA 1. *Vom spune că operatorul* L_n *are proprietatea* $I_n(a, b)$, *dacă oricare ar fi* n *valori distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *din intervalul* $[a, b)$ *şi oricare ar fi ordonatele reale* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *ecuaţia diferenţială* $L_n[y] = 0$, *admite o soluţie şi una singură* $y(x)$, *satisfăcînd condiţiilor* $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Se cunoaşte următoarea proprietate, a cărei verificare este de astfel imediată:

Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul L_n *să aibă proprietatea* $I_n[a, b)$, *este ca ecuaţia diferenţială corespunzătoare* $L_n[y] = 0$ *să nu admită nici o soluţie neidentic nulă, care să se anuleze în* n *puncte distincte din intervalul* $[a, b)$.

DEFINIŢIA 2. *Vom spune că operatorul* L_n *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$ *dacă oricare ar fi* m $(m \leqq n)$ *noduri distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *din intervalul* $[a, b)$ *şi oricare ar fi* m *sisteme de numere reale*

$$\{y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}, \{y_2^{(0)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_2^{(p_2-1)}\}, \ldots, \{y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(p_m-1)}\},$$

ecuaţia diferenţială $L_n[y] = 0$ *admite o integrală şi una singură* $y(x)$, *satisfăcînd condiţiile*

$$y(x_i) = y_i, \; y'(x_i) = y_i^{(1)}, \ldots, y^{(p_i-1)}(x_i) = y_i^{(p_i-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Aici numerele naturale $m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ *sînt arbitrare cu singura condiţie ca* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$.

Proprietatea $I_n^*[a, b)$ este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilaţie:

Oricare ar fi soluţia neidentic nulă $y(x)$, *ea nu se poate anula în intervalul* $[a, b)$ *mai mult de* $n - 1$ *ori, fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori, cît indică ordinul ei de multiplicitate.*

Într-o lucrare anterioară [1] s-a stabilit următoarea teoremă de echivalenţă:

TEOREMA **A**. *Dacă operatorul* L_n *cu coeficienţi continui în* $[a, b)$ *are proprietatea* $I_n[a, b)$, *atunci el are şi proprietatea* $I_n^*[a, b)$.

În lucrarea [10], G. Pólya dă o caracterizare a proprietăţii $I_n^*[a, b)$ cu ajutorul unor wronskieni. Cu unele completări [1], acest rezultat a lui G. Pólya se poate enunţa astfel:

TEOREMA **B**. *Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul* L_n *să aibă proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *este ca ecuaţia diferenţială corespunzătoare* $L_n[y] = 0$

să admită cel puțin un sistem de integrale $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, *satisfăcînd în intervalul deschis* (a, b) *relațiile*

$$y_1(x) \neq 0,\ W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0, \ldots, W[y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)] \neq 0.$$

Pentru operatorii diferențiali L_n care au proprietatea $I_n^*[a, b)$, are loc următoarea teoremă de medie aparținînd lui G. Pólya [10]:

TEOREMA C. *În ipoteza că operatorul* L_n *din* (1) *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *fie* $\varphi(x)$ *o funcție din clasa* $C^n[a, b)$, *care se anulează de* $n + p$ *ori în intervalul* $[a, b)$. *Atunci funcția* $\Phi(x) = L_n[\varphi(x)]$ *se anulează de cel puțin* p *ori în intervalul cuprins între cea mai mică și cea mai mare rădăcină din* $[a, b)$ *a funcției* $\varphi(x)$.

Tot pentru operatorii diferențiali L_n care au proprietatea $I_n^*[a, b)$, are loc și următoarea teoremă [10], care dă o generalizare a formulei lui Taylor:

TEOREMA D. *În ipoteza că operatorul* L_n *din* (1) *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *fie* $f(x)$ *o funcție din clasa* $C^n[a, b)$ *și fie* $H(x)$ *integrala ecuației omogene* $L_n[y] = 0$, *care ia valori egale cu valorile funcției* $f(x)$ *în* n *puncte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *din intervalul* $[a, b)$ (aceste puncte pot fi distincte sau confundate pe grupe). *Fie apoi* $N(x)$ *integrala ecuației neomogene* $L_n[y] = 1$, *care se anulează în punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Atunci, pentru orice* $x \in [a, b)$ *există cîte un punct intermediar* ξ *situat între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *astfel încît să aibă loc egalitatea*

$$f(x) = H(x) + N(x) \cdot L_n[f(\xi)].$$

CONSECINȚĂ. *Dacă* $f(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *atunci în baza proprietății* $I_n^*[a, b)$ *a operatorului* L_n, *rezultă că* $H(x) \equiv 0$ *în* $[a, b)$ *și formula anterioară de medie se transcrie*

$$f(x) = N(x) \cdot L_n[f(\xi)].$$

Reamintim în continuare următoarea lemă și teoremă, de care ne vom servi în cele ce urmează:

LEMA LUI DE LA VALLÉE POUSSIN. *Fie* $\varphi(x)$ *o funcție neidentic nulă într-un interval închis* $[a, b]$, *care se anulează în* n *puncte din* $[a, b]$. *Dacă* $\varphi(x)$ *admite în* $[a, b]$ *o derivată continuă de ordinul* n, *atunci are loc delimitarea*

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx < \mu \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},\quad \mu = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \right|,$$

În sfîrșit, vom mai enunța și următoarea teoremă, de care de asemenea ne vom folosi în cele ce urmează:

TEOREMA E. *Fie* $L_p[y]$ *și* $L_q[Y]$ *doi operatori diferențiali liniari și omogeni, de formă normală, de ordinele* p *respectiv* q, *operatorul* L_q *avînd coeficienții continui într-un interval* $[a, b)$, *iar operatorul* L_p *avînd coeficienții din clasa* $C^q[a, b)$. *În ipoteza că operatorul* L_p *are proprietatea* $I_p[a, b)$,

iar operatorul L_q *are proprietatea* $I_q[a, b)$, *rezultă că operatorul-produs* $L_qL_p[y] = L_q\{L_p[y]\}$ *are proprietatea* $I_{p+q}[a, b)$.

Demonstrația acestei teoreme în cazul unui interval deschis (a, b) a fost dată în lucrarea [2]. Din acea demonstrație rezultă îndată și afirmația teoremei în cauză, observînd că operatorul-produs $L_qL_p[y]$ are coeficienții continui în intervalul $[a, b)$ și ținînd seamă de teoremele 1 și 2 din lucrarea citată [1].

3. În acest paragraf vom da o generalizare a lemei lui de la Vallée Poussin, care ne va da posibilitatea de a obține noi teoreme analoage cu teorema de interpolație a lui De la Vallée Poussin.

Considerăm un operator diferențial liniar și omogen $L_n[y]$ de ordinul n, dat de formula (1). Vom presupune că operatorul $L_n[y]$ are coeficienții continui într-un interval semiînchis $[a, b)$ și că are proprietatea de interpolație $I_n^*[a, b)$. Fie $[\alpha, \beta]$ un subinterval închis al intervalului $[a, b)$:

$$a \leq \alpha < \beta \leq b. \tag{3}$$

Evident că operatorul $L_n[y]$ va avea și proprietatea $I_n^*[\alpha, \beta]$, referitoare la intervalul închis $[\alpha, \beta]$. În continuare fie $\varphi(x)$ integrala ecuației diferențiale liniare neomogene $L_n[y] = 1$, satisfăcînd condițiile:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \ldots = \varphi(x_n) = 0,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezintă n valori distincte din intervalul $[\alpha, \beta]$. Existența și unicitatea unei astfel de integrale este asigurată de proprietatea $I_n^*[\alpha, \beta]$ a operatorului $L_n[y]$. Vom nota integrala în cauză cu $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$, punînd în evidență prin această notație rădăcinile ei $x_1, x_2, \ldots, x_n$. În cazul cînd nodurile $x_1, \ldots, x_n$ coincid pe grupe, astfel încît de exemplu: p_1 noduri coincid cu valoarea ξ_1, p_2 noduri coincid cu valoarea $\xi_2, \ldots, p_m$ noduri coincid cu valoarea ξ_m $(p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n)$, atunci definim funcția $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ corespunzătoare, ca integrala ecuației diferențiale liniare și neomogene $L_n[y] = 1$, care satisface următoarelor condiții:

$$\left.\begin{array}{l} y(\xi_1) = y'(\xi_1) = \ldots = y^{(p_1-1)}(\xi_1) = 0 \\ y(\xi_2) = y'(\xi_2) = \ldots = y^{(p_2-1)}(\xi_2) = 0 \\ y(\xi_m) = y'(\xi_m) = \ldots = y^{(p_m-1)}(\xi_m) = 0 \end{array}\right\}$$

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n).$$

Existența și unicitatea unei astfel de integrale este asigurată de proprietatea $I_n^*[\alpha, \beta]$ a operatorului diferențial L_n.

Astfel definită, funcța $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor $x_1, x_1, \ldots, x_n$ în întreg domeniul

$$D: \alpha \leq x \leq \beta;\ \alpha \leq x_i \leq \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Într-adevăr, această funcţie fiind, în raport cu variabila x, soluţia ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 1$, ea va admite reprezentarea

$$\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_1, \ldots, x_n) y_i(x) + y_0(x), \tag{4}$$

unde $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ constituie un sistem fundamental, care nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, al ecuaţiei omogene $L_n[y] = 0$, iar $y_0(x)$ este o integrală, care de asemenea nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a ecuaţiei neomogene $L_n[y] = 1$. Coeficienţii $C_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determină cu uşurinţă scriind că funcţia $\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)$ din (4) se anulează pentru valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale variabilei x.

Scriind efectiv expresiile acestor coeficienţi sub forma cîtului unor determinanţi, se constată întîi din (4) că funcţia $\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)$ este continuă în orice punct din domeniul D, ale cărui coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt toate distincte, coordonata x putînd lua orice valoare din $[\alpha, \beta]$. Tot din reprezentarea (4) a funcţiei $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se poate arăta că această funcţie este continuă şi în punctele din domeniul D, care nu au toate coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distincte. Într-adevăr, presupunînd de exemplu nodurile $x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ fixate şi făcînd ca variabila x_1 să tindă către valoarea x_i, ţinînd seamă de expresiile coeficienţilor $C_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care figurează în (4) ca şi cîturi ale unor determinanţi, se constată cu uşurinţă că există următoarea limită

$$\lim_{x_1 \to x_i} \varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

şi că ea reprezintă integrala $y(x)$ a ecuaţiei neomogene $L_n[y] = 1$, satisfăcînd condiţiilor

$$y(x_2) = y(x_3) = \ldots = y(x_i) = y'(x_i) = y(x_{i+1}) = \ldots = y(x_n) = 0.$$

Însă, prin definiţie, această integrală reprezintă valoarea funcţiei φ pentru $x_1 = x_i$. În mod asemănător se arată continuitatea funcţiei $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi în cazul punctelor din domeniul D, ale căror coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prezintă o coincidenţă de un ordin mai mare.

Funcţia $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind continuă în domeniul D, ea va fi în consecinţă mărginită în acest domeniu. Are deci sens să considerăm expresia

$$M(\alpha, \beta) = \sup_{\substack{x_i \in [\alpha, \beta] \\ (i = 1, 2, \ldots, n)}} \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx. \tag{5}$$

Această margine superioară este finită şi este atinsă din motive de continuitate.

Vom arăta că :

Oricare ar fi numărul $\alpha = \alpha_0$ fixat în intervalul $[a, b)$, marginea superioară (5) reprezintă o funcţie continuă şi crescătoare de variabila β în intervalul $\alpha_0 < \beta < b$.

Faptul că $M(\alpha_0, \beta)$ este crescătoare în raport cu variabila β rezultă îndată din (5).

Să arătăm că funcţia $M(\alpha_0, \beta)$ este continuă în raport cu β în intervalul (α_0, b). Fie în acest scop β_0 o valoare oarecare din intervalul (α_0, b). Întrucît funcţia $M(\alpha_0, \beta)$ este crescătoare în raport cu β, finită pentru orice valoare a variabilei β din intervalul (α_0, b), rezultă că vor exista limitele

$$\lim_{\beta \to \beta_0 - 0} M(\alpha_0, \beta); \qquad \lim_{\beta \to \beta_0 + 0} M(\alpha_0, \beta).$$

Pentru a arăta continuitatea funcţiei $M(\alpha_0, \beta)$ în punctul $\beta = \beta_0$, va trebui să arătăm că limitele de mai sus coincid cu valoarea funcţiei $M(\alpha_0, \beta)$ pentru $\beta = \beta_0$, adică

$$\lim_{\beta \to \beta_0 - 0} M(\alpha_0, \beta) = M(\alpha_0, \beta), \tag{6}$$

$$\lim_{\beta \to \beta_0 + 0} M(\alpha_0, \beta) = M(\alpha_0, \beta). \tag{7}$$

Să arătăm întîi că are loc egalitatea (6). Prin definiţie avem

$$M(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{x_i \in [\alpha_0, \beta_0]} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx$$

şi după cum s-a văzut anterior, această margine superioară este atinsă pentru cel puţin o funcţie $\varphi(x; x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, corespunzătoare unei anumite situaţii $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ a nodurilor în intervalul $[\alpha_0, \beta_0]$. Putem deci scrie

$$M(\alpha_0, \beta_0) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} |\varphi(x; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})| dx. \tag{8}$$

S-a arătat însă anterior că funcţia $\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor $x, x_1, \ldots, x_n$ în domeniul D. Ea va fi în consecinţă şi uniform continuă în acelaşi domeniu. Notînd cu $\omega(\delta)$ $(\delta > 0)$ modulul ei de continuitate, atunci oricare ar fi punctele $(x', x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $(x'', x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ satisfăcînd inegalităţile $|x'' - x'| \leq \delta$, $|x_i'' - x_i'| \leq \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, are loc relaţia

$$|\varphi(x''; x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') - \varphi(x'; x_1', x_2', \ldots, x_n')| \leq \omega(\delta)$$

şi $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Rezultă de aici că dacă

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

atunci

$$\sup_{x\in[\alpha_0,\beta_0]} |\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(x; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})| \leq \omega(\delta),$$

şi de aici, ţinînd seamă de (8), obţinem inegalitatea

$$\left|\int_{\alpha_0}^{\beta_0} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx - M(\alpha_0, \beta_0)\right| \leq \omega(\delta)(\beta_0 - \alpha_0), \tag{10}$$

valabilă pentru orice sistem de noduri $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfăcînd inegalităţile (9). Fie b_1 un număr arbitrar satisfăcînd inegalităţile $\beta_0 < b_1 < b$. Introducem notaţia

$$\mathcal{M} = \sup_{\substack{x, x_i \in [a, b_1] \\ (i=1,2,\ldots,n)}} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)|.$$

În baza continuităţii funcţiei $\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)$, numărul $\mathcal{M}$ este finit. Cu această notaţie, din inegalitatea (10), în aceleaşi condiţii (9) asupra nodurilor x_i şi în ipoteza că numărul δ este suficient de mic încît să fie satisfăcute inegalităţile $\alpha_0 < \beta_0 - \delta < \beta_0$, rezultă inegalitatea

$$\left|\int_{\alpha_0}^{\beta_0 - \delta} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx - M(\alpha_0, \beta_0)\right| \leq \omega(\delta)(\beta_0 - \alpha_0) + \delta \cdot \mathcal{M}, \tag{11}$$

de unde se obţine inegalitatea

$$M(\alpha_0, \beta_0) - \omega(\delta)(\beta_0 - \alpha_0) - \delta\mathcal{M} \leq \int_{\alpha_0}^{\beta_0 - \delta} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx, \tag{12}$$

valabilă pentru orice sistem de noduri x_i $(i = 1, \ldots, n)$ satisfăcînd relaţiile (9). Alegem nodurile x_i $(i = 1, \ldots, n)$ astfel încît

$$x_i = \begin{cases} x_i^{(0)} & \text{dacă } x_i^{(0)} \leq \beta_0 - \delta \\ \beta_0 - \delta & \text{dacă } x_i^{(0)} > \beta_0 - \delta. \end{cases}$$

Pentru această alegere, ţinînd seamă de faptul că numerele x_i $(i = 1, \ldots, n)$ aparţin intervalului $[\alpha_0, \beta_0]$, relaţiile (9) vor fi îndeplinite şi în consecinţă va avea loc relaţia (12). În plus, toate nodurile x_i $(i = 1, \ldots n)$ vor fi situate în intervalul $[\alpha_0, \beta_0 - \delta]$. Cu această precizare, din (12) rezultă inegalitatea

$$M(\alpha_0, \beta_0) - \omega(\delta)(\beta_0 - \alpha_0) - \delta\mathcal{M} \leq \sup_{x_i \in [\alpha_0, \beta_0 - \delta]} \int_{\alpha_0}^{\beta_0 - \delta} |\varphi(x; x_1, \ldots, x_n)| dx = M(\alpha_0, \beta_0 - \delta)$$

şi întrucît în mod evident avem $M(\alpha_0, \beta_0 - \delta) < M(\alpha_0, \beta_0)$, putem scrie

$$M(\alpha_0, \beta_0) - \omega(\delta)(\beta_0 - \alpha_0) - \delta\mathcal{M} \leq M(\alpha_0, \beta_0 - \delta) < M(\alpha_0, \beta_0)$$

şi a fortiori

$$M(\alpha_0, \beta_0) - \omega(\delta)(b_1 - a) - \delta\mathcal{M} \leq M(\alpha_0, \beta - \delta) < M(\alpha_0, \beta_0). \tag{13}$$

Făcînd în această relaţie pe δ să tindă către zero şi ţinînd seamă de faptul că $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$, rezultă egalitatea (6).

Continuitatea la dreapta a funcţiei $M(\alpha_0, \beta)$ în raport cu variabila β în punctul $\beta = \beta_0$ se arată astfel. Considerăm în relaţia (13) modulul de continuitate raportat la intervalul $[a, b_1]$. Se observă întîi că în (13) numărul δ $(\delta > 0)$ este arbitrar însă suficient de mic, iar $\omega(\delta)$ şi $\mathcal{M}$ nu depind de poziţia punctelor α_0 şi β_0 în intervalul $[a, b_1]$. Notînd $\beta_0 - \delta = \beta_0'$ şi deci $\beta_0 = \beta_0' + \delta$ $(\delta > 0)$, prima inegalitate din (13) se transcrie

$$M(\alpha_0, \beta_0' + \delta) - \omega(\delta)(b_1 - a) - \delta\mathcal{M} \leq M(\alpha_0, \beta_0'). \tag{13'}$$

Dar în mod evident avem

$$M(\alpha_0, \beta_0') < M(\alpha_0, \beta_0' + \delta),$$

astfel că din (13') obţinem

$$M(\alpha_0, \beta_0') < M(\alpha_0, \beta_0' + \delta) \leq M(\alpha_0, \beta_0') + \omega(\delta)(b_1 - a) + \delta\mathcal{M}, \tag{14}$$

care este valabilă pentru orice β_0' şi δ (admisibili). Din (14), considerînd β_0' fixat şi făcînd pe $\delta \to 0$, se constată îndată continuitatea la dreapta a funcţiei $M(\alpha_0, \beta)$ în punctul $\beta = \beta_0'$. Astfel este stabilită proprietatea de continuitate a funcţie $M(\alpha, \beta)$ în raport cu β.

LEMA 1 (Generalizarea lemei lui De la Vallée Poussin). *Fie $L_n[y]$ un operator diferenţial liniar şi omogen de ordinul n, avînd coeficienţii continui într-un interval închis $[\alpha, \beta]$, şi avînd proprietatea $I_n^*[\alpha, \beta]$. Fie $f(x)$ o funcţie din clasa $C^n[\alpha, \beta]$, care se anulează pentru n valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din $[\alpha, \beta]$. Atunci are loc inegalitatea*

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \leq M(\alpha, \beta) \cdot \mu_n \tag{15}$$

unde $\mu_n = \sup |L_n[f(x)]|$, *iar* $M(\alpha, \beta)$ *are semnificaţia din* (5).

Demonstraţie. În baza formulei de medie a lui G. Pólya (teorema **D**) se poate scrie $f(x) = N(x) L_n[f(\xi)]$, unde $N(x)$ reprezintă integrala ecuaţiei neomogene $L_n[y] = 1$, integrală care se anulează pentru valorile $x_1, \ldots, x_n$ ale variabilei x, iar ξ reprezintă un număr din intervalul (α, β). Din egalitatea precedentă se obține $|f(x)| \leq |N(x)| \cdot \mu_n$, de unde, ținînd seamă de (5), rezultă inegalitatea (15).

Exemplu. Să considerăm în particular $L_n = \frac{d^n}{dx^n}$. Acest operator are proprietatea $I_n^*(-\infty, +\infty)$. Soluția $\varphi(x)$ a ecuației diferențiale $y^{(n)} = 1$, care se anulează pentru valorile $x_1, \ldots, x_n$ este

$$\varphi(x) = \frac{1}{n!}(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Fie $\varphi_p(x)$ integrala aceleiași ecuații, care se anulează de p ori în punctul $x = \alpha$ și de $(n - p)$ ori în punctul $x = \beta$ $(a < b)$. Această soluție are expresia

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{n!}(x - \alpha)^p (x - \beta)^{n-p}.$$

Se arată [11] că

$$\max_{\substack{x_i \in [\alpha, \beta] \\ (i=1,\ldots,n)}} \int_\alpha^\beta |\varphi(x)| dx = \max_{(p=0,1,\ldots,n)} \int_\alpha^\beta |\varphi_p(x)| dx =$$

$$= \max_{(p=0,1,\ldots,n)} \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!\, C_n^p} = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Are loc deci în cazul particular considerat egalitatea

$$M(\alpha, \beta) = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{16}$$

4. Să considerăm acum n operatori diferențiali liniari și omogeni

$$L_i[y] = a_{i,0}(x)\, y^{(k_i)} + a_{i,1}(x)\, y^{(k_i - 1)} + \ldots + a_{i,k_i}(x)\, y \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

avînd respectiv ordinele k_i. Cu ajutorul acestor operatori, construim operatorul diferențial

$$\mathcal{L}[y] = L_n L_{n-1} \ldots L_1[y] + A_1(x)\, L_{n-1} \ldots L_1[y] + \ldots +$$
$$+ A_{n-1}(x)\, L_1[y] + A_n(x) y \quad (\sigma_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n), \tag{18}$$

unde $A_i(x)$ sînt funcții date. Aici notația $L_q L_p[y]$ reprezintă produsul operatorilor L_q și L_p, adică $L_q L_p[y] = L_q\{L_p[y]\}$. Operatorul diferențial definit de formula (18) are ordinul $\sigma_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Vom adopta următoarele ipoteze cu privire la acest operator.

IPOTEZE. 1°. *Oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$, coeficienții $a_{i,0}(x), \ldots, a_{i,k_i}(x)$ ai operatorului L_i aparțin clasei $C^{(\tau_{i+1})}[a, b)$, unde $\tau_{i+1} = k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots + k_n$ și $a_{i,0}(x) \neq 0$ în intervalul $[a, b)$.*

2°. *Oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$, operatorul L_i are proprietatea $I_{k_i}^*[a, b)$.*

3°. *Coeficienții $A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ai operatorului $\mathcal{L}$ din* (16) *sînt funcții continue în intervalul $[a, b)$.*

În aceste ipoteze ne propunem să determinăm în funcție de coeficienții $A_i(x)$, un număr h cît mai mare posibil $(a < h \leq b - a)$, astfel încît operatorul $\mathcal{L}$ din (18) să aibă în intervalul $[a, a + h)$ proprietatea $I_{\sigma_n}^*[a, a + h)$, unde $\sigma_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ reprezintă ordinul operatorului $\mathcal{L}$. În baza unei observații făcute la începutul acestei expuneri, problema formulată mai sus revine la stabilirea unei evaluări cît mai bune a marginii inferioare a distanței dintre σ_n rădăcini consecutive ale unei integrale a ecuației diferențiale $\mathcal{L}[y] = 0$, marginea inferioară fiind considerată apoi relativ la mulțimea tuturor integralelor ecuației diferențiale respective.

În tratarea acestei probleme vom distinge două cazuri, după cum $k_n = 1$ sau $k_n > 1$.

5. În acest paragraf vom presupune $k_n = 1$ (adică operatorul diferențial L_n este de ordinul 1). Înainte de a trece la tratarea propriu-zisă a problemei, vom mai face următoarele precizări :

I. Dacă $k_n = 1$, atunci $L_n[y]$ este de forma

$$L_n[y] = \alpha(x)\frac{dy}{dx} + \beta(x) y, \tag{19}$$

unde $\alpha(x)$ și $\beta(x)$ sînt funcții continue în intervalul $[a, b)$, iar $\alpha(x) \neq 0$ în $[a, b)$. Acest operator se poate pune sub forma

$$L_n[y] = u(x)\frac{d}{dx}[v(x)\, y]. \tag{20}$$

Identificînd cele două expresii, obținem

$$v(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds}; \; u(x) = \alpha(x) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} ds}; \; x_0 \in [a, b). \tag{21}$$

În ipotezele adoptate, funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ sînt continue în intervalul $[a, b)$, neanulîndu-se în nici un punct din acest interval. Din (20) se deduce că pentru funcții $f(x)$ continue în $[a, b)$, operatorul L_n^{-1}, care stabilește corespondența dintre $f(x)$ și soluția ecuației diferențiale $L_n[y] = f(x)$, cu condiția $y(x_0) = 0$, $(x_0 \in [a, b))$, are expresia

$$L_n^{-1}[f] = V(x) \cdot \int_{x_0}^{x} U(s) f(s) ds \tag{22}$$

unde s-a notat $V(x) = \frac{1}{v(x)}$ şi $U(x) = \frac{1}{u(x)}$. Funcţiile $U(x)$ şi $V(x)$ sînt continue în $[a, b)$ întrucît funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ sînt continue şi nu se anulează în nici un punct din $[a, b)$.

În cele ce urmează, vom utiliza notaţiile

$$U = \max_{x\in[a,\, a+h]} |U(x)|, \quad V = \max_{x\in[a,\, a+h]} |V(x)| \qquad (0 < h < b - a). \tag{23}$$

II. Referitor la coeficienţii $A_i(x)$ $i = 1, \ldots, n$ care intervin în expresia (18) a operatorului $\mathcal{L}[y]$, introducem notaţiile

$$A_i = \max_{x \in [a,\, a+h]} |A_i(x)| \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

III. În continuare fie i un număr natural satisfăcînd inegalitatea $i \leq n - 1$ şi fie operatorul diferenţial

$$\Pi_i[Y] = L_{n-1}L_{n-2}\ldots L_i[Y]. \tag{25}$$

Acesta se prezintă ca produsul simbolic al operatorilor $L_i, \ldots, L_{n-1}$ de ordine $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{n-1}$ şi care prin ipoteză are respectiv proprietăţile $I^*_{k_i}[a, b), \ldots, I^*_{k_{n-1}}[a, b)$. Atunci în baza teoremei **E**, operatorul produs $\Pi_i[Y]$ va avea proprietatea $I^*_{\bar{\tau}_i}[a, b)$, unde $\bar{\tau}_i = k_i + k_{i+1} + \cdots + k_{n-1}$. În aceste condiţii fie $[\alpha, \beta]$ un subinterval al intervalului $[a, b)$ şi fie $x_1, \ldots, x_{\bar{\tau}_i}$ valori distincte din subintervalul $[\alpha, \beta]$. Fie $Y(x; x_1, \ldots, x_{\bar{\tau}_i})$ integrala ecuaţiei neomogene $\Pi_i[Y] = 1$, care se anulează pentru valorile $x_1, \ldots, x_{\bar{\tau}_i}$ ale variabilei x. Introducem notaţia

$$M(\alpha, \beta; \Pi_i) = \sup_{(x_1 \ldots x_{\bar{\tau}_i})} \int_\alpha^\beta |Y(x; x_1, \ldots, x_{\bar{\tau}_i})| dx. \tag{26}$$

Presupunînd numărul h fixat $(0 < h < b - a)$, vom nota pentru prescurtare

$$M(h; \Pi_i) = M(a, a + h; \Pi_i). \tag{27}$$

După cum rezultă din cele expuse în § 3, funcţia $M(h; \Pi_i)$ este continuă şi crescătoare în raport cu h, cînd $h \in (0, b - a)$.

IV. Fie ecuaţia în necunoscuta h

$$\mathcal{F}(h) = UV[A_n \cdot M(h; \Pi_1) + A_{n-1} \cdot M(h; \Pi_2) + \cdots + A_3 \cdot M(h; \Pi_{n-2}) + A_2 \cdot M(h; \Pi_{n-1}) + A_1 \cdot h] - 1 = 0. \tag{28}$$

Vom arăta că această ecuaţie nu poate admite două rădăcini distincte în intervalul $0 < h < b - a$. Într-adevăr, $\mathcal{F}(h)$ creşte cînd h creşte, întrucît după cum rezultă din § 3, oricare ar fi numărul natural i $(i \leq n-1)$, funcţiile $M(h; \Pi_i)$ definite prin formulele (26) şi (27) sînt crescătoare în raport cu h în intervalul $(0, b - a)$. De aici rezultă unicitatea rădăcinii pozitive a ecuaţiei (28), în cazul cînd această ecuaţie admite o astfel de

rădăcină. În cele ce urmează vom nota cu h_0 rădăcina pozitivă a ecuaţiei (28), în cazul cînd această ecuaţie admite o astfel de rădăcină, iar în caz contrar, vom considera prin definiţie $h_0 = b - a$.

Cu aceste precizări are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *În ipotezele 1°, 2°, 3° de la § 4, şi în ipoteza suplimentară $k_n = 1$, operatorul diferenţial $\mathcal{L}[y]$ din (18) are proprietatea $I^*_{\sigma_n}[a, a + h_0)$, unde $\sigma_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, iar h_0 reprezintă rădăcină din intervalul $(0, b - a)$ a ecuaţiei (28), dacă această ecuaţie admite o astfel de rădăcină, sau reprezintă numărul $b - a$ în cazul contrar.*

Demonstraţie. Să presupunem prin absurd că ecuaţia diferenţială $\mathcal{L}[y] = 0$ ar admite o soluţie neidentic nulă $y(x)$, care în intervalul $[a, a + h_0)$ ar avea σ_n rădăcini distincte, σ_n fiind ordinul ecuaţiei $\mathcal{L}[y] = 0$. Fie ε un număr suficient de mic, astfel încît intervalul închis $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ să conţină toate cele σ_n rădăcini ale soluţiei $y(x)$ în cauză.

Să considerăm operatorul $\Pi_1[Y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1[Y]$ de ordinul $\bar{\tau}_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$. În baza teoremei **E**, acest operator va avea proprietatea $I^*_{\bar{\tau}_1}[a, b)$, întrucît el este produsul operatorilor $L_1, \ldots, L_{n-1}$ avînd respectiv proprietăţile $I^*_{k_1}[a, b), \ldots, I^*_{k_{n-1}}[a, b)$. A fortiori, operatorul Π_1 va avea şi proprietatea $I^*_{\bar{\tau}_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, întrucît intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ este inclus în intervalul $[a, b)$. Atunci putem aplica lema 1 (generalizarea lemei lui Ch. J. de la Vallée Poussin), considerînd în locul operatorului L_n care figurează în enunţul acestei leme, operatorul Π_1, apoi în locul intervalului $[\alpha, \beta]$, intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ şi în sfîrşit în locul funcţiei $f(x)$, soluţia $y(x)$ considerată anterior. Ţinînd seamă de notaţiile (26) şi (27), obţinem

$$\int_a^{a+h_0-\varepsilon} |y(x)| dx \leq M(h_0 - \varepsilon; \Pi_1) \cdot \mu, \tag{29}$$

unde s-a notat

$$\mu = \max_{x \in [a,\, a+h_0-\varepsilon]} |\Pi_1[y(x)]|. \tag{30}$$

În continuare să considerăm în locul lui $y(x)$, funcţia $L_1[y(x)]$, care intervine ca factor în penultimul termen din expresia (18) a operatorului diferenţial $\mathcal{L}$. Întrucît prin ipoteză operatorul L_1 are proprietatea $I^*_{k_1}[a, b)$, deci şi proprietatea $I^*_{k_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, rezultă în baza teoremei **C** că funcţia $L_1[y(x)]$ are în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ cel puţin $\tau_2 = \sigma_n - k_1 = k_2 + k_3 + \ldots + k_n$ rădăcini distincte.

Să considerăm în continuare operatorul diferenţial $\Pi_2[Y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2[Y]$, de ordinul $\bar{\tau}_2 = k_2 + \ldots + k_{n-1}$. În baza teoremei **E**, acest operator va avea proprietatea $I^*_{\bar{\tau}_2}[a, b)$ şi a fortiori proprietatea $I^*_{\bar{\tau}_2}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, întrucît acest operator este produsul operatorilor diferenţiali $L_2, \ldots, L_{n-1}$ care au respectiv proprietăţile $I^*_{k_2}[a, b), \ldots,$

$I^*_{k_{n-1}}[a, b)$. Atunci putem aplica lema 1, considerînd în locul operatorului L_n care figurează în enunțul acestei leme, operatorul Π_2, apoi în locul intervalului $[\alpha, \beta]$, intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ și în sfîrșit în locul funcției $f(x)$, funcția $L_1[y(x)]$, despre care s-a arătat anterior că are în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ cel puțin τ_2 rădăcini distincte. Ținînd seamă de notațiile (26) și (27), obținem :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h_0-\varepsilon} |L_1[y(x)]|\,dx &\leq M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_2)\cdot \max_{x\in[a,\,a+h_0-\varepsilon]} |\Pi_2[L_1[y(x)]]| = \\ &= M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_2)\cdot \max_{x\in[a,\,a+h_0-\varepsilon]} |\Pi_1[y(x)]| = M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_2)\,\mu,\end{aligned} \tag{31}$$

unde μ are aceeași semnificație ca în (30).

Considerații analoage se pot face succesiv, referitor la funcțiile $\underbrace{L_2L_1}[y(x)], \ldots, \underbrace{L_{n-2}\ldots L_2L_1}[y(x)]$. Obținem astfel formulele

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^{a+h_0-\varepsilon} |L_2L_1[y(x)]|\,dx \leq M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_3)\cdot\mu,\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\\ &\int_a^{a+h_0-\varepsilon} |L_{n-2}L_{n-3}\ldots L_2L_1[y(x)]|\,dx \leq M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_{n-1})\mu,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

unde $M(h_0 - \varepsilon\,; \Pi_3), \ldots, M(h_0 - \varepsilon\,; \Pi_{n-1})$ au semnificația dată de formulele (26) și (27), iar μ este dat de formula (30).

Pe de altă parte, întrucît $y(x)$ constituie o soluție a ecuației diferențiale $\mathscr{L}[y(x)] = 0$, unde $\mathscr{L}$ este dat de formula (18), are loc identitatea

$$\begin{aligned}L_nL_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)] \equiv &- A_1(x)\,L_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)] - \ldots -\\ &- A_{n-1}(x)\,L_1[y(x)] - A_n(x)\,y(x).\end{aligned} \tag{33}$$

Vom aplica ambilor membri ai acestei identități operatorul L_n^{-1} din (22). Dacă se alege pentru numărul x_0 care figurează în expresia (22) a acestui operator, o rădăcină din intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ a funcției $L_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)]$ (existența unei astfel de rădăcini este asigurată de teorema **C**, ținîndu-se seama de faptul că $y(x)$ are prin ipoteză σ_n rădăcini în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$, precum și de faptul că operatorul $L_{n-1}\ldots L_2L_1[Y]$ are proprietatea $I^*_{\bar\tau_1}[a, b)$ deci și $I^*_{\bar\tau_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, unde $\bar\tau_1 = \sigma_n - k_n$), atunci în baza unicității problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială $L_n[Y] = L_nL_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)]$ (aici membrul al doilea se consideră o funcție dată), se obține identitatea

$$L_n^{-1}\{L_nL_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)]\} \equiv L_{n-1}L_{n-2}\ldots L_1[y(x)],$$

astfel că din (33) obținem

$$\begin{aligned}L_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)] \equiv &- V(x)\int_{x_0}^{x} U(s)A_1(s)L_{n-1}\ldots L_2L_1[y(s)]\,ds -\\ &- \ldots - V(x)\int_{x_0}^{x} U(s)A_{n-1}(s)L_1[y(s)]\,ds - V(x)\int_{x_0}^{x} U(s)A_n(s)y(s)\,ds.\end{aligned}$$

Luînd valorile absolute ale ambilor mebrii și ținînd seamă de notațiile (23) și (24), obținem

$$\begin{aligned}|L_{n-1}\ldots L_2L_1[y(x)]| \leq UV\Big\{&A_1\Big|\int_{x_0}^{x}|L_{n-1}\ldots L_1[y(s)]|\,ds\Big| +\\ &+ A_2\Big|\int_{x_0}^{x}|L_{n-2}\ldots L_1[y(s)]|\,ds\Big| + \ldots + A_{n-1}\Big|\int_{x_0}^{x}|L_1[y(s)]|\,ds\Big| + A_n\Big|\int_{x_0}^{x}|y(s)|\,ds\Big|\Big\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Fie ξ un punct din intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ în care funcția $|L_{n-1}L_{n-2}\ldots L_2L_1[y(x)]|$ își atinge valoarea sa maximă μ în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$. Întrucît inegalitatea (34) este valabilă pentru orice $x \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$, vom putea înlocui peste tot pe x cu ξ și ținînd seamă de faptul că $\xi \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$, obținem a fortiori inegalitatea

$$\begin{aligned}\mu \leq UV\Big\{&A_1\int_a^{a+h_0-\varepsilon}|L_{n-1}\ldots L_1[y(s)]|\,ds + A_2\int_a^{a+h_0-\varepsilon}L_{n-2}\ldots L_1[y(s)]\,ds +\\ &+ \ldots + A_{n-1}\int_a^{a+h_0-\varepsilon}|L_1[y(s)]|\,ds + A_n\int_a^{a+h_0-\varepsilon}|y(s)|\,ds\Big\}.\end{aligned} \tag{35}$$

De aici ținînd seamă de inegalitățile, (29), (31) și (32) se obține în urma unei simplificări cu μ, inegalitatea [1])

$$\begin{aligned}1 \leq UV\{&A_1\cdot(h_0-\varepsilon) + A_2M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_{n-1}) + A_3M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_{n-2}) +\\ &+ \ldots + A_{n-1}M(h_0-\varepsilon\,;\Pi_2) + A_nM(h_0-\varepsilon\,;\Pi_1)\}.\end{aligned} \tag{36}$$

[1]) Numărul μ definit de relația (30) este diferit de zero. Într-adevăr, în caz contrar, ar rezulta că are loc în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ identitatea $\Pi_1[y(x)] \equiv 0$ și cum prin ipoteză $y(x)$ este o integrală neidentic nulă a ecuației $\mathscr{L}[y] = 0$, integrală care se anulează pentru σ_n valori distincte din intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$, ar rezulta de aici că operatorul $\Pi_1[Y] = L_{n-1}L_{n-2}\ldots L_2L_1[Y]$ nu poate avea proprietatea $I^*_{\bar\tau_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, unde $\bar\tau_1 = k_1 + \ldots + k_{n-1}$. Pe de altă parte, întrucît operatorii $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ au respectiv proprietățile $I^*_{k_1}[a, b)$ $I^*_{k_2}[a, b), \ldots, I^*_{k_{n-1}}[a, b)$, rezultă în baza teoremei **E** că operatorul Π_1 are proprietatea $I^*_{\bar\tau_1}[a, b)$, deci și proprietatea $I^*_{\bar\tau_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$. Apare astfel o contradicție care provine din ipoteza absurdă că $\mu = 0$.

Această relație ne arată că funcția $\mathcal{F}(h)$ din (28) verifică inegalitatea

$$\mathcal{F}(h_0 - \varepsilon) \geqq 0. \tag{37}$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de egalitățile $\lim\limits_{h \to 0^+} M(h\,;\,\Pi_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, rezultă tot din (28) inegalitatea

$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{F}(h) < 0. \tag{38}$$

Cum funcția $\mathcal{F}(h)$ este continuă în intervalul $0 < h < b - a$ (a se vedea § 3), rezultă din (37) și (38) că ecuația $\mathcal{F}(h) = 0$ are o rădăcină h_1 satisfăcînd inegalitățile $0 < h_1 \leqq h_0 - \varepsilon$. Aceste relații împreună cu egalitatea $\mathcal{F}(h_1) = 0$ contrazic modul în care a fost ales numărul h_0. Astfel, ipoteza că ecuația diferențială $\mathcal{L}[y] = ar$ admite o soluție neidentic nulă $y(x)$, care să se anuleze în σ_n puncte distincte din intervalul $[a, a + h_0)$, nu poate avea loc și prin aceasta, teorema este demonstrată.

6. *Caz particular.* Dacă $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$ și $L_1 = L_2 = \ldots + L_n = \frac{d}{dx}$, atunci ecuația (18) se scrie

$$\mathcal{L}[y] = y^{(n)} + A_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)\,y' + A_n(x)\,y. \tag{18'}$$

Ipotezele 1° și 2° referitoare la operatorul $\mathcal{L}$ se verifică de la sine, iar $U = V = 1$. Operatorul Π_i din (25) devine $\Pi_i = \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}$. Atunci, conform formulei (16), obținem pentru $M(\alpha, \beta\,;\,\Pi_i)$ din (26) expresia

$$M(\alpha, \beta\,;\,\Pi_i) = \frac{(\beta - \alpha)^{n-i+1}}{(n-i+1)\,!},$$

de unde se obține pentru $M(h, \Pi_i)$ din (27), expresia

$$M(h\,;\,\Pi_i) = \frac{h^{n-i+1}}{(n-i+1)\,!}.$$

Ecuația (28) se transcrie atunci

$$\mathcal{F}(h) = A_n \frac{h^n}{n\,!} + A_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!} + \ldots + A_2 \frac{h^2}{2\,!} + A_1 h - 1 = 0 \tag{28'}$$

și această ecuație reprezintă tocmai ecuația lui De la Vallée Poussin, corespunzătoare ecuației diferențiale (18′).

Astfel, teorema 1 stabilită anterior, conține ca și un caz particular teorema de interpolare a lui De la Vallée Poussin.

7. Exemplu. Să considerăm ecuația diferențială

$$\mathcal{L}[y] = y''' - 4y'' + 5y' - y = 0. \tag{39}$$

Polinomul ei caracteristic are o rădăcină reală și două rădăcini complexe, rădăcina reală fiind irațională. În vederea aplicării teoremei 1, observăm că are loc identitatea

$$\mathcal{L}[y] = \frac{d}{dx}\{L[y]\} - L[y] + y, \tag{40}$$

unde

$$L[y] = y'' - 3y' + 2y. \tag{41}$$

Polinomul caracteristic asociat operatorului diferențial L are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_2 = 2$. Întrucît aceste rădăcini sînt reale, operatorul diferențial L va avea proprietatea $I_2^*(-\infty, +\infty)$ și deci proprietatea $I_2^*[a, b]$, oricare ar fi intervalul finit și închis $[a, b]$. Astfel condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite în cazul exemplului considerat. Avem aici: $n = 2$; $L_1 = L = \frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 2$; $L_2 = \frac{d}{dx}$; $A_1(x) \equiv -1$, $A_2(x) \equiv +1$. Vom considera ca interval $[a, b]$, intervalul $[0, \ln 2]$ și deci $a = 0$, $b = \ln 2$. Ecuația (28) în necunoscuta h se scrie astfel:

$$\mathcal{F}(h) = A_2 M(h;\,L) + A_1 h - 1 = 0. \tag{42}$$

Aici $A_1 = \max\limits_{[a, a+h]} |A_i(x)|$ $(i = 1, 2)$, deci $A_1 = A_2 = 1$, iar funcția $M(h\,;\,L)$ se obține ținînd seamă de formulele de definiție (26) și (27).

În continuare vom determina această funcție. Fie h un număr arbitrar din intervalul $(0, \ln 2)$ și fie λ și μ $(\lambda < \mu)$ numere arbitrare din intervalul $[0, h]$. Soluția $y(x\,;\,\lambda, \mu)$ a ecuației diferențiale neomogene $L[y] = 1$, soluție care se anulează pentru valorile $x = \lambda$ și $x = \mu$, are expresia

$$y(x\,;\,\lambda, \mu) = \frac{1}{2e^{\lambda+\mu}}\left[e^{2x} - (e^{\lambda} + e^{\mu})e^{x} + e^{\lambda+\mu}\right].$$

Ținînd seamă de faptul că $0 \leqq \lambda < \mu \leqq h$, se constată îndată că:

$$y(x\,;\,\lambda, \mu) > 0 \quad \text{pentru } x \in (0, \lambda),$$
$$y(x\,;\,\lambda, \mu) < 0 \quad \text{pentru } x \in (\lambda, \mu),$$
$$y(x\,;\,\lambda, \mu) > 0 \quad \text{pentru } x \in (\mu, h),$$

de unde se obține

$$\Phi(\lambda, \mu) = \int_0^h |y(x\,;\,\lambda, \mu)|\,dx = \frac{e^{\lambda} + e^{\mu}}{2e^{\lambda+\mu}}(e^{\mu} - e^{\lambda} - e^{h} + 1) + \frac{e^{2h} - 1}{4e^{\lambda+\mu}} - (\mu - \lambda) + \frac{h}{2}. \tag{43}$$

Va trebui să aflăm valoarea maximă a funcției Φ cînd λ și μ variază în intervalul $[0, h]$. În acest scop, efectuăm următoarele calcule :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}=\frac{1}{2e^{\lambda+\mu}}\left[e^{2\mu}+e^{2\lambda}+e^{\lambda}(e^{h}-2e^{\mu}-1)-\frac{1}{2}(e^{2h}-1)\right]=\frac{1}{2e^{\lambda+\mu}}\lambda(\varphi,\mu); \tag{44}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu}=2e^{\mu}(1-e^{\lambda})\leqq 0;\quad \psi|_{\mu=h}=e^{\lambda}(e^{\lambda}-e^{h}-1)+\frac{1}{2}(e^{2h}+1)>0. \tag{45}$$

Relațiile (45) ne arată că dacă se presupune parametrul λ fixat iar μ crește în intervalul $\lambda \leqq \mu \leqq h$, atunci funcția ψ considerată ca funcție de variabila μ descrește la valori pozitive. De aici, ținînd seamă de (44), rezultă că funcția $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$ considerată ca funcție de variabila μ este pozitivă cînd μ crește de la valoarea λ la valoarea h. De aici rezultă că dacă λ este fixat $(0 \leqq \lambda < h)$, funcția Φ din (43) își atinge valoarea maximă, cînd $\mu = h$.

Concluzii asemănătoare se obțin și relativ la variabila λ. Se ajunge în definitiv la următorul rezultat :

$$\sup_{(\lambda,\mu)} \Phi(\lambda,\mu)=\max\{\Phi(0,h);\ \sup_{\lambda\in[0,h)}\Phi(\lambda,\lambda)\}. \tag{46}$$

Din (43) se obține

$$\Phi(0,h)=\frac{1}{4}\left(e^{h}-2h-\frac{1}{e^{h}}\right), \tag{47}$$

$$\Phi(\lambda,\lambda)=\frac{e^{2h}}{4e^{2\lambda}}-\frac{e^{h}}{e^{\lambda}}+\frac{h}{2}+\frac{1}{e^{\lambda}}-\frac{1}{4e^{2\lambda}}. \tag{48}$$

Ținînd seamă de formula (46), avem de aflat marginea superioară a funcției $\Phi(\lambda, \lambda)$ atunci cînd λ variază în intervalul $[0, h)$. În acest scop, efectuăm următoarele calcule :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\{\Phi(\lambda,\lambda)\}=\frac{1}{2e^{2\lambda}}\cdot[-e^{2h}+2e^{\lambda+h}-2e^{\lambda}+1]=\frac{1}{2e^{2\lambda}}G(\lambda), \tag{49}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}=2(e^{\lambda+h}-e^{\lambda})>0;\ G_{\lambda=h}=(e^{h}-1)^2>0. \tag{50}$$

Din relațiile (50) rezultă că $G(\lambda) > 0$ cînd $\lambda \in (0, h)$, de unde în baza relației (49) se obține că $\frac{\partial}{\partial\lambda}\{\Phi(\lambda, \lambda)\} > 0$ pentru $\lambda \in (0, h)$, ceea ce ne arată că

$$\sup_{\lambda\in[0,h)}\Phi(\lambda,\lambda)=\Phi(h,h)=\frac{h}{2}+\frac{1}{e^{h}}-\frac{1}{4e^{2h}}-\frac{3}{4}. \tag{51}$$

Ținînd seamă de (47) și (51), formula (46) se transcrie :

$$\sup_{(\lambda,\mu)}\Phi(\lambda,\mu)=\max\left\{\frac{h}{2}+\frac{1}{e^{h}}-\frac{1}{4e^{2h}}-\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\left(e^{h}-2h-\frac{1}{e^{h}}\right)\right\}. \tag{52}$$

Cînd $h \in (0, \ln 2)$, se constată printr-un calcul simplu că dintre cele două funcții de h care figurează în membrul al doilea din (52), prima dintre ele are o valoare mai mare. Vom putea deci scrie

$$M(h;L)=\sup_{(\lambda,\mu)}\Phi(\lambda,\mu)=\frac{h}{2}+\frac{1}{e^{h}}-\frac{1}{4e^{2h}}-\frac{3}{4}$$

și ecuația (42) se scrie :

$$\mathcal{F}(h)=\left(\frac{h}{2}+\frac{1}{e^{h}}-\frac{1}{4e^{2h}}-\frac{3}{4}\right)+h-1=0,$$

adică

$$\mathcal{F}(h)=\frac{3h}{2}+\frac{1}{e^{h}}-\frac{1}{4e^{2h}}-\frac{7}{4}=0.$$

După cum rezultă din cele arătate în § 5, această ecuație are o singură rădăcină pozitivă. Prin încercări se arată ușor că această rădăcină este mai mare ca ln 2. Deci în cazul exemplului tratat, putem considera pentru h_0, valoarea $h_0 = \ln 2 = 0{,}69 \ldots \approx 0{,}7$.

Pentru a face o comparație cu rezultatele ce se obțin cu ajutorul teoremei de interpolare a lui De la Vallée Poussin [11], sau cu ajutorul teoremei de interpolare a lui A. Iu. Levin [6], vom considera ecuațiile (2) și și (2′), care în cazul exemplului tratat se scriu

$$E_1(h)=\frac{h^3}{3!}+5\frac{h^2}{2!}+4\frac{h}{1!}-1=0 \quad \text{(ecuația lui De la Vallée Poussin)},$$

$$E_2(h)=\frac{h^3}{24}+5\frac{h^2}{8}+4\frac{h}{2}-1=0 \quad \text{(ecuația lui A. Iu. Levin)}.$$

Se constată prin încercări că rădăcina pozitivă h_1 a ecuației $E_1(h) = 0$, satisface inegalitățile $0{,}21 < h_1 < 0{,}22$, iar rădăcina pozitivă h_2 a ecuației $E_2(h) = 0$ satisface inegalitățile $0{,}43 < h_2 < 0{,}44$.

8. Vom considera acum cazul cînd $k_n > 1$. În ipotezele din § 4 cu privire la operatorul $\mathcal{L}$, să considerăm operatorul L_n al cărui ordin este k_n. Fie $[\alpha, \beta]$ un subinterval al intervalului $[a, b)$ și fie $x_1, x_2, \ldots, x_{k_n}$ noduri distincte din subintervalul $[\alpha, \beta]$. Fie $f(x)$ o funcție continuă în $[\alpha, \beta]$. Să considerăm ecuația diferențială de ordinul k_n

$$L_n[y]=f(x), \tag{53}$$

cu condițiile polilocale

$$y(x_1)=y(x_2)=\ldots=y(x_{k_n})=0. \tag{54}$$

Întrucît prin ipoteză operatorul L_n are proprietatea de interpolaţie $I^*_{k_n}[a, b)$ şi a fortiori proprietatea $I^*_{k_n}[\alpha, \beta]$, rezultă că ecuaţia (53) va admite o integrală şi una singură satisfăcînd condiţiile (54). Corespondenţa astfel definită între funcţiile continue $f(x)$ şi soluţiile corespunzătoare ale ecuaţiei diferenţiale (53), soluţii care satisfac condiţiile (54), constituie un operator definit pe spaţiul $C[\alpha, \beta]$ al funcţiilor continue în intervalul $[\alpha, \beta]$ şi luînd valori în spaţiul $C^{(k_n)}[\alpha, \beta]$, adică al funcţiilor care admit derivată de ordinul k_n continuă în $[\alpha, \beta]$. Acest operator depinde evident de alegerea nodurilor care intervin în condiţiile (54). El este aditiv şi omogen. Conform uzanţei, îl vom nota în cele ce urmează cu $L_n^{-1}[f; x_1, \ldots, x_{k_n}]$, sau mai simplu cu L_n^{-1}. Astfel, dacă $y(x)$ este soluţia ecuaţiei (53), satisfăcînd condiţiile (54), atunci are loc în intervalul $[\alpha, \beta]$ identitatea

$$L_n^{-1}[f(x); x_1, \ldots, x_{k_n}] \equiv y(x). \tag{55}$$

După cum se ştie [6, 8], operatorul L_n^{-1} admite o reprezentare integrală de forma

$$y(x) = \int_\alpha^\beta G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})\, f(s) ds, \tag{56}$$

unde $G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})$ reprezintă funcţia lui Green corespunzătoare lui L_n şi condiţiilor polilocale (54). Ţinînd seamă de definiţia funcţiei lui Green, se poate demonstra cu uşurinţă că funcţia $G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor $x, s; x_1, \ldots, x_{k_n}$. În cele ce urmează ne vom folosi de notaţiile

$$G(\alpha, \beta) = \sup_{\substack{x, s, x_i \in [\alpha, \beta] \\ (i = 1, 2, \ldots k_n)}} |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})|. \tag{57}$$

Definim de asemenea

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \sup_{x, x_1, \ldots, x_{k_n} \in [\alpha, \beta]} \int_\alpha^\beta |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})| ds. \tag{58}$$

Ţinînd seamă de formula (57), se constată îndată că are loc inegalitatea

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta) \leq (\beta - \alpha) \cdot G(\alpha, \beta).$$

Fie h un număr satisfăcînd condiţia $0 < h < b - a$. Atunci putem considera ca interval $[\alpha, \beta]$, intervalul $[a, a + h]$. În cele ce urmează, pentru simplitatea scrierii introducem notaţiile

$$G(h) = G(a, a + h) \quad \text{şi} \quad \mathcal{G}(h) = \mathcal{G}(a, a + h). \tag{59}$$

Ţinînd seamă de formulele (57), (58) şi (59), precum şi de modul în care se construieşte funcţia lui Green $G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})$ (a se consulta [6, 8]), se constată cu uşurinţă că funcţiile $G(h)$ şi $\mathcal{G}(h)$ din (59) sînt funcţii continue şi nedescrescătoare în intervalul $0 < h < b - a$.

Considerăm în continuare următoarea ecuaţie în necunoscută h, analoagă ecuaţiei (28):

$$\mathcal{F}^*(h) = G(h)[A_n M(h; \Pi_1) + A_{n-1} M(h; \Pi_2) + \ldots + A_3 M(h; \Pi_{n-2}) + $$
$$+ A_2 M(h; \Pi_{n-1})] + A_1 \mathcal{G}(h) - 1 = 0. \tag{60}$$

Se poate arăta întocmai ca în cazul ecuaţiei (28) că ecuaţia (60) nu poate avea două rădăcini distincte în intervalul $0 < h < b - a$. Cu aceste precizări vom demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *În ipotezele* 1°, 2°, 3° *de la* § 4, *operatorul diferenţial* $\mathcal{L}[y]$ *din* (18) *are proprietatea* $I^*_{\sigma_n}[a, a + h_0)$, *unde* $\sigma_n = k_1 + \ldots + k_n$, *iar* h_0 *reprezintă rădăcină din intervalul* $(0, b - a)$ *a ecuaţiei* (60), *dacă această ecuaţie admite o astfel de rădăcină, sau reprezintă numărul* $b - a$ *în caz contrar.*

Demonstraţia teoremei se face prin reducere la absurd întocmai ca şi demonstraţia teoremei 1. Presupunînd că ecuaţia diferenţială $\mathcal{L}[y] = 0$ ar admite o soluţie neidentic nulă $y(x)$, care în intervalul $[a, a + h_0)$ ar avea σ_n rădăcini distincte, fie ε un număr pozitiv suficient de mic, astfel încît intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ să conţină toate cele σ_n rădăcini în chestiune ale soluţiei $y(x)$. Se stabileşte ca în cazul teoremei 1, relaţiile (29)—(32). În continuare, considerăm funcţia $L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1[y(x)]$. Întrucît prin ipoteză $y(x)$ are σ_n rădăcini în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$ şi întrucît operatorul-produs $L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1$ are proprietatea $I^*_{\tau_1}[a, b)$, deci şi $I^*_{\tau_1}[a, a + h_0 - \varepsilon]$, unde $\tau_1 = \sigma_n - k_n$, rezultă în baza teoremei C că funcţia $L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1[y(x)]$ are cel puţin $\sigma_n - \tau_1 = k_n$ rădăcini distincte în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$. Vom nota aceste rădăcini cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_n}$. Fie L_n^{-1} operatorul invers lui L_n, corespunzător condiţiilor polilocale (54) în care se consideră $x_1 = \xi_1, \ldots, x_{k_n} = \xi_{k_n}$. Atunci are loc pentru orice $x \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$ următoarea identitate care de altfel rezultă din (55):

$$L_n^{-1}\{L_n L_{n-1} \ldots L_2L_1[y(x)]\} = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2L_1[y(x)]. \tag{55'}$$

Într-adevăr, să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul k_n

$$L_n[Y] = L_nL_{n-1} \ldots L_2L_1[y(x)], \tag{61}$$

în care Y reprezintă funcţia necunoscută, iar membrul al doilea se consideră ca funcţie dată de variabilă x. Să considerăm de asemenea condiţiile polilocale

$$Y(\xi_1) = Y(\xi_2) = \ldots = Y(\xi_{k_n}) = 0, \tag{62}$$

unde $\xi_1 < \ldots < \xi_{k_n}$ reprezintă rădăcini distincte ale funcției $L_{n-1}L_{n-2} \ldots$ $\ldots L_2 L_1[y(x)]$ din intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$. În baza proprietății $I^*_{k_n}[a, b)$ a operatorului L_n, rezultă că ecuația diferențială (61) admite o soluție unică, care satisface condițiile (62). Se constată din (61) că această soluție este funcția $Y(x) = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2 L_1[y(x)]$. Ținînd seamă de definiția operatorului L_n^{-1} corespunzător lui L_n și condițiilor (62), rezultă identitatea (55′).

Notînd cu $G(x, s; \xi_1, \ldots, \xi_{k_n})$ funcția lui Green corespunzătoare operatorului L_n și condițiilor polilocale (62), identitatea (55′) se transcrie astfel

$$\int_a^{a+h_0-\varepsilon} G(x, s; \xi_1, \ldots, \xi_{k_n}) \{L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y(s)]\} ds \equiv$$

$$\equiv L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_1[y(x)] \tag{55''}$$

și ea este valabilă pentru orice $x \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$.

În continuare, vom aplica ambilor membri ai identității (33) operatorul integral L_n^{-1} definit anterior. Ținînd seamă de (55″), obținem următoarea identitate valabilă pentru orice $x \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$:

$$L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y(x)] \equiv - \int_a^{a+h_0-\varepsilon} G(x, s; \xi_1, \ldots, \xi_{k_n}) A_1(s) L_{n-1} \ldots L_1[y(s)] ds -$$

$$- \ldots - \int_a^{a+h_0-\varepsilon} G(x, s; \xi_1, \ldots, \xi_{k_n}) A_{n-1}(s) L_1[y(s)] ds -$$

$$- \int_a^{a+h_0-\varepsilon} G(x, s; \xi_1, \ldots, \xi_{k_n}) A_n(s) y(s) ds.$$

Luînd valorile absolute ale ambilor membri și ținînd seamă de relațiile (24), precum și de notațiile (57), (58) și (59), obținem inegalitatea

$$|L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y(x)]| \leqq \sup_{x \in [a, a+h_0-\varepsilon]} |L_{n-1} \ldots L_1[y(x)]| A_1 \mathcal{G}(h_0 - \varepsilon) +$$

$$+ G(h_0 - \varepsilon) \Big\{ A_2 \int_a^{a+h_0-\varepsilon} |L_{n-2} \ldots L_1[y(s)]| ds + \ldots + A_{n-1} \int_a^{a+h_0-\varepsilon} |L_1[y(s)]| ds +$$

$$+ A_n \int_a^{a+h_0-\varepsilon} |y(s)| ds \Big\}.$$

Această inegalitate fiind valabilă pentru orice $x \in [a, a + h_0 - \varepsilon]$, va fi valabilă și pentru valoarea lui x care realizează maximul funcției $|L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_2 L_1[y(x)]|$ în intervalul $[a, a + h_0 - \varepsilon]$. Înlocuind în pri-

mul membru din (63) pe x cu acea valoare și procedînd întocmai ca în demonstrația teoremei 1, se ajunge la inegalitatea

$$1 \leqq \mathcal{G}(h_0 - \varepsilon) A_1 + G(h_0 - \varepsilon)[A_2 M(h_0 - \varepsilon; \Pi_{n-1}) + A_3 M(h_0 - \varepsilon; \Pi_{n-2}) +$$

$$+ \ldots + A_{n-1} M(h_0 - \varepsilon; \Pi_2) + A_n M(h_0 - \varepsilon; \Pi_1)],$$

care ne arată că funcția $\mathcal{F}^*(h)$ din (60) verifică inegalitatea

$$\mathcal{F}^*(h_0 - \varepsilon) \geqq 0.$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de egalitățile $\lim\limits_{h \to 0^+} M(h; \Pi_i) = 0$ $(i=1, \ldots, n-1)$, rezultă tot din (60) inegalitatea

$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{F}^*(h) = -1 < 0.$$

Cum însă funcția $\mathcal{F}^*(h)$ este continuă în intervalul $0 < h < b - a$, rezultă că ecuația $\mathcal{F}^*(h) = 0$ are o rădăcină h_1 satisfăcînd inegalitățile $0 < h_1 <$ $< h_0 - \varepsilon$. Această constatare contrazice modul de alegere a numărului h_0. Astfel, ipoteza că ecuația diferențială $\mathcal{L}[y] = 0$ ar admite o soluție neidentic nulă $y(x)$, care să se anuleze în σ_n puncte distincte situate în intervalul $[a, a + h_0)$, nu poate avea loc și prin aceasta teorema 2 este demonstrată.

Observație. În cazul cînd ecuația (28), respectiv (60), admite efectiv o rădăcină h_0 situată în intervalul $(0, b - a)$, în enunțul teoremelor 1 și 2 se poate aduce precizarea că operatorul $\mathcal{L}$ din (18) are proprietatea $I^*_{\sigma_n}$ relativă și la intervalul *închis* $[a, a + h_0)$. Pentru a justifica această afirmație, este suficient să se observe că numărul ξ care intervine în demonstrația lemei 1 (generalizarea lemei lui De la Vallée Poussin) este *interior* intervalul $[\alpha, \beta]$ etc...

ПРОМЕЖУТКИ НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $\mathcal{L}_N[y] = 0$ линейное и однородное дифференциальное уравнение порядка N с непрерывными коэффициентами на промежутке $[a, b)$. Предполагаем, что это уравнение можно написать в виде

$$\mathcal{L}_N[y] \equiv L_n L_{n-1} \ldots L_1[y] + A_1(x) L_{n-1} \ldots L_1[y] + \ldots +$$

$$+ A_{n-1}(x) L_1[y] + A_n(x) y = 0, \tag{I}$$

где $L_1, L_2, \ldots, L_n$ линейные и однородные дифференциальные операторы, нормального вида, соответственно порядков $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$(k_1 + k_2 + \ldots + k_n = N)$ и коэффициенты которых являются функциями дифференцируемыми на промежутке $[a, b)$ достаточно большого числа раз, так чтобы символические произведения, фигурирующие в (I) имели смысл на $[a, b)$. Предполагается также, что операторы $L_1, \ldots L_n$ обладают соответственно свойствами неколеблемости $I^*_{k_1}[a, b), \ldots, I^*_{k_n}[a, b)$ (говорим что линейный и однородный дифференциальный оператор L_m нормального вида и порядка m обладает свойством неколеблемости $I^*_m[a, b)$, если соответствующее дифференциальное уравнение $L_m[y] = 0$ не имеет ни одного решения нетождественно рпвного нулю решения, которое анулировалось бы более $m - 1$ раз на промежутке $[a, b)$. причём m является порядком соответствующего дифференциального оператора); предполагаем ещё что функции $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, фигурирующие в (I), непрерывны на $[a, b)$. При этих условиях, в настоящем труде устанавливается следующая теорема неколеблемости относительно решений дифференциального уравнения (I).

ТЕОРЕМА 2. *При вышеуказанных условиях, дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N$ из* (I) *обладает свойством неколеблемости $I^*_N[a, a + h_0)$, причём число h_0 представляет собой корень из промежутка* $(0, b - a)$ (если существует) *следующего уравнения по неизвестному h*:

$$\mathcal{F}^*(h) = G(h)[\lambda_n(h)M_1(h) + \lambda_{n-1}(h)M_2(h) + \ldots + \lambda_2(h)M_{n-1}(h)] + \\ + \lambda_1(h)\,\mathcal{G}(h) - 1 = 0 \quad (0 < h < b - a). \tag{II}$$

Если это уравнение не допускает корня на промежутке $(0, b - a)$ то число h_0 считается равным $b - a$.

Здесь обозначили $\lambda_i(h) = \sup\limits_{x \in [a, a+h]} |A_i(x)|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ а числа $M_i(h) (i = 1, \ldots, n-1)$, $G(h)$ и $\mathcal{G}(h)$ определяются следующим образом:

Пусть h любое число, удовлетворяющее неравенством $0 < h < b - a$ и пусть i одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение.

$$\Pi_i[y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_i[y] = 1 \tag{III}$$

порядка $\tau_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$ и обозначается через $\mathcal{Y}_{\tau_i}$ множество решений этого уравнения, которые обращаются в нуль в τ_i точках (не обязательно различных) промежутка $[a, a + h]$. Обозначаем

$$M_i(h) = \sup_{y(x) \in \mathcal{Y}_{\tau_i}} \int_a^{a+h} |y(x)|\, dx.$$

Далее, функция $G(h)$ определяется следующим образом: Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение $L_n[y] = f(x)$, порядка k_n с многоточенными условиями

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_{k_n}) = 0 \tag{IV}$$

где узлы $x_1, \ldots, x_{k_n}$ принадлежат промежутку $[a, a + h]$. Известно, что искомое решение, при предположении что L_n обладает свойством $I^*_{k_n}[a, b)$, допускает представления вида

$$y(x) = \int_a^{a+h} G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})\, f(s)\, ds,$$

где $G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})$ функция Грина, соответствующая оператору L_n и многоточечным условиям (IV). Считаем по определению

$$G(h) = \sup_{x, s, x_1, \ldots, x_{k_n} \in [a, a+h]} |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})|,$$

$$\mathcal{G}(h) = \sup_{x, x_1, x_2, \ldots, x_{k_n} \in [a, a+h]} \int_a^{a+h} |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})|\, ds.$$

В настоящем труде показывается что каким ни был бы показатель $i = 1, 2, \ldots, n-1$, функции $M_i(h)$, $G(h)$ и $\mathcal{G}(h)$ являются непрерывными и восрастающими функциями переменной h на промежутке $(0, b - a)$. При этих уточнениях показывается, что уравнение (II) по неизвестному h может иметь не более одного корня в промежутке $(0, b - a)$.

Для частного случая, когда $k = 1$ и когда $L_n = \dfrac{d}{dx}$ устанавливается теорема 1, содержащая как частный случай теорему Вале Пусэна [11].

INTERVALLES DE NON OSCILLATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Soit $\mathcal{L}_N[y] = 0$ une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre N, ayant les coefficients continus dans un intervalle $[a, b)$. Nous supposons que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}_N[y] = L_nL_{n-1} \ldots L_1[y] + A_1(x)L_{n-1} \ldots L_1[y] + \ldots + \\ + A_{n-1}(x)L_1[y] + A_n(x)y = 0, \tag{I}$$

où $L_1, L_2, \ldots, L_n$ représentent des opérateurs différentiels linéaires et homogènes, de forme normale, d'ordres respectivement $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k_1 + k_2 \ldots + k_n = N)$ et dont les coefficients sont des fonctions dérivables dans l'intervalle $[a, b)$ d'un nombre suffisant de fois, tel que les produits symboliques qui figurent dans (I) aient du sens dans $[a, b)$. Supposons aussi

que les opérateurs $L_1, \ldots, L_n$ ont respectivement les propriétés de non oscillation $I_{k_1}[a, b), \ldots, I_{k_n}[a, b)$ (on dit qu'un opérateur différentiel linéaire et homogène L_m, de forme normale et d'ordre m, possède la propriété de non oscillation $I_m[a, b)$, si l'équation différentielle correspondante $L_m[y] = 0$ n'a aucune solution non identiquement nulle qui s'annule plus de $m - 1$ fois dans l'intervalle $[a, b)$, m représentant l'ordre de l'opérateur différentiel respectif) ; nous supposons aussi que les fonctions $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ qui interviennent dans (I) sont continues dans $[a, b)$. Dans ces hypothèses, on établit dans le présent travail le théorème suivant de non oscillation, relatif aux intégrales de l'équation différentielle (I) :

THÉORÈME 2. *Dans les conditions ci-dessus, l'opérateur différentiel* $\mathcal{L}_N$ *de* (I) *possède la propriété de non oscillation* $I_N^*[a, a + h_0)$, *le nombre* h_0 *représentant la racine positive dans l'intervalle* $(0, b - a)$ (*si elle existe*) *de l'équation suivante dans l'inconnue* h :

$$\mathcal{F}^*(h) = G(h)[\lambda_n(h)M_1(h) + \lambda_{n-1}(h)M_2(h) + \ldots \lambda_2(h)M_{n-1}(h)] + \\ + \lambda_1(h)\mathcal{G}(h) - 1 = 0 \quad (0 < h < b - a). \tag{II}$$

Si cette équation n'a pas de racine dans l'intervalle $(0, b - a)$, *alors le nombre* h_0 *est considéré égal à* $b - a$.

Ici nous avons noté par $\lambda_i(h) = \sup\limits_{x \in [a, a+h]} |A_i(x)|$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$, et les nombres $M_i(h)$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$, $G(h)$ et $\mathcal{G}(h)$ sont définis comme suit :

Soit h un nombre quelconque, satisfaisant les inégalités $0 < h < b - a$ et soit i un des nombres $1, 2, \ldots, n - 1$. On considère l'équation différentielle non homogène

$$\Pi_i[y] = L_{n-1}L_{n-2} \ldots L_i[y] = 1 \tag{III}$$

d'ordre $\tau_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_{n-1}$ et on note par $\mathcal{Y}_{\tau_i}$ l'ensemble des solutions de cette équation qui s'annulent dans τ_i points (pas forcément distincts) de l'intervalle $[a, a + h)$. On definit

$$M_i(h) = \sup_{y(x) \in \mathcal{Y}_{\tau_i}} \int_a^{a+h} |y(x)| dx.$$

Ensuite on définit la fonction $G(h)$ de la façon suivante : Soit l'équation différentielle linéaire, non homogène $L_n[y] = f(x)$, d'ordre k_n, aux conditions polylocales

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_{k_n}) = 0, \tag{IV}$$

où les noeuds $x_1, \ldots, x_{k_n}$ appartiennent à l'intervalle $[a, a + h]$. On sait que la solution cherchée admet, dans l'hypothèse que L_n possède la propriété $I_{k_n}^*[a, b)$, une représentation de la forme

$$y(x) = \int_a^{a+h} G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n}) f(s)\, ds,$$

où $G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})$ représente la fonction de Green correspondante à l'opérateur L_n et aux conditions polylocales (IV). On considère par définition

$$G(h) = \sup_{x, s, x_1, \ldots, x_{k_n} \in [a, a+h]} |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})|$$

$$\mathcal{G}(h) = \sup_{x, x_1, \ldots, x_{k_n} \in [a, a+h]} \int_a^{a+h} |G(x, s; x_1, \ldots, x_{k_n})|\, ds.$$

On montre dans ce travail que, quel que soit l'indice $i = 1, 2, \ldots, n-1$, les fonctions $M_i(h)$, $G(h)$ et $\mathcal{G}(h)$ sont des fonctions continues et croissantes de la variable h dans l'intervalle $(0, b - a)$. C'est par ces précisions que l'on montre que l'équation (II) dans l'inconnue h ne peut avoir qu'une racine au plus dans l'intervalle $(0, b - a)$.

Pour le cas particulier où $k_n = 1$ et où $L_n = \frac{d}{dx}$, on établit le théorème 1 qui contient comme un cas particulier le théorème de De la Vallée Poussin [11].

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuații diferențiale liniare.* Studii și cercetări de matematică (Cluj), X, 207–257 (1959).
2. — *Sur un théorème de W. A. Markov.* Mathematica, **3** (**26**), 197–216 (1961) ; idem în limba romînă în Studii și cercet. de matem. (Cluj), XII, (1962).
3. Foias C., Gussi G., Poenaru V., *Despre problema polilocală la ecuații diferențiale lineare de ordinul al doilea.* Bul. științ. — Acad. R.P.R. Secț. de științe matem. și fiz., VII, 699–721 (1955).
4. — *Observații asupra problemei polilocale la ecuația* $y'' + g(x)y = 0$. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XII, 53–58 (1961).
5. Hartman Ph. and Wintner A., *On an oscillation criterion of de la Vallée Poussin.* Quarterly of Applied Mathematics, **13**, *3*, 330–332 (1955).
6. Левин А. Ю., *О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи.* Доклады Акад. Наук СССР, **136**, № *5*, 1022—1025 (1961).
7. — *О некоторых оценках дифференцируемой функции.* Доклады Акад. Наук СССР, **318**, № *1*, 37—38 (1961).
8. НаймаркМ. А., *Линейные дифференциальные операторы.* Москва, 1954.
9. Opial Z., *Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'equation différentielle linéaire du second ordre.* Annales Polonici Mathem., VI, *1*, 87–91 (1959).
10. Pólya G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation.* Amer. Math. S. Bull. **24**, 312–324 (1922).
11. Vallée Poussin Ch. J. (de la), *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de math. pur et appl. (*9*), *8*, 125–144 (1929).
12. Sansone G., *Equazioni differenziali nel campo reale* (parte prima). Bologna, 1948.
13. Zaidman S., *Evaluări ale distanței între zerourile soluțiilor ecuațiilor diferențiale* Revista Univ. C. I. Parhon și a Politehnicei București, nr. *6–7*, 47–54 (1955).

Primit la 15. I. 1962.