

Se consideră ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n cu coeficienți constanți reali, de ordinul n , $E(y) = 0$, al cărei polinom caracteristic să aibă toate rădăcinile distincte, dintre care cel puțin două complexe. Folosind o transformare reală de forma $x = \mu t + \nu$, $y = e^{\lambda t} z(t)$, ecuația $E(y) = 0$ se poate transforma după cum s-a arătat în [1], într-o ecuație de același tip $E^*(z) = 0$, al cărei polinom caracteristic să aibă rădăcini complexe numerele $+i$ și $-i$.

În acest scop, presupunând că numerele $\alpha + i\beta$ și $\alpha - i\beta$ sînt două rădăcini complexe ($\beta > 0$), ale polinomului caracteristic asociat ecuației $E(y) = 0$, este suficient să luăm $\mu = \beta^{-1}$, $\lambda = \alpha\beta^{-1}$, parametrul ν rămânînd arbitrar.

Reamintim de asemenea din nota [1] că dacă L , respectiv L^* reprezintă lungimile, intervalelor maxime în care integralele generale ale celor

ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI (II)

DE

O. ARAMĂ și D. RIPIANU

În cercetarea de față, care continuă lucrarea [1], se consideră ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul 4 și se încearcă determinarea în funcție de coeficienții ecuației diferențiale, a lungimii L , a intervalului maxim în care mulțimea integralelor ecuației diferențiale considerate, este *interpolatoare de ordinul 4*. Reamintim din [1] că o familie de funcții \mathcal{F} , depinzînd de un număr oarecare n de parametri, este interpolatoare de ordinul k , ($k < n$), într-un interval (α, β) , dacă oricare ar fi nodurile distincte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, situate în intervalul (α, β) și oricare ar fi ordonatele b_1, b_2, \dots, b_k , există o funcție și una singură $f(x) \in \mathcal{F}$, care să satisfacă condițiile $f(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, adică curba de ecuație $y = f(x)$ să treacă prin punctele $M_i(a_i, b_i)$.

§ 1. OBSERVĂRI PRELIMINARE

1°. Considerăm o ecuație diferențială liniară și omogenă cu coeficienți constanți reali, de ordinul 4, $E(y) = 0$, al cărei polinom caracteristic să aibă toate rădăcinile distincte, dintre care cel puțin două complexe. Folosind o transformare reală de forma

$$x = \mu t + \nu; \quad y = e^{\lambda t} z(t) \tag{1}$$

ecuația $E(y) = 0$ se poate transforma după cum s-a arătat în [1], într-o ecuație de același tip $E^*(z) = 0$, al cărei polinom caracteristic să aibă rădăcini complexe numerele $+i$ și $-i$.

În acest scop, presupunînd că numerele $\alpha + i\beta$ și $\alpha - i\beta$ sînt două rădăcini complexe ($\beta > 0$), ale polinomului caracteristic asociat ecuației $E(y) = 0$, este suficient să luăm $\mu = \beta^{-1}$, $\lambda = \alpha\beta^{-1}$, parametrul ν rămânînd arbitrar.

Reamintim de asemenea din nota [1] că dacă L , respectiv L^* reprezintă lungimile, intervalelor maxime în care integralele generale ale celor

două ecuații $E(y)=0$, resp. $E^*(z)=0$ sînt interpolatoare de ordinul 4, atunci are loc relația

$$L = \frac{L^*}{\beta}, (\beta > 0).$$

În cele ce urmează, fără a restrînge generalitatea problemei, se va putea presupune așadar că două din rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic asociat ecuației $E(y)=0$ sînt $+i$ și $-i$.

2°. Metoda pe care o vom folosi în cele ce urmează se bazează pe următoarea observație, care de altfel este utilizată în demonstrația teoremei de existență și de unicitate a lui de la Vallée-Poussin referitoare la ecuații diferențiale liniare, dată în [2] și [3]:

Condiția necesară și suficientă ca integrala generală a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul n să fie interpolatoare de ordinul n într-un interval I , este ca orice integrală particulară nenulă a acelei ecuații să aibă în acest interval cel mult $n-1$ rădăcini distincte.

Din această observație rezultă ca o consecință că numărul L este egal cu marginea inferioară a diferențelor $x_4 - x_1$, unde numerele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ reprezintă 4 rădăcini consecutive ale unei integrale oarecare netriviiale a ecuației $E(y)=0$, marginea inferioară luîndu-se pe mulțimea tuturor astfel de grupe ce se obțin considerînd toate integralele particulare ale ecuației diferențiale date. Metoda de lucru pe care o vom folosi în vederea determinării numărului L se bazează pe această consecință.

În ceea ce privește problema pe care intenționăm s-o rezolvăm, este suficient să luăm marginea inferioară a diferențelor $x_4 - x_1$ relativ la submulțimea grupelor (x_1, x_2, x_3, x_4) ce se obțin considerînd numai integralele netriviiale care se anulează pentru o anumită valoare a lui x , aleasă de altfel arbitrar, de exemplu pentru $x=0$, fiecare grupă (x_1, x_2, x_3, x_4) începînd cu rădăcina $x_1=0$.

Într-adevăr, fără a se face vreo particularizare, putem considera întotdeauna prima rădăcină $x_1=0$. Aceasta rezultă îndată din faptul că dacă $y(x)$ este o integrală particulară a ecuației considerate, pentru care $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ constituie 4 rădăcini consecutive, atunci și $y^*(x) = y(x - x_1)$ va fi de asemenea o integrală particulară a aceleiași ecuații, pentru care numerele $0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1$ constituie 4 rădăcini consecutive; în plus, distanța dintre prima rădăcină și a patra rămîne neschimbată.

O altă observare se referă la caracterul de a fi deschis sau închis al intervalului maxim în care integrala generală a ecuației diferențiale considerate este interpolatoare — aceasta după cum marginea inferioară care definește numărul L , este sau nu atinsă. Într-adevăr, dacă marginea inferioară L este atinsă, atunci există o integrală particulară care are 4 rădăcini consecutive $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, astfel ca $x_4 - x_1 = L$. Rezultă de aici că intervalul maxim admisibil, cu centrul într-un punct oarecare x_0 , trebuie considerat deschis în cel puțin o extremitate a sa. Dacă marginea inferioară nu este atinsă pe mulțimea integralelor particulare, înseamnă că pentru orice integrală particulară distanța dintre 4 rădăcini consecutive este mai

mare ca L și deci că intervalul maxim admisibil cu centrul într-un punct oarecare x_0 , poate fi luat închis în ambele capete ale sale.

3°. Determinarea numărului L se va face deosebind diverse cazuri și subcazuri pe care le impune metoda de lucru adoptată.

În această parte a lucrării se studiază cazul cînd polinomul caracteristic are două rădăcini reale și două complexe. În acest caz se va lua pentru integrala generală forma

$$y(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha) \quad (2)$$

unde a, b sînt rădăcinile reale presupuse distincte ale polinomului caracteristic, iar A, B, R, α reprezintă patru constante arbitrare. În cele ce urmează vom presupune întotdeauna că $a > b$, ceea ce în ipoteza adoptată se poate întotdeauna realiza printr-o notație adecvată.

Pentru ilustrarea detaliată a metodei de cercetare, ne vom mărgini să considerăm subcazul $ab > 1$, rămînd ca la sfîrșitul lucrării să dăm unele indicații asupra posibilității extinderii acestei metode de cercetare la alte subcazuri.

Observăm de la început că din ipoteza $ab > 1$ rezultă că parametrii a și b sînt de același semn. În ceea ce privește problema propusă, putem să presupunem că a și b sînt numere pozitive, căci în caz contrar, efectuînd schimbarea de variabilă independentă $x = -\xi$, vom obține tot o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, al cărei polinom caracteristic va avea ca rădăcini numerele $-a, -b, -i, +i$ și pentru care numărul L va rămîne același ca la ecuația diferențială inițială (a se vedea [1]).

Vom presupune deci în cele ce urmează că parametrii a și b satisfac inegalitățile

$$ab > 1 \quad \text{și} \quad a > b > 0. \quad (3)$$

Rezultatele ce vor fi stabilite în paragrafele următoare se vor referi de regulă la acest subcaz.

§ 2. CÎTEVA PROPRIETĂȚI GEOMETRICE ALE INTEGRALELOR

Să considerăm integrala generală (2). Aceasta se prezintă ca diferența funcțiilor

$$\begin{aligned} Y(x) &= Ae^{ax} + Be^{bx} \\ Z(x) &= R \sin(x - \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Rădăcinile unei integrale particulare de forma (2) sînt abscisele punctelor de intersecție ale curbilor de ecuație $y = Y(x)$ și $y = Z(x)$.

Curbele de ecuație $y = Z(x)$, care se vor numi pentru prescurtare cu (Z) , sînt sinusoidale de perioadă 2π , de elongație R , și care taie axa Ox în puncte de abscise $x = \alpha + k\pi$ (k fiind întreg).

Curba de ecuație $y = Y(x)$, care se va nota cu (Y) , are diferite forme ce depind de valorile pe care le iau parametrii A și B . Se deosebesc din acest punct de vedere următoarele cazuri:

- 1°. $A > 0, B = 0$ 5°. $A < 0, B = 0$
 2°. $A = 0, B > 0$ 6°. $A = 0, B < 0$
 3°. $A > 0, B > 0$ 7°. $A < 0, B < 0$ (5)
 4°. $A > 0, B < 0$ 8°. $A < 0, B > 0$
 9°. $A = 0, B = 0$.

Observăm însă că curbele $(Z_\alpha), (Y_{A,B})$ de ecuații $y = R \sin(x - \alpha)$, respectiv $y = Ae^{ax} + Be^{bx}$, sînt respectiv simetrice în raport cu axa Ox ale curbelor $(Z_{\alpha-\pi}), (Y_{-A,-B})$ de ecuații $y = R \sin[x - (\alpha - \pi)]$, respectiv $y = -Ae^{ax} - Be^{bx}$. De aici rezultă că din punct de vedere al problemei ce se studiază, cazurile 5° - 8° revin respectiv la cazurile 1° - 4°.

Este deci suficient de a considera doar cazurile 1° - 4° și 9°. De această observație se va ține seamă în cele ce urmează. Presupunînd că $ab \neq 0$, în cazurile 1°, 2°, 3° din (5), curba (Y) are forma indicată în fig. 1. În al patrulea caz, curba (Y) intersectează o dată axa Ox în punctul de abscisă

$$\delta = \frac{1}{a-b} \log\left(-\frac{B}{A}\right), \quad (6)$$

admite un punct de minim de abscisă

$$\beta = \frac{1}{a-b} \log\left(-\frac{bB}{aA}\right) \quad (7)$$

și un punct de inflexiune de abscisă

$$\lambda = \frac{1}{a-b} \log\left(-\frac{b^2B}{a^2A}\right). \quad (8)$$

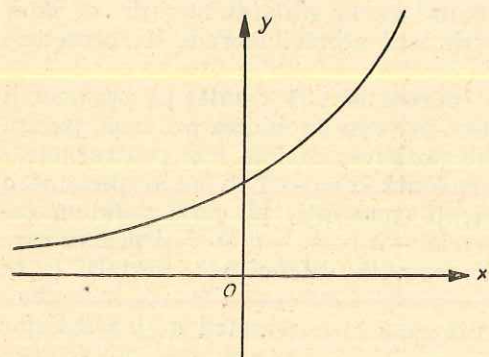


Fig. 1

Se vede îndată că

$$\lambda < \beta < \delta.$$

Forma curbei (Y) este indicată în figura 2.

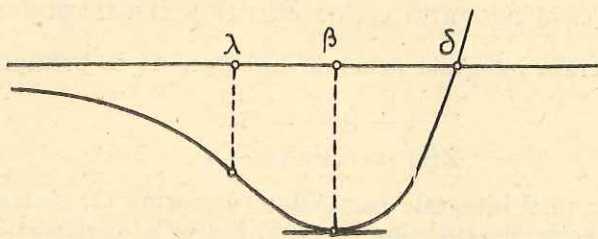


Fig. 2

* * *

Considerăm acum mulțimea integralelor particulare $y = f(x)$, reprezentate prin formula (2). Această mulțime o notăm cu $\{f\}$.

Lema 1. În ipoteza (3) ecuația $E(y) = 0$ admite o infinitate de curbe integrale tangente la axa Ox în câte un punct dat x_0 , care poate fi de altfel ales după voie. Aceste integrale au forma

$$y(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha)$$

unde parametrii A și B pot lua orice valori reale, iar R și α se determină în funcție de primii precum urmează:

$$R = e^{bx_0} [A^2(1+a^2)e^{2(a-b)x_0} + 2AB(1+ab)e^{(a-b)x_0} + B^2(1+b^2)]^{1/2}. \quad (9)$$

În cazul $A > 0, B < 0$, se poate considera

$$\alpha = \begin{cases} x_0 + \pi - \operatorname{arctg} \frac{Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}}{aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}} & \text{dacă } x_0 < \beta \\ x_0 - \operatorname{arctg} \frac{Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}}{aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}} & \text{dacă } x_0 > \beta \\ x_0 + \frac{\pi}{2} & \text{dacă } x_0 = \beta. \end{cases} \quad (10)$$

În cazul $AB > 0$ se poate lua

$$\alpha = x_0 + \varepsilon\pi - \operatorname{arctg} \frac{Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}}{aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}} \quad (11)$$

unde ε ia valoarea 0 sau 1 după cum A și B sînt ambii pozitivi sau ambii negativi.

Demonstrație. Condițiile de tangență cu axa Ox în punctul x_0 vor fi $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, adică

$$\begin{cases} Ae^{ax_0} + Be^{bx_0} = R \sin(x_0 - \alpha) \\ aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0} = R \cos(x_0 - \alpha). \end{cases} \quad (12)$$

Ridicînd membru cu membru la patrat și adunînd, obținem expresia lui R dată în (9).

Apoi împărțind membru cu membru, prima egalitate cu a doua, obținem

$$\operatorname{tg}(x_0 - \alpha) = \frac{Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}}{aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}} = \frac{Y(x_0)}{Y'(x_0)}. \quad (13)$$

Pentru a vedea în ce cadran se află $x_0 - \alpha$, studiem semnul expresiilor $\sin(x_0 - \alpha) = \frac{Y(x_0)}{R}$ și $\cos(x_0 - \alpha) = \frac{Y'(x_0)}{R}$, deduse din (12), precum și semnul expresiei $\operatorname{tg}(x_0 - \alpha) = \frac{Y(x_0)}{Y'(x_0)}$ din (13).

Discuția o facem în raport cu poziția punctului x_0 de tangență. Presupunem întii că $A > 0, B < 0$. Obținem tabloul:

| | | | | |
|--|-----------|-----------|----------|-------------|
| x_0 | $-\infty$ | β | δ | $+\infty$ |
| $\sin(x_0 - \alpha)$ | ----- | | | 0 + + + + + |
| $\cos(x_0 - \alpha)$ | ----- | | | 0 + + + + + |
| $\operatorname{tg}(x_0 - \alpha) = \frac{Y(x_0)}{Y'(x_0)}$ | + | + | + | + |
| | $+\infty$ | $-\infty$ | ----- | 0 + + + + + |

Din acest tablou rezultă că se poate lua

$$x_0 - \alpha = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arctg} \frac{Y(x_0)}{Y'(x_0)} & \text{dacă } x_0 < \beta \\ \operatorname{arctg} \frac{Y(x_0)}{Y'(x_0)} & \text{dacă } x_0 > \beta \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacă } x_0 = \beta \end{cases}$$

De aici se obține (10).

Observăm că funcția $\alpha(x_0)$ astfel definită este continuă în raport cu x_0 pe toată axa. Cele spuse mai sus au loc oricare ar fi valorile pe care le-am dat parametrilor A și B , cu condiția $A > 0, B < 0$ (cazul 4° din (5)).

În cazul cînd unul din parametrii A sau B este nul, celălalt fiind diferit de zero, lema se păstrează cu singura modificare că formulele (10) iau o formă mai simplă. De exemplu dacă $B = 0$ și $A > 0$, atunci vom avea

$$x_0 - \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}. \tag{14}$$

Dacă însă $A = 0$ și $B > 0$, atunci vom avea

$$x_0 - \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{b}. \tag{15}$$

În cazul $A = 0$ și $B = 0$, se deduce din (9) că $R = 0$ și deci curba integrală se reduce la axa Ox .

În cele ce urmează, o integrală particulară corespunzătoare unei curbe integrale tangente la axa Ox o vom nota cu $f^*(x)$, iar submulțimea acestor integrale cu $\{f^*\}$.

Este de remarcat că familia $\{f^*\}$ depinde de trei parametri: A, B și x_0 , care pot fi luați după voie în virtutea formulelor (9) și (10).

Dar întrucît expresia (9), care dă valoarea lui R , este omogenă în A și B avînd gradul de omogenitate 1, rezultă că și expresia care dă forma generală a integralei $f^*(x)$ este omogenă de grad 1 în A și B . Din această cauză, numai unul dintre parametrii A și B joacă un rol esențial în teoria pe care o expunem.

Într-o formulare echivalentă, această lemă se poate enunța astfel:

Dîndu-se o curbă (Y) de ecuație $y = Ae^{ax} + Be^{bx}$, ce corespunde unor valori ale parametrilor A și B alese după voie, există o singură curbă (Z) de ecuație $y = R \sin(x - \alpha)$, tangentă la (Y) într-un punct de abscisă x_0

ales arbitrar pe curba (Y) . Valorile parametrilor R și α din ecuația curbei (Z) sînt definite de formulele (9) și (10).

Lema 2. *In cazul $ab > 1$, orice curbă integrală a ecuației $E(y) = 0$, curbă care nu se reduce la axa Ox , nu poate avea două puncte distincte de tangență cu axa Ox .*

Demonstrație. Vom da demonstrația acestei leme în următoarea formulare echivalentă:

Curbele (Y) și (Z) nu pot fi tangente în două puncte distincte. Pentru a demonstra această afirmație, să presupunem prin absurd că curbele (Y) și (Z) ar fi tangente în două puncte distincte de abscise respectiv x_0 și $x_0 + \varphi$ (unde presupunem $\varphi > 0$). Referindu-ne la formula (2), am avea relațiile

$$\begin{cases} f^*(x_0 + \varphi) = Ae^{a(x_0 + \varphi)} + Be^{b(x_0 + \varphi)} - R \sin(x_0 + \varphi - \alpha) = 0 \\ f^{*\prime}(x_0 + \varphi) = aAe^{a(x_0 + \varphi)} + bBe^{b(x_0 + \varphi)} - R \cos(x_0 - \alpha + \varphi) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Din a doua relație (16) și din relațiile (12) se deduce

$$-\frac{A}{B} e^{(a-b)x_0} = \frac{be^{b\varphi} - b \cos \varphi + \sin \varphi}{ae^{a\varphi} - a \cos \varphi + \sin \varphi}. \tag{17}$$

Din prima relație (16) și din relațiile (12) se deduce:

$$-\frac{A}{B} e^{(a-b)x_0} = \frac{e^{b\varphi} - b \sin \varphi - \cos \varphi}{a^{a\varphi} - a \sin \varphi - \cos \varphi}. \tag{18}$$

Din (17) și din (18) se deduce

$$\frac{e^{b\varphi} - b \sin \varphi - \cos \varphi}{e^{a\varphi} - a \sin \varphi - \cos \varphi} = \frac{be^{b\varphi} - b \cos \varphi + \sin \varphi}{ae^{a\varphi} - a \cos \varphi + \sin \varphi}, \tag{19}$$

relație care se mai poate scrie

$$F(\varphi) = (a-b)[1 + e^{(a+b)\varphi}] - (1+ab)(e^{a\varphi} - e^{b\varphi}) \sin \varphi - (a-b)(e^{a\varphi} + e^{b\varphi}) \cos \varphi = 0. \tag{20}$$

Din relația (20) se deduce printr-o simplă derivare

$$G(\varphi) = e^{-(a+b)\varphi} F'(\varphi) = a^2 - b^2 + [-b(1+a^2)e^{-b\varphi} + a(1+b^2)e^{-a\varphi}] \sin \varphi + [-(1+a^2)e^{-b\varphi} + (1+b^2)e^{-a\varphi}] \cos \varphi \tag{21}$$

asa că

$$G'(\varphi) = (1+a^2)(1+b^2)(e^{-b\varphi} - e^{-a\varphi}) \sin \varphi. \tag{22}$$

De aici se vede că minimele funcției $G(\varphi)$ au loc pentru

$$\varphi = 2k\pi, \quad (k \text{ întreg}) \tag{23}$$

cînd $G(\varphi)$ ia forma

$$H(\varphi) = a^2 - b^2 + (1+b^2)e^{-a\varphi} - (1+a^2)e^{-b\varphi}. \tag{24}$$

Așadar

$$H'(\varphi) = b(1+a^2)e^{-b\varphi} - a(1+b^2)e^{-a\varphi} > 0, \quad \text{pentru } \varphi \geq 0 \tag{25}$$

fiindcă

$$H'(\varphi) = 0 \text{ pentru } \varphi = \bar{\varphi} = \frac{1}{a-b} \log \frac{a(1+b^2)}{b(1+a^2)} < 0$$

în ipoteza $ab > 1$. Cum $H(0) = 0$, are loc deci inegalitatea

$$H(\varphi) > 0 \text{ pentru } \varphi > 0 \quad (26)$$

și deci minimele lui $G(\varphi)$ sînt pozitive. De aici rezultă inegalitatea $G(\varphi) > 0$ și deci inegalitatea

$$F'(\varphi) > 0 \text{ pentru } \varphi > 0. \quad (27)$$

Cum însă

$$F(0) = 0$$

se deduce din (26) și (27) inegalitatea

$$F(\varphi) > 0 \text{ pentru } \varphi > 0.$$

Aceasta ne arată că relația (19) nu poate avea loc pentru $\varphi > 0$, deci curbele (Y) și (Z) nu pot fi tangente în două puncte distincte.

L e m a 3. Ecuția $E(y) = 0$ admite o infinitate de curbe integrale $y = f^{**}(x)$, diferite de axa Ox și tangente la axa Ox , care au în punctul de tangență un contact de ordinul doi cu axa Ox . Ecuția acestor curbe integrale este

$$y = f^{**}(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha)$$

unde

$$R = (a-b) \left(\frac{1+a^2}{1+b^2} \right)^{1/2} |A| e^{a\gamma} \quad (28)$$

$$\alpha = \gamma + \pi - \arctg \frac{a+b}{ab-1} \quad (29)$$

iar γ este punctul de tangență și are valoarea

$$\gamma = \frac{1}{a-b} \log \left[- \frac{(1+b^2)B}{(1+a^2)A} \right]. \quad (30)$$

În forma de mai sus a integralelor $f^{**}(x)$, parametrii A și B rămîn arbitrari cu condiția ca $A > 0$, $B < 0$.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru ca curba integrală de ecuație (2) să aibă cu axa Ox un contact de ordinul doi într-un punct $x = \gamma$, trebuie ca în acel punct să se anuleze $y(x)$ împreună cu primele sale două derivate, adică :

$$\begin{cases} y(\gamma) = Ae^{a\gamma} + Be^{b\gamma} - R \sin(\gamma - \alpha) = 0 \\ y'(\gamma) = aAe^{a\gamma} + bBe^{b\gamma} - R \cos(\gamma - \alpha) = 0 \\ y''(\gamma) = a^2Ae^{a\gamma} + b^2Be^{b\gamma} + R \sin(\gamma - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Pentru a obține abscisa punctului de contact, adunăm membru cu membru prima și a treia ecuație din (31). Obținem

$$(1+a^2)Ae^{a\gamma} + (1+b^2)Be^{b\gamma} = 0. \quad (32)$$

Această ecuație admite rădăcina γ , reală, numai dacă $AB < 0$. Rezolvînd această ecuație, obținem pentru γ valoarea dată în (30).

Pentru a determina valorile corespunzătoare ale parametrilor R și α , putem utiliza de exemplu primele două ecuații din (31), sau mai simplu formulele generale (9) și (10) în care însă se va înlocui x_0 cu valoarea lui γ , dată de (30).

Se verifică cu ușurință, tot în ipoteza (3), că au loc inegalitățile

$$\lambda < \gamma < \beta < \delta \quad (33)$$

unde δ , β , λ au respectiv valorile indicate în (6), (7) și (8). Deoarece după cum arată (33), $\gamma < \beta$, rezultă din (10) că pentru calculul valorii parametrului α , în cazul cînd $x_0 = \gamma$, trebuie adoptată formula

$$\alpha = x_0 + \pi - \arctg \frac{Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}}{aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}}$$

în care urmează să se înlocuiască x_0 cu γ . Ținînd seama de valoarea lui γ din (30), obținem :

$$\frac{Ae^{a\gamma} + Be^{b\gamma}}{aAe^{a\gamma} + bBe^{b\gamma}} = \frac{Ae^{(a-b)\gamma} + B}{aAe^{(a-b)\gamma} + bB} = \frac{B - \frac{(1+b^2)}{(1+a^2)}B}{bB - \frac{a(1+b^2)}{(1+a^2)}B} = \frac{a+b}{ab-1}$$

și deci

$$\alpha = \gamma + \pi - \arctg \frac{a+b}{ab-1}$$

adică tocmai (29).

Pentru calculul valorii corespunzătoare a parametrului R utilizăm formula (9), în care însă înlocuim x_0 cu γ . Obținem

$$\begin{aligned} R &= e^{b\gamma} \left\{ A^2(1+a^2) \left[- \frac{B(1+b^2)}{A(1+a^2)} \right]^2 + 2AB(1+ab) \left[- \frac{B(1+b^2)}{A(1+a^2)} \right] + B^2(1+b^2) \right\}^{1/2} = \\ &= e^{b\gamma} |B| (a-b) \left(\frac{1+b^2}{1+a^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Înlocuind în această expresie valoarea lui $e^{b\gamma}$, dedusă din relația (32), obținem egalitatea (28).

Observații. 1) În cazul (3), ecuația curbelor integrale tangente la axa Ox , care în punctul de tangență au cu această axă un contact de ordinul 2, este

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha)$$

unde parametrii A și B sînt oarecari cu condiția $A > 0$, $B < 0$, iar parametrii R și α sînt determinați în funcție de A și B conform formulelor (28), respectiv (29). Spre deosebire de afirmațiile lemei 1, aici punctul de contact γ este determinat de valorile pe care le iau parametrii A și B , conform egalității (30). Rezultă de aici că familia tuturor integralelor $f^{**}(x)$, familie pe care o vom nota pentru prescurtare cu $\{f^{**}\}$, depinde de 2 parametri : A și B , spre deosebire de familia $\{f^*\}$ care depindea de 3 parametri : A , B și x_0 .

2) Într-o formulare echivalentă, lema 3 se poate enunța și astfel: Fiind dată o curbă (Y), ce corespunde unor anumite valori date parametrilor A și B cu condiția A > 0, B < 0, în cazul (3) există o singură curbă (Z), tangentă la (Y) și care în punctul de tangență are cu (Y) un contact de ordinul doi. Abscisa punctului de contact are valoarea dată în (30), iar valorile corespunzătoare ale parametrilor R și α sînt cele date în (28), respectiv (29).

Lema 4. În condițiile simultane ale cazurilor (3) și 4°, (5), orice integrală f*(x) ia valori pozitive și crește cu x pentru x > x₀, dacă x₀ ≥ γ.

Vom da două demonstrații pentru această leamnă.

Demonstrația 1°. Conform formulei (2), integrala f*(x) va fi de forma:

$$f^*(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha) \tag{34}$$

și va satisface condițiile

$$\begin{aligned} f^*(x_0) &= Ae^{ax_0} + Be^{bx_0} - R \sin(x_0 - \alpha) = 0 \\ f^{*'}(x_0) &= aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0} - R \cos(x_0 - \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Ținînd seamă de aceste relații, se obține

$$\begin{aligned} f^{*(2p)}(x_0) &= [a^{2p} + (-1)^{p-1}]Ae^{ax_0} + [b^{2p} + (-1)^{p-1}]Be^{bx_0} \\ f^{*(2p+1)}(x_0) &= a[a^{2p} + (-1)^{p-1}]Ae^{ax_0} + b[b^{2p} + (-1)^{p-1}]Be^{bx_0}. \end{aligned} \tag{36}$$

fiindcă

$$\begin{aligned} f^{*(2p)}(x) &= a^{2p}Ae^{ax} + b^{2p}Be^{bx} - (-1)^p R \sin(x - \alpha) \\ f^{*(2p+1)}(x) &= a^{2p+1}Ae^{ax} + b^{2p+1}Be^{bx} - (-1)^p R \cos(x - \alpha). \end{aligned}$$

Pentru p = 1, obținem

$$f^{*(2)}(x_0) = (1 + a^2)Ae^{ax_0} + (1 + b^2)Be^{bx_0}. \tag{37}$$

Ținînd seamă de această expresie, obținem că f^{*(2)}(x_0) > 0 dacă x_0 > γ = γ₂ și că f^{*(2)}(x_0) < 0, dacă x_0 < γ = γ₂. Mai general, pentru p ≥ 1, obținem inegalitatea f^{*(2p)}(x_0) > 0, valabilă pentru orice x_0 satisfăcînd inegalitatea x_0 > γ_{2p} = \frac{1}{a-b} \log \left[-\frac{B((-1)^{p-1} + b^{2p})}{A((-1)^{p-1} + a^{2p})} \right] în cazul cînd γ_{2p} este real, și valabilă pentru orice x_0 ∈ (-∞, +∞) în cazul cînd γ_{2p} este imaginar.

Într-adevăr, în cazul cînd γ_{2p} este real, afirmația este evidentă. Dacă însă γ_{2p} este imaginar, atunci f^{*(2p)}(x_0) este pozitivă pentru orice x_0, deoarece atunci (-1)^{p-1} + b^{2p} < 0.

Dacă γ_{2p} este real, atunci γ_{2p} < γ.

Într-adevăr, această inegalitate se scrie

$$\frac{(-1)^{p-1} + b^{2p}}{(-1)^{p-1} + a^{2p}} < \frac{1 + b^2}{1 + a^2}$$

sau

$$(a^2 - b^2)[a^{2p-2} + \dots + b^{2p-2} + a^2 b^2 (a^{2p-4} + \dots + b^{2p-4}) + (-1)^p] > 0$$

care este evidentă pentru p ≥ 2, așa că pentru x_0 > γ au loc inegalitățile

$$f^{*(2p)}(x_0) > 0.$$

Deasemenea are loc inegalitatea f^{*(2p+1)}(x_0) > 0, pentru orice x_0 satisfăcînd inegalitatea x_0 > γ_{2p+1} = \frac{1}{a-b} \log \left[-\frac{bB((-1)^{p-1} + b^{2p})}{aA((-1)^{p-1} + a^{2p})} \right], cînd γ_{2p+1} este real, și valabilă pentru orice x_0 în cazul cînd γ_{2p+1} este imaginar.

Se observă că numerele γ_{2p+1} și γ_{2p} sînt simultan reale sau simultan imaginare și că în cazul cînd sînt reale are loc inegalitatea γ_{2p+1} < γ_{2p}. De aici rezultă în definitiv că f^{*(2p+1)}(x_0) > 0, pentru orice x_0 > γ = γ₂.

Pentru f^{*(3)}(x_0), (p = 1), proprietatea de mai sus se poate de altfel verifica direct.

Așadar, pentru x_0 > γ, au loc inegalitățile:

$$f^{(n)}(x_0) > 0, \quad (n \geq 2). \tag{38}$$

Se mai observă că oricum s-ar alege valoarea x_0, există un număr n destul de mare astfel încît pentru orice x ≥ x_0 ales arbitrar, să aibă loc inegalitatea:

$$f^{*(n)}(x) > 0. \tag{39}$$

Într-adevăr

$$f^{*(n)}(x) = a^n Ae^{ax} + b^n Be^{bx} - R(x_0) \sin \left[x - \alpha(x_0) + \frac{n\pi}{2} \right].$$

Dacă b ≤ 1, atunci (întrucît a > 1) proprietatea este evidentă. Dacă b > 1, atunci se poate scrie

$$f^{*(n)}(x) = b^n \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^n Ae^{ax} + Be^{bx} - \frac{R(x_0)}{b^n} \sin \left[x - \alpha(x_0) + \frac{n\pi}{2} \right] \right\}$$

și cum a > b > 0, evident că pentru n suficient de mare f^{*(n)}(x) > 0, oricare ar fi x > x_0.

| x | γ | x_0 | +∞ |
|---------------|---|-----|----|
| f^{*(n)} | | + | + |
| f^{*(n-1)}(x) | | ↗ | ↗ |
| | | + | + |
| | | ↗ | ↗ |
| f^{*(2)}(x) | | + | + |
| f^{*'}(x) | 0 | + | + |
| f^*(x) | 0 | + | + |

Cu ajutorul relațiilor (38) și (39) se poate construi tabelul alăturat, din care se deduce lema enunțată.

Dacă x_0 = γ, atunci f^{*(2)}(x_0) = 0, ceea ce evident nu schimbă concluzia lemei.

Demonstrația 2°.

Însemnînd x = x_0 + φ, se obține din (34)

$$F(\varphi) = f^{*(2)}(x) = a^2 Ae^{a(x_0+\varphi)} + b^2 Be^{b(x_0+\varphi)} + R \sin(\varphi + x_0 - \alpha). \tag{40}$$

Înlocuind aici pe R sin(x_0 - α) și R cos(x_0 - α) cu valorile date de (35), avem

$$F(\varphi) = Ae^{ax_0} [a^2 e^{a\varphi} + a \sin \varphi + \cos \varphi - K(b^2 e^{b\varphi} + b \sin \varphi + \cos \varphi)]. \tag{41}$$

$$0 < K = -\frac{B}{A} e^{(b-a)x_0} \leq \frac{1+a^2}{1+b^2} \quad \text{pentru } x_0 \geq \gamma. \tag{42}$$

În cele ce urmează vom arăta că pentru $\varphi > 0$, are loc $F(\varphi) > 0$. Pentru aceasta, arătăm întâi că pentru $\varphi \geq 0$ expresia $a^2 e^{a\varphi} + a \sin \varphi + \cos \varphi$, ce figurează în (41), este pozitivă. Într-adevăr, dacă $a^2 e^{a\varphi} + a \sin \varphi + \cos \varphi = 0$, atunci are loc egalitatea

$$y_1(\varphi) = a \sin \varphi + \cos \varphi = y_2(\varphi) = -a^2 e^{a\varphi}.$$

Însă

$$\max |y_1(\varphi)| = \sqrt{1+a^2} < -y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 e^{\frac{\pi}{2}a}$$

dat fiind că funcția $H(a) = e^{\frac{\pi}{2}a} - \frac{\sqrt{1+a^2}}{a^2}$ crește cu $a > 0$ și că $H(1) > 0$.

Așadar, curbele de ecuații $y=y_1(\varphi)$ și $y=y_2(\varphi)$ nu se taie pentru $\varphi \geq 0$ (fig. 3).

Așadar

$$a^2 e^{a\varphi} + a \sin \varphi + \cos \varphi > 0 \text{ pentru } \varphi \geq 0. \quad (43)$$

Dacă $b^2 e^{b\varphi} + b \sin \varphi + \cos \varphi \leq 0$ pentru $\varphi \geq 0$, atunci rezultă din (43) și din (42) că $F(\varphi) > 0$ pentru $\varphi \geq 0$.

Dacă

$$b^2 e^{b\varphi} + b \sin \varphi + \cos \varphi > 0 \text{ pentru } \varphi \geq 0$$

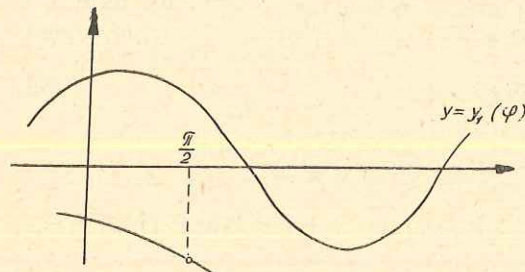


Fig. 3

atunci se obține de aici și din (42)

$$F(\varphi) \geq A e^{ax_0} [a^2 e^{a\varphi} + a \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{1+a^2}{1+b^2} (b^2 e^{b\varphi} + b \sin \varphi + \cos \varphi)] = \frac{A e^{ax_0}}{1+b^2} G(\varphi). \quad (44)$$

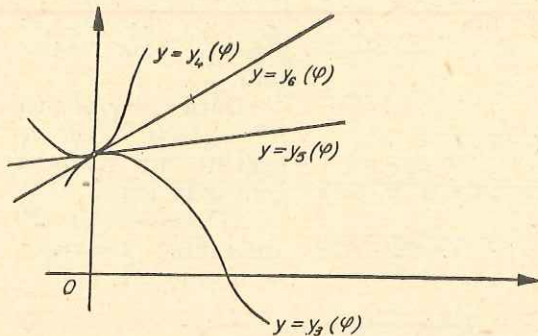


Fig. 4

și

$$y = y_5(\varphi) = a^2 - b^2 + (a-b)(ab-1)\varphi$$

$$y = y_6(\varphi) = a^2 - b^2 + (a-b)(a^2 + ab + b^2 + a^2 b^2)\varphi$$

(fig. 14), iar $y_3''(\varphi) = -y_3(\varphi) < 0$, când $y_3(\varphi) > 0$, apoi $y_4''(\varphi) = a^4(1+b^2)e^{a\varphi} - b^4(1+a^2)e^{b\varphi} > 0$ pentru $\varphi \geq 0$, întrucât are o rădăcină < 0 . Ori evident că

Ori, am avea $G(\varphi) = 0$ când

$$y_3(\varphi) = (a-b)[(ab-1) \sin \varphi + (a+b) \cos \varphi] = y_4(\varphi) = a^2(1+a^2)e^{a\varphi} - b^2(1+a^2)e^{b\varphi}.$$

Se poate ușor observa că curbele de ecuații $y = y_3(\varphi)$ și $y = y_4(\varphi)$ sînt pentru $\varphi > 0$ dedesubtul, respectiv deasupra tangentelor lor, duse în punctul de coordonate $(0, a^2 - b^2)$. Aceste tangente au respectiv ecuațiile

$ab-1 < a^2 + ab + b^2 + a^2 b^2$, așa că curbele de ecuații $y = y_3(\varphi)$ și $y = y_4(\varphi)$ nu se taie și deci în (44) se deduce $G(\varphi) > 0$, deci $F(\varphi) > 0$, pentru $\varphi > 0$.

Avînd dar în (41) pentru orice $\varphi > 0$, $F(\varphi) > 0$, deci în (40) pentru orice $x > x_0$, $f^{*(2)}(x) > 0$, se deduce de aici și din (34) că $f^{*(x)} > 0$ și deci $f^*(x) > 0$, dacă $x < x_0$.

Observare. Într-o formulare echivalentă, lema 4 se poate enunța și astfel:

În condițiile simultane ale cazurilor (3) și 4° din (5), se consideră o curbă (Y) precum și o curbă (Z) tangentă la (Y) într-un punct de abscisă $x_0 \geq \gamma$. În aceste condiții, pentru valori ale lui x mai mari ca x_0 , curba (Y) rămîne situată mereu deasupra curbei (Z), iar distanța dintre punctele M și N de aceeași abscisă x , situate respectiv pe curbele (Y) și (Z), crește cînd x crește de la x_0 la $+\infty$ (fig. 5).

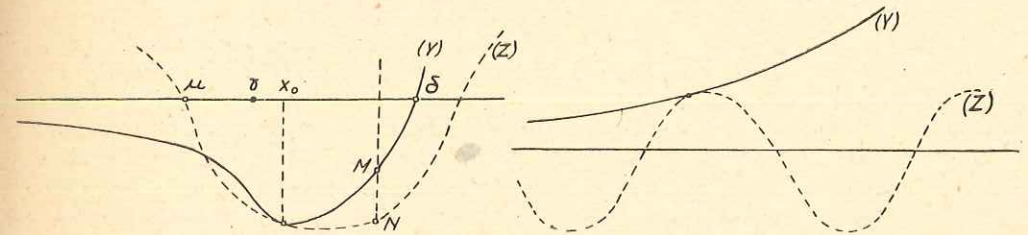


Fig. 5

Fig. 6

Lema 4. În condițiile simultane ale cazului (3) și ale unuia dintre cazurile 1°, 2° sau 3°, (5), orice integrală $f^*(x)$ ia valori pozitive pentru $x > x_0$.

Demonstrația lemei este evidentă pe figura 6, fiindcă avînd $Y''(x) = a^2 A e^{ax} + b^2 B e^{bx} > 0$, curba (Y) se află deasupra tangentelor ei duse în orice punct al ei, iar dacă se duce la (Z) tangenta într-un punct al ei de deasupra axei Ox , de abscisă x_0 , atunci partea lui (Z) de abscise $x < x_0$ se află sub tangenta în chestiune, dacă acea tangentă face cu Ox un unghi ascuțit.

Observare. După cum se vede în fig. 5, în condițiile lemei 4₁ curba (Z), tangentă la o curbă (Y) într-un punct de abscisă x_0 , rămîne situată mereu sub curba (Y) pentru valori ale lui x mai mari ca x_0 .

Lema 5. În condițiile simultane ale cazurilor (3) și 4°, (5), fie $y = f^*(x)$ ecuația unei curbe integrale tangente în punctul de abscise x_0 la axa Ox . Dacă $x_0 < \gamma$ și $x \neq x_0$, atunci în jurul valorii x_0 are loc inegalitatea $f^*(x) < 0$. Dacă $x_0 > \gamma$, în aceleași condiții are loc inegalitatea $f^*(x) > 0$. Dacă $x_0 = \gamma$, atunci pentru valorile lui x destul de apropiate de γ are loc inegalitatea $f^*(x) < 0$, sau $f^*(x) > 0$, după cum $x < \gamma$ sau $x > \gamma$.

Lema este evidentă, fiindcă dacă $x = x_0 + \varphi$, rezultă din (35)

$$f^*(x) = \frac{\varphi^2}{2!} f^{*(2)}(x_0) + \dots$$

așa că pentru φ destul de mic, avem $\text{sg } f(x) = \text{sg } f^{*(2)}(x_0)$, iar de aici și din (37) se deduce partea 1-a a lemei. Dacă $x_0 = \gamma$, rezultă din (37)

$$f^*(x) = \frac{\varphi^3}{3!} f^{*(3)}(\gamma) + \dots$$

și cum din (36) și (30) rezultă $f^{*(3)}(\gamma) = -B(a-b)(1+b^2)e^{b\gamma} > 0$, se deduce că pentru γ destul de mic $\text{sg } f^*(x) = \text{sg } \varphi$, ceea ce dovedește partea a doua a lemei.

Observare. Se deduce din lema că dacă în ipotezele enunțate se înseamnă cu x_0 abscisa punctului de tangență a curbelor (Y) și (Z), atunci în jurul valorii x_0 curba (Y) este deasupra, respectiv dedesubtul curbei (Z) după cum x_0 este mai mare decât γ (fig. 5), respectiv mai mic (fig. 10). Dacă x_0 este egal cu γ (fig. 11), atunci curbele (Y) și (Z) se traversează; pentru valori ale lui x suficient de apropiate de γ , curba (Y) este situată sub curba (Z) pentru abscise x mai mici ca $x=\gamma$, și deasupra curbei (Z) pentru abscise x mai mari decât $x_0=\gamma$.

Lema 6. *În condițiile cazului (3), se consideră o curbă (Y) de ecuație $y=Ae^{ax}+Be^{bx}$, ce corespunde unor valori oarecari ale parametrilor A și B , sufuse la singura restricție de a satisface condițiile cazului 4°, (5). Se mai consideră curba (Z) de ecuație $y=R \sin(x-\alpha)$ tangentă la curba aleasă (Y) într-un punct de abscisă x_0 , care poate fi ales după voie. Presupunând curba (Y) fixă și considerând abscisa x_0 a punctului de tangență variabilă în intervalul $(-\infty, +\infty)$, parametrii R și α din ecuația curbei (Z) vor varia continuu. Parametrul R are un maxim și un minim ce corespund valorilor γ , respectiv β ale variabilei x_0 . Parametrul α prezintă de asemenea un maxim și un minim ce corespund respectiv valorilor $x_0=\gamma$ și $x_0=\beta$.*

Demonstrație. Considerăm expresia lui R^2 , care rezultă din (9):

$$R^2 = A^2(1+a^2)e^{2ax_0} + B^2(1+b^2)e^{2bx_0} + 2AB(1+ab)e^{(a+b)x_0}.$$

Un calcul elementar ne dă

$$\frac{d}{dx_0} R^2 = 2e^{2bx_0} [a(1+a^2)A^2e^{2(a-b)x_0} + (1+ab)(a+b)ABe^{(a-b)x_0} + b(1+b^2)B^2] = 2[(1+a^2)Ae^{ax_0} + (1+b^2)Be^{bx_0}] [aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0}]. \quad (45)$$

Egalând această derivată cu zero, obținem pentru x_0 valorile γ și β .

Tabloul de variație întocmit mai jos justifică afirmațiile lemei privitoare la comportarea funcției $R(x_0)$.

| | | | | |
|------------------------|-----------|------------|---------------|------------|
| x_0 | $-\infty$ | γ | β | $+\infty$ |
| $\frac{d}{dx_0} (R^2)$ | + | + | + | + |
| R^2 | 0 | \nearrow | $R^2(\gamma)$ | \searrow |
| | | | $R^2(\beta)$ | \nearrow |
| | | | | $+\infty$ |

Valoarea $R(\gamma)$ este dată în (28). Un calcul elementar ne dă pentru $R(\gamma)$ valoarea

$$R(\beta) = -\frac{(a-b)B}{a} e^{b\beta}. \quad (47)$$

Considerând acum expresia din (10), care definește funcția $\alpha(x_0)$, se observă cu ușurință că această funcție este continuă în raport cu $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Un calcul elementar ne dă

$$\frac{d\alpha}{dx_0} = \frac{(Ae^{ax_0} + Be^{bx_0}) [(1+a^2)Ae^{ax_0} + (1+b^2)Be^{bx_0}]}{(Ae^{ax_0} + Be^{bx_0})^2 + (aAe^{ax_0} + bBe^{bx_0})^2}. \quad (48)$$

Se vede că $\frac{d\alpha}{dx_0}$ are ca rădăcini numerele γ și δ . Comportarea funcției $\alpha(x_0)$ rezultă din tabloul întocmit mai jos.

| | | | | |
|------------------------|-----------|------------|------------------|------------|
| x_0 | $-\infty$ | γ | δ | $+\infty$ |
| $\frac{d\alpha}{dx_0}$ | + | + | + | + |
| $\alpha(x_0)$ | $-\infty$ | \nearrow | $\alpha(\gamma)$ | \searrow |
| | | | $\alpha(\delta)$ | \nearrow |
| | | | | $+\infty$ |

Pentru a obține valoarea $\alpha(\gamma)$, ținem seama de (10) și de faptul că $\gamma < \beta$. Obținem în urma unui calcul pe care nu-l reproducem:

$$\alpha(\gamma) = \gamma + \pi - \arctg \frac{a+b}{ab-1}. \quad (50)$$

Apoi ținând seamă că $\beta < \delta$, obținem:

$$\alpha(\delta) = \delta. \quad (50_1)$$

* * *

Lemele 1-6, inclusiv, s-au referit la perechi de curbe (Y) și (Z) tangente între ele, stabilind numărul punctelor de tangență, ordinul contactului în punctul de tangență, precum și comportarea celor două curbe între ele atunci când abscisa x_0 a punctului de contact ia diferite valori față de numărul γ . Spre deosebire de presupunerile lemelor 1-6, vom considera acum cazul mai general când parametrii A, B, R și a ce intervin în ecuațiile curbelor (Y) și (Z) iau valori oarecare cu singura restricție $R > 0$, curbele (Y) și (Z) putând să nu fie tangente între ele.

Lema 7, pe care o vom stabili mai jos, se referă la modul în care pot fi repartizate patru puncte consecutive de intersecție ale celor două curbe (Y) și (Z).

În cazul când curbele sînt tangente, pentru a simplifica expunerea nu vom lua în considerare grupările de patru puncte consecutive de intersecție, puncte printre care s-ar afla un punct de tangență (aceasta numai în cadrul lemei 7, ce va fi stabilită mai jos).

În cele ce urmează vom înțelege printr-o „buclă” a curbei (Z) o porțiune din această curbă, cuprinsă între două puncte consecutive de intersecție a ei cu axa Ox și considerată împreună cu aceste puncte. Vom spune că o „buclă” este pozitivă, respectiv negativă, după cum este așezată deasupra axei Ox , respectiv sub axa Ox . Cu aceste definiții și precizări, are loc

Lema 7. În condițiile simultane ale cazurilor (3) și 4°, (5), nici o grupare de patru puncte distincte de intersecție a curbelor (Y) și (Z) în care curbele (Y) și (Z) se traversează reciproc, nu poate figura pe o buclă și nici pe două bucle consecutive ale curbei (Z).

Demonstrație. Într-adevăr, dacă un grup de patru puncte consecutive de intersecție ar figura pe o buclă, s-ar deduce că $L \leq \pi$, ceea ce ar contrazice o teoremă stabilită în [1]. Vom arăta de asemenea că nu există nici o grupare de patru puncte distincte de intersecție a curbelor (Y) și (Z) care să fie situate pe două bucle consecutive. Într-adevăr, întrucât curba (Y) traversează o singură dată axa Ox , trecând din semiplanul inferior în cel superior, rezultă că nici un grup de patru puncte consecutive de intersecție a curbelor (Y) și (Z) nu poate fi situat pe o porțiune din curba (Z), formată din două bucle consecutive, dintre care prima să fie pozitivă și a doua negativă. Mai rămâne deci de considerat cazul când cele patru puncte de intersecție s-ar afla pe o primă buclă negativă și pe consecutiva sa, pozitivă (fig. 7).

Ținând seama de rezultatul stabilit mai sus, anume că pe o buclă nu pot figura mai mult de trei puncte de intersecție, sîntem conduși să distingem următoarele trei cazuri după cum pe bucla negativă s-ar afla situate un punct, două sau trei puncte de intersecție. Aceste cazuri epuizează toate posibilitățile.

Cazul 1. Pe bucla negativă se găsește un singur punct de intersecție M_1 (fig. 7). Evident că acest punct M_1 nu poate să se confunde cu extremitatea din dreapta a buclei negative, căci în caz contrar pe bucla pozitivă ar figura patru puncte distincte de intersecție, ceea ce s-a văzut anterior că nu este posibil.

Afirmăm că la stînga punctului M_1 și într-o vecinătate a acestuia curba

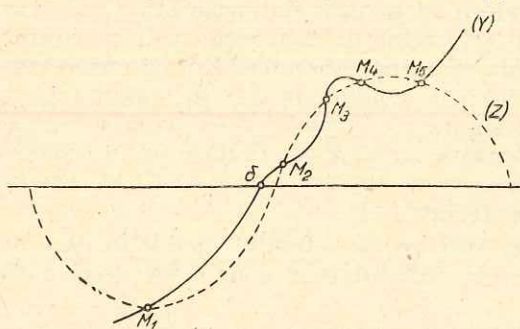


Fig. 7

(Y) trebuie să fie situată sub curba (Z) (fig. 7). Într-adevăr în caz contrar, după cum arată figura 7, s-ar ajunge la una din concluziile absurde că (Y) ar tăia axa Ox în două puncte distincte, sau că pe bucla negativă s-ar afla două puncte de intersecție distincte. Deoarece s-a presupus că pe bucla negativă se află un singur punct de intersecție, rezultă că neapărat celelalte puncte de intersecție care sînt în număr de cel puțin trei, M_2, M_3, M_4 (presupuse consecutive), se găsesc pe bucla pozitivă. Trecînd succesiv prin aceste puncte, curba (Y) se va situa alternativ cînd deasupra, cînd dedesubtul curbei (Z), iar după trecerea prin punctul M_4 , ea va trebui să rămînă dedesubtul curbei (Z), cel puțin într-o vecinătate a punctului M_4 (fig. 7). Dar deoarece funcția $Ae^{ax} + Be^{bx}$ care definește curba (Y) este crescătoare în intervalul $(\delta, +\infty)$, avînd limita $+\infty$ cînd $x \rightarrow +\infty$, rezultă că (Y) trebuie să mai taie bucla pozitivă a curbei (Z) în încă un punct M_5 , distinct de celelalte.

Astfel ajungem la concluzia absurdă că pe bucla pozitivă se află cel puțin 4 puncte distincte de intersecție a curbelor (Y) și (Z), concluzie care nu este posibilă după cum s-a arătat mai sus.

Cazul 2. Pe bucla negativă se găsesc două puncte de intersecție M_1 și M_2 (fig. 8) și încă cel puțin două puncte M_3 și M_4 se găsesc pe bucla pozitivă. Vom presupune că punctele de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 sînt consecutive și au ca abscise respectiv numerele $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Urmînd un raționament analog cu cel din cazul 1, se ajunge la concluzia că în vecinătatea punctului M_1 și la stînga acestuia curba (Y) trebuie să se situeze sub curba (Z). Aceeași situație trebuie să aibă loc la dreapta punctului M_4 , într-o vecinătate suficient de restrînsă a acestuia (fig. 8). Rezultă de aici

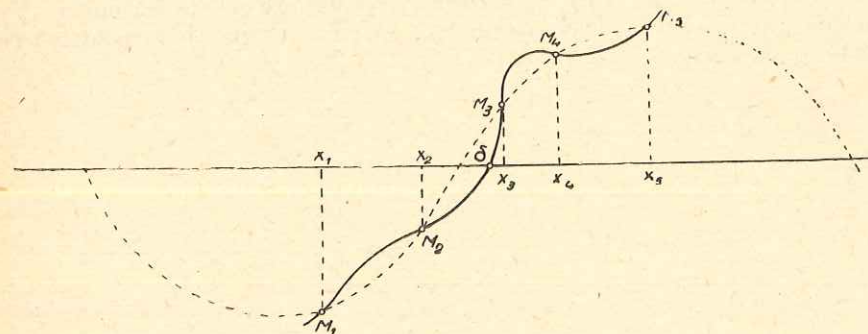


Fig. 8

că (Y) mai taie bucla pozitivă în încă un punct M_5 distinct de celelalte, avînd abscisa $x_5 > x_4$. Vom arăta însă că o astfel de configurație nu este posibilă în condițiile simultane ale cazurilor (3) și 4°, (5). Într-adevăr, să facem ca valoarea parametrului R din ecuația curbei (Z) să crească continuu, tinzînd spre infinit, și lăsînd neschimbată valoarea parametrului α .

Întrucît membrul drept din ecuația curbei (Z) depinde în mod continuu (liniar) de R , rezultă că atunci cînd parametrul R crește continuu curba (Z) se deformează în mod continuu, dilatîndu-se din ce în ce mai mult. În această deformare punctele de intersecție ale curbei (Z) cu axa Ox rămîn fixe și după cum reiese din figura 8, abscisele punctelor $M_1 - M_5$ vor varia în mod continuu precum urmează :

- x_1 nu crește
- x_2 nu descrește
- x_3 nu descrește
- x_4 nu crește
- x_5 nu descrește.

În acest proces continuu, la un moment dat punctele M_3 și M_4 se vor confunda, dînd naștere unui punct de tangentă M_{34} , care va fi situat în mod necesar pe bucla pozitivă (deci de abscisă mai mare ca numărul $\delta > \gamma$) și totodată la stînga noii poziții pe care o va ocupa în acel moment punctul M_5 . O astfel de configurație ar contrazice însă afirmațiile lemelor 4 și 5.

Ne rămîne deci să considerăm ultima posibilitate pe care o prezintă *Cazul 3*. Pe bucla negativă s-ar afla trei puncte de intersecție M_1, M_2, M_3 , distincte, iar cel de-al patrulea punct M_4 s-ar afla pe bucla pozitivă (fig. 9). Se arată cu ușurință că M_4 nu poate să coincidă cu nici una din extremitățile buclei pozitive. Vom presupune că punctele de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 sînt consecutive. Întocmai ca în celelalte două cazuri tratate anterior, se stabilește că la stînga punctului M_1 și într-o vecinătate suficient de mică a acestuia, curba (Y) se află sub curba (Z), și de aici — ținînd seama că M_4 este așezat pe bucla pozitivă, fără să coincidă cu nici una din extremitățile ei — se arată din aproape în aproape că la dreapta punctului M_4 și într-o vecinătate suficient de mică a acestuia curba (Y) se află situată sub curba (Z). De aici rezultă că cele două curbe (Y) și (Z) se mai intersectează într-un punct M_5 , situat tot pe bucla pozitivă considerată și la stînga lui M_4 (fig. 9).

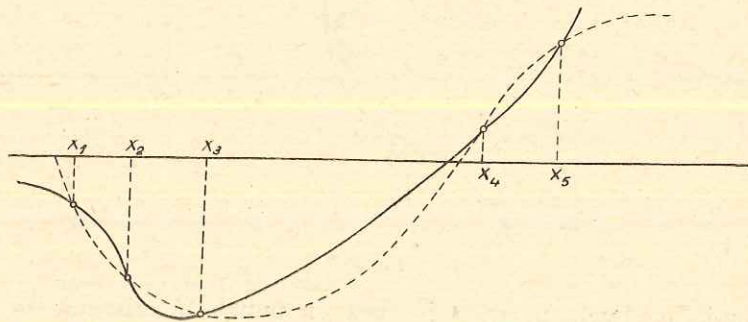


Fig. 9

Vom arăta că o astfel de configurație pe care o prezintă fig. 9, trebuie exclusă. Într-adevăr, utilizînd un raționament analog cu cel de la cazul 2, să facem ca valoarea parametrului R din ecuația curbei (Z) să crească în mod continuu, tinzînd spre $+\infty$. Atunci abscisele x_1, \dots, x_5 ale punctelor M_1-M_5 vor varia continuu, precum urmează:

- x_1 nu crește
- x_2 nu descrește
- x_3 nu crește
- x_4 nu crește
- x_5 nu descrește.

În acest proces continuu, la un moment dat punctele M_2 și M_3 se vor confunda, dînd naștere unui punct de tangență $M_{2,3}$, avînd o poziție cu siguranță diferită de noile poziții pe care le vor lua punctele extreme M_1 și M_5 . În tot acest proces de deformare a curbei (Z), din momentul inițial și pînă în momentul realizării punctului de tangență $M_{2,3}$, punctul M_4 nu va putea traversa axa Ox din poziția sa inițială, căci în caz afirmativ pe bucla negativă ar apare 4 puncte de intersecție. Aceasta nu este posibil, după cum s-a văzut anterior. Din această observație rezultă că în momentul cînd se

va naște punctul de tangență $M_{2,3}$, în vecinătatea acestui punct — mai precis între noile poziții ale punctelor M_1 și M_4 , care vor cuprinde între ele în mod strict $M_{2,3}$ — curba (Y) va fi situată deasupra curbei (Z). Ținînd seama de lema 5, decurge de aici că punctul de tangență $M_{2,3}$ trebuie să aibă abscisa $x_0 > \gamma$. Dar după cum s-a arătat mai sus, în această nouă poziție de tangență curba (Z) va intersecta curba (Y) și în punctele M_4 și M_5 , care se vor situa la dreapta punctului $M_{2,3}$. Aceasta însă este în contradicție cu lema 4, care afirmă că, dacă punctul de tangență x_0 satisface inegalitatea $x_0 > \gamma$, atunci în intervalul $(x_0, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) nu se mai intersectează.

Această contradicție ne obligă să excludem și configurația din figura 9. Astfel afirmația lemei este complet demonstrată.

Observare. După cum ușor se poate constata, această lema este valabilă și în condițiile simultane ale cazului (3), combinat cu cîte unul din cazurile $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, (5)$.

Lema 8. În condițiile simultane ale cazurilor (3) și $4^\circ, (5)$, se consideră o curbă (Y), precum și o curbă (Z) tangentă la (Y) într-un punct de abscisă x_0 aleasă după voie. Notăm cu μ abscisa primului punct de intersecție al curbei (Z) cu axa Ox , punct situat la stînga punctului de abscisă x_0 (fig. 5). Distingem următoarele cazuri:

1° . Dacă $\gamma < x_0 \leq \delta$, atunci în intervalul $[\mu, x_0)$ curbele (Y) și (Z) se taie într-un singur punct, iar în intervalul $(x_0, +\infty)$ nu se mai întîlnesc (fig. 5).

2° . Dacă $x_0 < \gamma$, atunci în intervalul $[\mu, x_0)$ curbele (Y) și (Z) nu se taie, iar în intervalul $(x_0, +\infty)$ se taie o singură dată (fig. 10).

3° . Dacă $x_0 = \gamma$, atunci în intervalul $[\mu, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) nu se întretaie decît numai în punctul lor de tangență.

În acest punct, curbele se traversează (fig. 11).

4° . Dacă $x_0 > \delta$, atunci în intervalul $[\mu, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) nu se taie decît în punctul de tangență, iar în intervalul $[\mu - 2\pi, \mu]$ ele se taie în cel mult două puncte (fig. 12 și 13).

Demonstrație. 1° . Să presupunem că $\gamma < x_0 \leq \delta$. Atunci, după cum rezultă din lema 5, în vecinătatea punctului de tangență curba (Y) este situată (fig. 5) deasupra curbei (Z). De aici rezultă că în intervalul $[\mu, x_0)$ curbele (Y) și (Z) se mai intersectează cel puțin o dată. Să arătăm acum că în acest interval ele au un singur punct de intersecție. Demonstrația acestei afirmații o facem prin reducere la absurd. Dacă în intervalul (μ, x_0) curbele (Y) și (Z) s-ar intersecta într-un număr de puncte mai mare decît unu, atunci — după cum rezultă din lemele 2 și 3 — acest număr este neapărat mai mare sau cel puțin egal cu 3 (fig. 14).

Să notăm cu M_0 punctul de tangență și cu M_1, M_2, M_3 cele trei puncte consecutive de intersecție, avînd respectiv abscisele $x_1 > x_2 > x_3$, ($x_0 > x_1$).

Ținînd seama că prin ipoteză $x_0 > \gamma$ și plecînd de la afirmațiile lemelor 4 și 5, se arată cu ușurință că la dreapta punctului M_1 curba (Y) se situează deasupra curbei (Z). Aceași situație trebuie să aibă loc între punctele M_2 și M_3 , iar între punctele M_1 și M_2 curba (Y) trebuie să se situeze sub curba (Z).

Să variem acuma parametrul R în mod continuu, făcîndu-l să deașcească spre valoarea zero și lăsînd neschimbată valoarea parametrului α . Curba (Z) se va deforma în mod continuu, contractîndu-se din ce în ce mai mult.

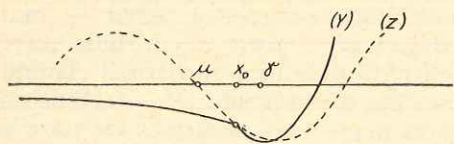


Fig. 10

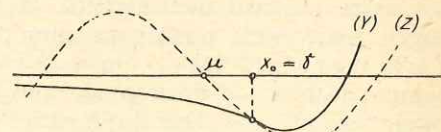


Fig. 11

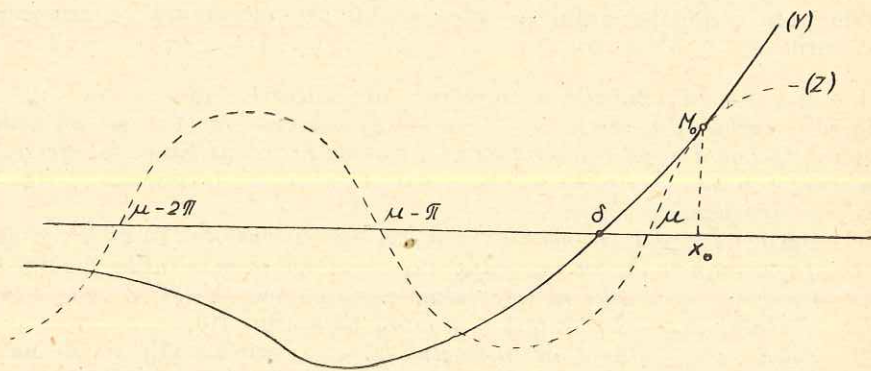


Fig. 12

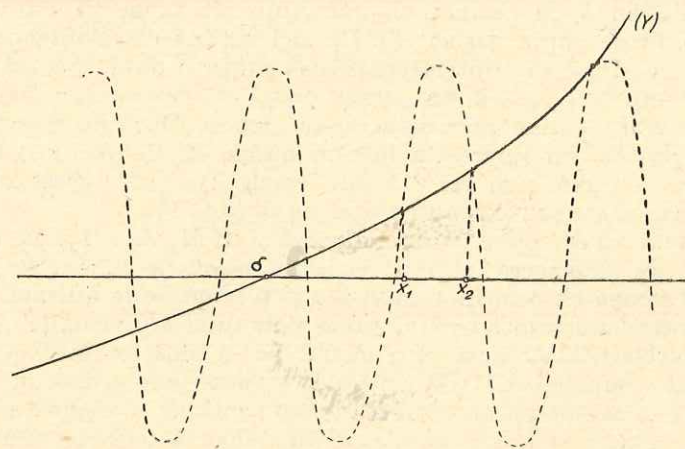


Fig. 13

În această deformare punctele de intersecție ale curbei (Z) cu axa Ox rămân fixe. Dacă deformarea este foarte mică, atunci punctele de intersecție M_1, M_2, M_3 ale curbei fixe (Y) și ale celei variabile (Z) se deplasează foarte puțin din pozițiile lor inițiale, luând niște poziții noi N_1, N_2, N_3 , distincte.

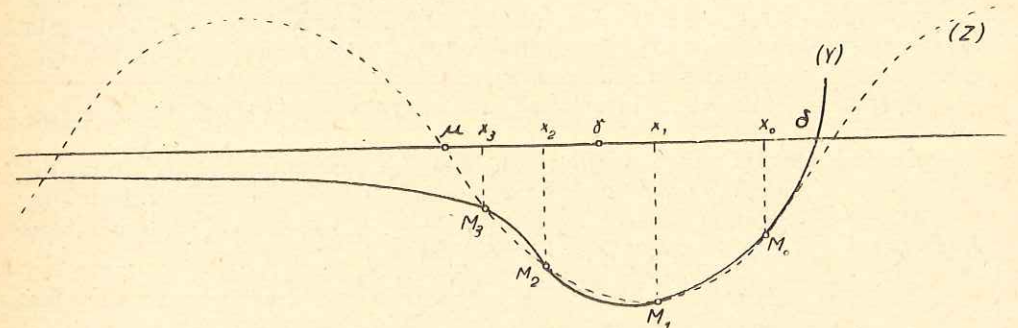


Fig. 14

Din punctul de tangentă M_0 se vor naște două puncte distincte de intersecție, M'_0 și M''_0 . Curba deformată (Z) se va intersecta cu (Y) cel puțin în punctele $N_1, N_2, N_3, M'_0, M''_0$, distincte între ele și situate pe o buclă a curbei (Z). Acest rezultat contrazice însă afirmația lemei 7. Contradicția provine din presupunerea falsă că în intervalul (μ, x_0) curbele (Y) și (Z) s-ar intersecta într-un număr de puncte mai mare ca 1. Astfel, prima afirmație, de la punctul 1° al acestei leme este demonstrată. Faptul că în intervalul $(x_0, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) nu se intersectează, rezultă din lema 4.

2°. Să presupunem acum că abscisa x_0 a punctului de tangentă M_0 satisface inegalitatea $x_0 < \gamma$. Atunci, conform lemei 5, în vecinătatea punctului de tangentă, de abscisă x_0 , curba (Z) se va afla situată deasupra curbei (Y). Presupunînd prin absurd că în intervalul (μ, x_0) curbele (Y) și (Z) s-ar intersecta în cel puțin un punct, ar rezulta că în același interval ele se intersectează într-un număr par de puncte distincte, deci într-un număr mai mare sau cel puțin egal cu 2 (fig. 15).

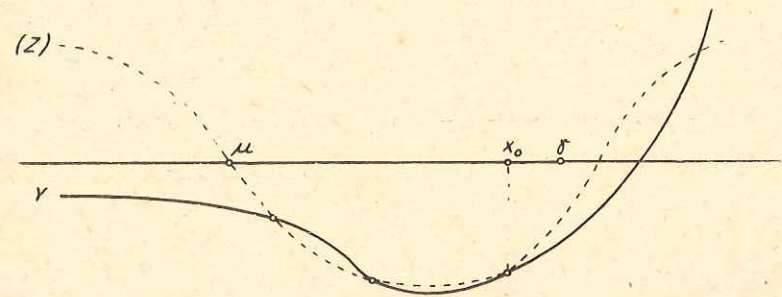


Fig. 15

Mărind foarte puțin valoarea parametrului R și lăsând valoarea lui α neschimbată, se poate obține o ușoară dilatare a curbei (Z) astfel încât din punctul de tangență să se nască două puncte de intersecție distincte, iar curba deformată (Z) și curba (Y) rămasă fixă, să se intersecteze în intervalul $(\mu, \mu + \pi)$ în cel puțin patru puncte distincte. Dar intervalul $(\mu, \mu + \pi)$ corespunde unei bucle a curbei deformate (Z) și ajungem astfel la concluzia că s-ar găsi cel puțin patru puncte distincte de intersecție pe această buclă. Acest rezultat ar contrazice însă lema 7.

Rezultă de aici că în intervalul (μ, x_0) , curbele (Y) și (Z) nu se intersectează.

Să demonstrăm acum afirmația a doua a lemei, anume că în intervalul $(x_0, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) se intersectează într-un punct și unul singur.

Dacă se înseamnă $x = x_0 + \varphi$, ținând seama de valorile $R(x_0) \sin(x_0 - \alpha)$ și $R(x_0) \cos(x_0 - \alpha)$, deduse din (12), se obține:

$$f^*(x_0 + \varphi) = A e^{a(x_0 + \varphi)} + B e^{b(x_0 + \varphi)} - R(x_0) \sin(\varphi + x_0 - \alpha) = \quad (50_2)$$

$$= -B e^{bx_0} [k(e^{a\varphi} - a \sin \varphi - \cos \varphi) - (e^{b\varphi} - b \sin \varphi - \cos \varphi)]$$

unde s-a notat

$$k = -\frac{A}{B} e^{(a-b)x_0}. \quad (50_3)$$

De aici se deduce că egalitatea $f^*(x_0 + \varphi) = 0$ are loc atunci și numai atunci când

$$F(\varphi) = \frac{e^{b\varphi} - b \sin \varphi - \cos \varphi}{e^{a\varphi} - a \sin \varphi - \cos \varphi} = k. \quad (50_4)$$

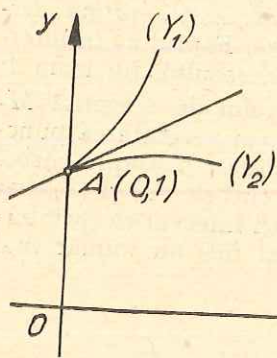


Fig. 16

Dacă se construiesc în fig. 16 curbele (Y_1) și (Y_2), respectiv de ecuații $y_1 = e^{a\varphi}$ și $y_2 = a \sin \varphi + \cos \varphi$, se deduce cu ușurință că pentru $\varphi > 0$ are loc inegalitatea $y_1 > y_2$ (cele două curbe fiind despărțite prin tangenta lor comună în $A(0,1)$). Deci funcția $F(\varphi)$ din (50₄) nu devine infinită. Prin derivare se obține:

$$F'(\varphi) = -\frac{(a-b)G(\varphi)}{(e^{a\varphi} - a \sin \varphi - \cos \varphi)^2}$$

unde

$$G(\varphi) = 1 + e^{(a+b)\varphi} - \frac{1+ab}{a-b} (e^{a\varphi} - e^{b\varphi}) \sin \varphi - (e^{a\varphi} + e^{b\varphi}) \cos \varphi.$$

De aici obținem:

$$G'(\varphi) = \frac{1}{a-b} [(a^2 - b^2)e^{(a+b)\varphi} - (1+a^2)e^{a\varphi}(b \sin \varphi + \cos \varphi) + (1+b^2)e^{b\varphi}(a \sin \varphi + \cos \varphi)]$$

$$G''(\varphi) = \frac{1}{a-b} \{ (a-b)(a+b)^2 e^{(a+b)\varphi} - [(1+a^2)e^{a\varphi} - (1+b^2)e^{b\varphi}] [(ab-1) \sin \varphi + (a+b) \cos \varphi] \}.$$

Se observă că egalitatea $G''(\varphi) = 0$ are loc atunci și numai atunci când

$$H(\varphi) = \frac{e^{(a+b)\varphi}(a-b)(a+b)^2}{(1+a^2)e^{a\varphi} - (1+b^2)e^{b\varphi}} = I(\varphi) = (ab-1) \sin \varphi + (a+b) \cos \varphi,$$

ceea ce ne dă

$$H'(\varphi) = (a-b)(a+b)^2 e^{(a+b)\varphi} \frac{b(1+a^2)e^{a\varphi} - a(1+b^2)e^{b\varphi}}{[(1+a^2)e^{a\varphi} - (1+b^2)e^{b\varphi}]^2} > 0$$

(în ipotezele făcute $a > b > 0$ și $ab - 1 > 0$) și

$$H''(\varphi) = (a-b)(a+b)^2 e^{(a+b)\varphi} \frac{(a-b)^2(1+a^2)(1+b^2)e^{(a+b)\varphi} + [b(1+a^2)e^{a\varphi} - a(1+b^2)e^{b\varphi}]^2}{[(1+a^2)e^{a\varphi} - (1+b^2)e^{b\varphi}]^3} > 0.$$

Dacă se construiesc în fig. 17 curbele (I) și (H) respectiv de ecuații $y = I(\varphi)$, $y = H(\varphi)$, se constată de asemenea cu ușurință că pentru $\varphi > 0$ are loc inegalitatea $I(\varphi) > H(\varphi)$, întrucât curbele (I) și (H) sînt despărțite prin tangenta lor comună în punctul $A(0, a+b)$. Astfel, pentru $\varphi > 0$ au loc inegalitățile $G''(\varphi) > 0$, $G'(\varphi) > 0$, $G(\varphi) > 0$ (întrucât $G(0) = G'(0) = 0$) și deci $F'(\varphi) < 0$. Se poate deci alcătui tabloul

| | | | | |
|--------------|-----------------------|------------|------------|----------|
| φ | 0 | | | ∞ |
| $F(\varphi)$ | $\frac{1+b^2}{1+a^2}$ | \searrow | \searrow | 0 |

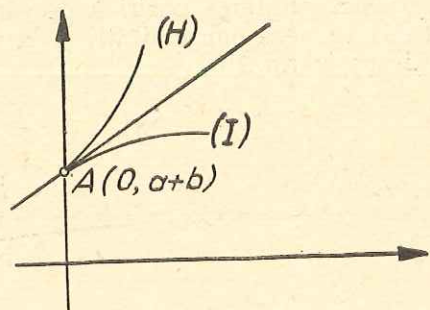


Fig. 17

Ori, dacă $x_0 < \gamma$, relațiile (50₃) și (30) ne dau: $0 < k < \frac{1+b^2}{1+a^2}$ și deci pentru

$\varphi > 0$, $F(\varphi)$ ia o dată și o singură dată valoarea k . Cu alte cuvinte curbele (Y) și (Z) se taie o singură dată la dreapta lui x_0 , ceea ce demonstrează a doua afirmație a lemei 8.

Observare. Dacă $x_0 > \gamma$, din (50₃) se deduce că $k > \frac{1+b^2}{1+a^2}$, iar din tabloul de variație de mai sus se deduce că în acest caz $F(\varphi)$ nu ia pentru nici un $\varphi > 0$ valoarea R , deci curbele (Y) și (Z) nu se taie la dreapta lui x_0 — ceea ce constituie o altă demonstrație a lemei 4.

3°. Să presupunem acum că $x_0 = \gamma$. Faptul că în intervalul $(\gamma, +\infty)$ curbele (Y) și (Z) nu se taie, rezultă din lema 4. Mai trebuie să arătăm că și în intervalul $[\mu, \gamma)$ aceste curbe nu au puncte comune. Într-adevăr, dacă am presupune prin absurd că în intervalul $[\mu, \gamma)$ ele s-ar intersecta, atunci — după cum se constată din fig. 18 — numărul acestor puncte de intersecție trebuie să fie par, deci cel puțin egal cu 2.

Dacă se dă parametrului x_0 o creștere pozitivă suficient de mică, variindu-l în mod continuu, atunci — ținând seama de (46) și (49) — parametrii $R(x_0)$ și $\alpha(x_0)$, care intervin în ecuația curbei (Z) și sînt dați de relațiile (9) și (10), vor decrește în mod continuu, ceea ce înseamnă că (Z) se va

deforma continuu sub acțiunea simultană a unei contracții precum și a unei translații în direcția negativă a axei Ox , rămânând însă mereu tangentă la curba fixă (Y) într-un punct de abscisă x_0 .

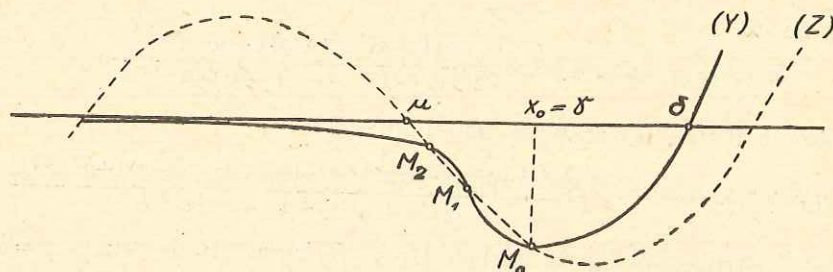


Fig. 18

Dacă creșterea pozitivă pe care o dăm lui x_0 este suficient de mică, atunci în baza continuității și în virtutea lemei 5 s-ar obține o configurație ca în fig. 19.

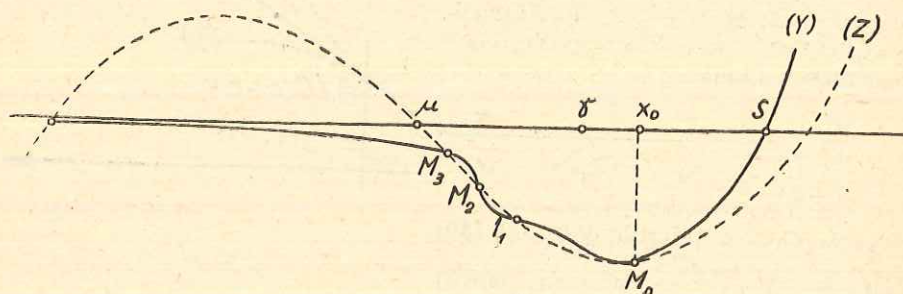


Fig. 19

Din fig. 19 rezultă că în intervalul $(\mu, x_0]$, de lungime mai mică decât π , cele două curbe (Y) și (Z) se intersectează în cel puțin patru puncte distincte. De aici ar decurge că $L < \pi$, ceea ce ar contrazice lema 7. Deci, în cazul când $x_0 = \gamma$, curbele (Y) și (Z) nu se intersectează în intervalul $[\mu, x_0 = \gamma]$.

4°. Să considerăm cazul $x_0 > \delta$ (fig. 12 și 13). În acest caz, deoarece în intervalul $[\mu, x_0)$ curbele (Y) și (Z) au concavități de sens opus, rezultă că ele nu se pot intersecta în acest interval.

Utilizând metodele de demonstrație date în cursul acestei leme, se poate demonstra că în intervalul $[\mu - 2\pi, \mu]$ cele două curbe (Y) și (Z) se taie în cel mult două puncte (fig. 12 și 13).

Lema 9. În condițiile cazului (3), ecuația diferențială $E(y) = 0$ admite curbe integrale*), pentru fiecare din ele existînd cel puțin un grup de patru puncte distincte de intersecție cu axa Ox , ale căror abscise sînt cuprinse într-un interval de lungime mai mică decât 2π ; de asemenea, aceeași ecuație

*) În cele ce urmează integralele considerate le vom presupune întotdeauna netriviale.

diferențială admite curbe integrale tangente la axa Ox , pentru fiecare din ele existînd cel puțin un grup de trei puncte distincte de intersecție cu axa Ox , printre care se află și punctul de tangentă, astfel încît abscisele acestor trei puncte să fie cuprinse într-un interval de lungime mai mică decât 2π .

Demonstrație. Să considerăm o integrală particulară

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + R \sin(x - \alpha)$$

în care A și B satisfac condițiile cazului 4°, (5), adică $A > 0$ și $B < 0$, iar parametrii R și α sînt luați astfel încît curbele (Y) și (Z) , corespunzătoare integralei (Y) , să fie tangente în punctul de minim M_0 de pe curba (Y) și care are abscisa $x_0 = \beta$ (fig. 20).

Întrucît au loc inegalitățile

$$\gamma < x_0 = \beta < \delta$$

rezultă pe de o parte din lema 5 că în vecinătatea punctului M_0 curba (Y) se află situată deasupra curbei (Z) ; pe de altă parte din lema 8, punctul

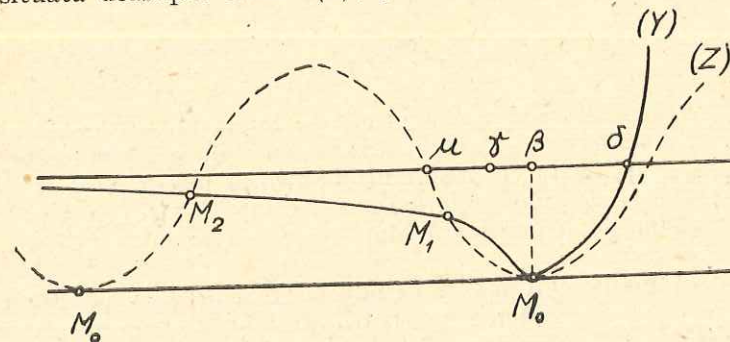


Fig. 20

1°, rezultă că în intervalul $[\mu, \beta]$ cele două curbe (Y) și (Z) se taie într-un singur punct M_1 iar în intervalul $(\beta, +\infty)$ nu se mai taie niciodată. Din aceste constatări rezultă configurația din fig. 20. Notînd cu M_2 primul punct de intersecție a curbelor (Y) și (Z) , situat la stînga punctului M_1 și cu x_2 abscisa sa, observăm în figura 20 că diferența $\beta - x_2$ este mai mică decât numărul 2π , aceasta întrucît funcția ce definește curba (Y) este descrescătoare în intervalul $(-\infty, \beta)$.

Acum să facem ca parametrul R din ecuația curbei (Z) să descrească în mod continuu tinzînd către zero, ceilalți parametri A , B și α rămînînd constanți. Atunci curba (Y) rămîne fixă, iar curba (Z) se va deforma în mod continuu, sub acțiunea unei contracții. Dacă deformarea este suficient de mică, din punctul de tangentă M_0 se vor naște două puncte de intersecție M'_0 și M''_0 , oricît de apropiate ca poziție de punctul de minim M_0 , iar celelalte două puncte de intersecție M_1 și M_2 vor primi deplasări foarte mici (fig. 21). Notînd cu x'_0 abscisa punctului M'_0 (situat la dreapta lui M_0), se poate obține inegalitatea

$$x'_0 - x_2 < 2\pi$$

dacă variația parametrului R este suficient de mică. Aceasta justifică afirmația lemei.

Consecință. Rezultă că în ceea ce privește problema determinării numărului L , putem exclude cazul 9° , (5), luând în studiu doar cazurile $1^\circ-4^\circ$, (5).

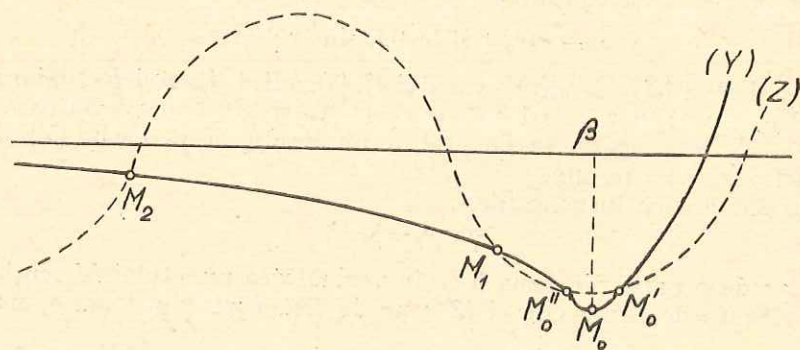


Fig. 21

§ 3. Revenind la problema determinării numărului L , pentru a putea utiliza practic constatările și observațiile expuse în § 1, punctul 2° , vom căuta întâi să simplificăm cât mai mult mulțimea integralelor particulare, relativ la care se ia marginea inferioară a distanței dintre 4 rădăcini consecutive (această margine inferioară, după cum s-a amintit anterior, ne va da numărul L căutat).

Prima teoremă pe care o vom demonstra mai jos ne va permite să restrângem cercetările în vederea rezolvării problemei propuse, considerând în locul mulțimii $\{f\}$ submulțimea $\{f^*\}$ a acesteia, care după cum se va vedea prezintă pentru cercetare un caracter esențial.

Vom începe prin a introduce câteva notații simplificatoare.

Fie $y=f(x)$ o integrală particulară a ecuației $E(y)=0$. Să notăm cu \mathcal{X}_f mulțimea tuturor grupelor de câte 4 rădăcini consecutive $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ale integralei $f(x)$ și apoi să considerăm reuniunea mulțimilor \mathcal{X}_f extinsă la toate integralele f ale ecuației diferențiale $E(y)=0$; $\mathcal{X}=\bigcup \mathcal{X}_f$. Să considerăm diferența x_4-x_1 , unde x_1, x_2, x_3, x_4 reprezintă 4 rădăcini consecutive ce figurează într-o grupă oarecare din mulțimea \mathcal{X} . Vom avea, evident,

$$L = \inf_{(x)} (x_4 - x_1). \quad (51)$$

Fie acum $y=f^*(x)$ ecuația unei curbe integrale oarecare, tangentă la axa Ox în punctul de abscisă x_0 . Să notăm cu L_{f^*} lungimea celui mai mic interval (închis) care cuprinde trei rădăcini consecutive $x_1^* < x_2^* < x_3^*$ ale integralei $f^*(x)$, printre care se află punctul de tangență x_0 a curbei corespunzătoare, cu axa Ox .

Acest minim este luat în raport cu mulțimea tuturor grupelor (x_1^*, x_2^*, x_3^*) de câte 3 rădăcini consecutive, care conțin printre ele punctul de tangență x_0 . Evident că pentru o integrală oarecare $f^*(x)$ pot exista cel mult trei

astfel de grupe, întrucît conform lemei 2 există un singur punct de tangență a curbei integrale cu axa Ox . Mulțimea formată din aceste trei grupe o notăm cu \mathcal{X}_{f^*} .

$$L_{f^*} = \min_{(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathcal{X}_{f^*}} (x_3^* - x_1^*) \quad (52)$$

Mai departe, fie L^* marginea inferioară relativ la mulțimea tuturor integralelor particulare $f^*(x)$, a mulțimii valorilor funcționalei L_{f^*} .

$$L^* = \inf_{\{f^*\}} L_{f^*} = \inf_{\{f^*\}} \left\{ \inf_{(x_1^*, x_2^*, x_3^*)} (x_3^* - x_1^*) \right\} \quad (53)$$

TEOREMA I. În condiția (3) are loc egalitatea

$$L = L^*. \quad (54)$$

Demonstrație. Să considerăm o integrală oarecare

$$y=f_0(x)=A_0e^{ax}+B_0e^{bx}-R_0 \sin(x-\alpha_0)$$

și să considerăm un grup oarecare de 4 rădăcini consecutive $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ale ei. Conform celor stabilite în lema 9, este suficient să se demonstreze teorema enunțată numai în cazul grupelor de câte 4 rădăcini consecutive, situate într-un interval de lungime mai mică decît 2π , neglijînd toate celelalte grupe în care $x_4-x_1 \geq 2\pi$.

Deci vom presupune că grupa de 4 rădăcini considerată satisface condiția

$$x_4 - x_1 < 2\pi. \quad (55)$$

Pentru a demonstra teorema enunțată, vom demonstra în prealabil două leme ce vor interveni în cursul demonstrației.

L e m a 10. Presupunem că toate rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sînt simple și consecutive.

Lăsînd în expresia integralei considerate valorile parametrilor A, B și α neschimbate și făcînd pe R să varieze monoton și continuu de la valoarea sa inițială R_0 , prin toate valorile pentru care nu dispăre nici una dintre rădăcinile din grupa (x_1, x_2, x_3, x_4) considerată, atunci se poate alege un sens de variație pentru R astfel ca diferența x_4-x_1 să descrească în mod continuu iar marginea inferioară a acestei diferențe, referitor la mulțimea valorilor admisibile ale parametrului R , să fie egală cu diferența $\xi_3-\xi_1$, unde $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ reprezintă trei rădăcini consecutive ale unei anumite integrale $f^*(x)$ care corespunde aceluiași valori ale parametrilor A, B și α și a cărei curbă corespunzătoare este tangentă la axa Ox , în unul din punctele ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Într-adevăr, distingem mai multe cazuri după cum valorile A_0, B_0 satisfac condițiile unuia din cazurile $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$, (5), acestea împreună epuizînd toate cazurile esențiale posibile.

Vom examina întâi cazul cînd A_0 și B_0 satisfac condițiile 4° din (5) și apoi cînd satisfac una din condițiile $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ din (5).

Cazul 4° , (5): $A_0 > 0, B_0 < 0$. Să considerăm curbele (Y) și (Z) corespunzătoare integralei particulare $f(x)$ alese. Evident că rădăcinile consecu-

tive x_1, x_2, x_3, x_4 considerate ale integralei $y=f(x)$, reprezintă abscisele a patru puncte consecutive de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 ale curbelor corespunzătoare (Y) și (Z). Ținând seama de lema 7, cele 4 puncte consecutive M_1, M_2, M_3, M_4 , pentru care este satisfăcută condiția (55), nu pot fi situate pe două bucle consecutive ale curbei (Z) și nici nu pot figura efectiv pe un număr de bucle consecutive mai mare sau egal cu 4. Deci rămâne singura posibilitate că cele patru puncte figurează efectiv pe 3 bucle consecutive ale curbei (Z). S-ar putea prezenta două cazuri, după cum cele 3 bucle consecutive încep la stînga cu o buclă negativă sau cu una pozitivă.

În primul caz, cînd cele 3 bucle consecutive ar începe cu o buclă negativă (fig. 22), atunci evident că pe bucla pozitivă — care se află la mijloc — nu se poate afla nici unul din cele 4 puncte de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 , întrucît în caz afirmativ bucla negativă din dreapta nu ar conține nici unul din cele patru puncte, care ar fi deci așezate pe primele două bucle, și aceasta ar contrazice lema 7.

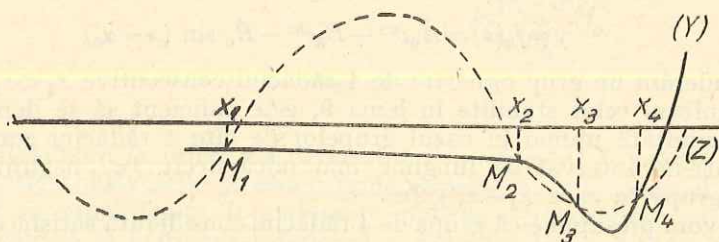


Fig. 22

Distingem trei subcazuri, după cum pe prima buclă negativă (situată în extrema stîngă) se află unul, două sau trei din punctele M_1, M_2, M_3 . Evident că aceste trei subcazuri epuizează toate posibilitățile.

Să considerăm primul subcaz, în care presupunem că pe prima buclă negativă se află situat un singur punct din cele 4 puncte de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 , anume M_1 (fig. 22). Atunci celelalte trei puncte trebuie să fie așezate în mod necesar pe bucla negativă situată în extrema dreaptă, întrucît — după cum s-a văzut mai sus — pe bucla pozitivă nu se află nici unul dintre ele. Rezultă în mod evident că pozițiile relative ale curbelor (Y) și (Z) între cele patru puncte sînt cele indicate în fig. 22. Să notăm respectiv cu x_1, x_2, x_3, x_4 abscisele punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 .

Să facem acum ca valoarea parametrului R din ecuația curbei (Z) să crească în mod continuu de la valoarea inițială R_0 . Atunci, după cum arată fig. 22, abscisele x_1, x_2, x_3, x_4 vor varia continuu precum urmează :

- x_1 crește
- x_2 descrește
- x_3 crește
- x_4 descrește

deci diferența $x_4 - x_1$ va descrește în mod continuu. La un moment dat, pentru o anumită valoare R^*_0 a parametrului R , punctele M_3 și M_4 vor

coincide dînd naștere unui punct de tangență $M_{3,4}$, de abscisă ξ , iar punctele M_1 și M_2 — care vor suferi deplasări continue — vor avea în momentul final abscisele ξ_1 , respectiv ξ_2 . Funcția

$$f^*(x) = A_0 e^{ax} + B_0 e^{bx} - R^*_0 \sin(x - \alpha_0)$$

reprezintă evident tot o integrală particulară a ecuației diferențiale $E(y)=0$, a cărei curbă reprezentativă taie axa Ox în punctele de abscisă ξ_1, ξ_2, ξ_3 , consecutive între ele, dintre care ultimul este un punct de tangență cu axa Ox .

Are loc de asemenea egalitatea

$$\inf(x_4 - x_1) = \xi_3 - \xi_1$$

$(R^*_0 > R \geq R_0)$

cea ce justifică, în acest subcaz, afirmația lemei.

Să considerăm acum cel de-al doilea subcaz, cînd pe prima buclă negativă s-ar afla 2 puncte de intersecție M_1 și M_2 și deci pe bucla din extrema dreaptă punctele M_3 și M_4 (fig. 23). Să facem ca parametrul R să descreas-

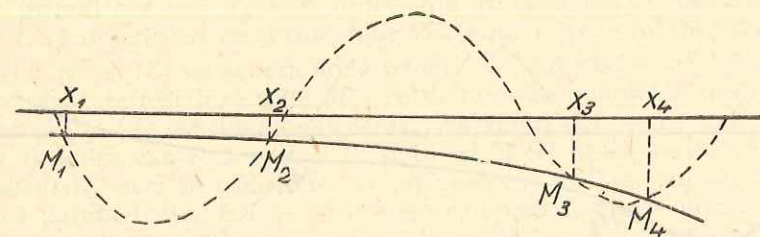


Fig. 23

că în mod continuu, de la valoarea sa inițială R_0 , și să treacă prin toate valorile admisibile ale parametrului R , mai mici ca R_0 . Atunci abscisele x_1, \dots, x_4 vor varia în mod continuu, precum urmează :

- x_1 crește
- x_2 descrește
- x_3 crește
- x_4 descrește

și deci diferența $x_4 - x_1$ descrește continuu. În acest proces, pentru o anumită (primă) valoare $R^*_0 < R_0$ a parametrului R , curba (Z) va fi tangență la (Y) într-un punct M_0 (și numai într-unul singur, conform lemei 2), care nu poate proveni decît din împreunarea punctelor M_3 și M_4 . În caz contrar, dacă ar proveni din unirea celorlalte două puncte M_1 și M_2 , atunci la dreapta punctului de tangență M_0 curbele (Y) și (Z) s-ar intersecta în două puncte M_3 și M_4 , ceea ce ar contrazice afirmația făcută la punctul 2° al lemei 8, sau afirmația lemei 4, aceasta după cum abscisa x_0 a punctului de tangență M_0 satisface inegalitatea $x_0 < \gamma$ sau $x_0 \geq \gamma$.

Să notăm cu ξ_1 , respectiv ξ_2 abscisele punctelor ce reprezintă pozițiile finale ale punctelor M_1 și M_2 , poziții ce corespund valorii $R=R^*_0 < R_0$, și cu ξ_3 abscisa punctului de tangență.

Funcția

$$f^*(x) = A_0 e^{ax} + B_0 e^{bx} - R^* \sin(x - \alpha_0)$$

reprezintă evident tot o integrală particulară a ecuației diferențiale $E(y)=0$, a cărei curbă reprezentativă taie axa Ox în puncte de abscisă ξ_1, ξ_2, ξ_3 , consecutive între ele și dintre care ultimul este un punct de tangență cu axa Ox . Are loc de asemenea inegalitatea

$$\inf_{(R^* > R \geq R_0)} (x_4 - x_1) = \xi_3 - \xi_1$$

ceea ce justifică și în acest subcaz afirmația lemei.

În subcazurile 1 și 2 se poate da și o demonstrație analitică a lemei, arătând că expresia $\frac{d}{dR}(x_4 - x_1)$ este negativă în condițiile presupuse de cele două subcazuri.

Să considerăm acum cel de-al treilea caz, când pe prima buclă negativă s-ar afla trei puncte de intersecție M_2, M_3, M_4 , punctul M_1 găsindu-se pe bucla negativă din extremitatea dreaptă (fig. 24). Rezultă în mod evi-

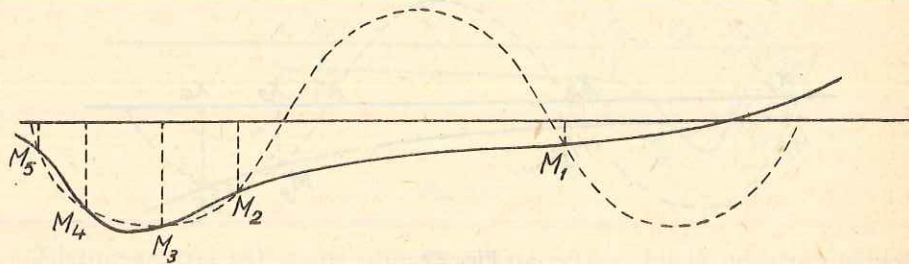


Fig. 24

dent că în vecinătatea punctului M_1 , la stînga acestuia, curba (Y) se va situa dedesubtul curbei (Z); de aici se deduce că pozițiile relative ale celor două curbe, între punctele M_1, M_2, M_3, M_4 , nu pot fi respectiv altele decît cele indicate în fig. 24. Se ajunge astfel la concluzia că în vecinătatea punctului M_4 , și la stînga acestuia, curba (Y) s-ar situa deasupra curbei (Z), ceea ce implică existența pe bucla negativă din stînga a încă unui punct de intersecție M_5 . Se ajunge astfel la concluzia că pe bucla negativă din stînga s-ar afla 4 puncte distincte de intersecție, ceea ce este în contradicție cu lema 7. Deci subcazul 3 trebuie exclus, întrucît duce la contradicție. Trecem la

Cazurile 1°, 2°, 3°, (5). În toate aceste cazuri, funcția ce definește curba (Y) este crescătoare pe toată axa și cele 4 puncte consecutive de intersecție M_1, M_2, M_3, M_4 cu curba (Z), satisfăcînd condiția (55) (în cazul cînd există astfel de grupe), nu pot să aibă o altfel de așezare decît aceea indicată în fig. 25,

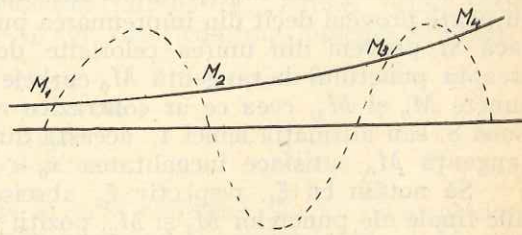


Fig. 25

adică 2 pe o buclă pozitivă și alte 2 pe prima buclă pozitivă situată la dreapta precedentei. Urmînd raționamentul utilizat în subcazul 2 al cazului precedent, se poate dovedi cu ușurință afirmația lemei 10.

În vederea demonstrării aceleiași teoreme, vom demonstra încă o proprietate.

Lema 11. În condițiile (3), se consideră o integrală particulară $f^*(x)$, avînd o rădăcină dublă $x = x_0$, și o grupă de trei rădăcini consecutive $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, printre care se află și rădăcina dublă x_0 . Atunci oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există integrale particulare $f(x)$ ale aceleiași ecuații diferențiale $E(y)=0$ care admit grupe de cîte 4 rădăcini distincte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$x_4 - x_1 < \xi_3 - \xi_1 + \varepsilon. \quad (56)$$

Demonstrație. Să considerăm curbele (Y) și (Z) corespunzătoare integralei $f^*(x)$. Se pot prezenta patru cazuri, după cum $\gamma < x_0 < \delta$ (fig. 5); $\delta \leq x_0$ (fig. 12, 13); $x_0 < \gamma$ (fig. 10) și $x_0 = \gamma$ (fig. 11).

În primul caz $\gamma < x_0 < \delta$, după cum arată figura 5, făcînd ca parametrul R să descrească cu o cantitate foarte mică, punctul de tangență M_0 a curbelor (Y) și (Z) va genera două puncte de intersecție M'_0, M''_0 , situate într-o vecinătate restrînsă a lui M_0 ; celelalte două puncte de intersecție ale curbelor (Y) și (Z) considerate în lema, vor suferi deformări foarte mici.

În al doilea caz $\delta \leq x_0$ (fig. 12 și 13) și în cel de al treilea caz, pentru demonstrarea lemei se utilizează un raționament analog, cu singura modificare că parametrului R i se dă o creștere pozitivă foarte mică.

În ultimul caz, cînd $x_0 = \gamma$ (fig. 11), se dă lui x_0 o creștere foarte mică, pozitivă, menținînd mereu curba (Z) tangentă la curba (Y). Atunci, în intervalul (μ, x_0) va apare un nou punct de intersecție (conform 1°, lema 8). După cum ne arată formulele (8) și (9), parametrii $R(x_0)$ și $\alpha(x_0)$ fiind funcții continue de x_0 , vor varia foarte puțin, ceea ce înseamnă că (Z) va suferi o deformare foarte mică. Deci celelalte puncte de intersecție ale curbelor (Y) și (Z) considerate în lema, vor suferi deplasări foarte mici. De aici rezultă lema.

Consecință. În baza acestei leme, avem voie să suprimăm din mulțimea \mathcal{X} , ce intervine în definiția (51) a numărului L , toate grupele de 4 rădăcini consecutive ale vreunei integrale particulare $f^*(x)$, printre care figurează și rădăcina dublă x_0 a acelei integrale. Marginea inferioară care se obține va fi egală cu aceea din (51) și deci ne va da tot numărul L .

* * *

Trecem la demonstrarea teoremei.

Să considerăm mulțimea $X_{A,B}$ a tuturor diferențelor $x_4 - x_1$, unde $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ reprezintă 4 rădăcini simple, consecutive, ale unei integrale particulare $f(x)$ de forma

$$y = f(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha) \quad (57)$$

și unde $A > 0$, $B < 0$ au valori fixe, iar parametrii $R > 0$ și α sînt oarecari. Mulțimea $X_{A,B}$ depinde de trei parametri, anume de valorile pe care le iau parametri R și α , precum și de prima rădăcină x_1 , cea mai mică, care figurează în grupul respectiv.

Să considerăm de asemenea mulțimea $X_{A,B}^*$ a tuturor diferențelor $\xi_3 - \xi_1$, unde $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ reprezintă trei rădăcini consecutive ale unei integrale $f^*(x)$, de forma

$$f^*(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R(x_0) \sin [x - \alpha(x_0)],$$

parametrii A și B avînd aceleași valori ca în expresia integralei $f(x)$ din (57), iar valorile lui $R(x_0)$ și $\alpha(x_0)$ sînt date de formulele (9) și (10).

Se presupune că printre rădăcinile ξ_1, ξ_2, ξ_3 ale integralei $f^*(x)$ se află și rădăcina dublă x_0 . Evident că mulțimea $X_{A,B}^*$ depinde de parametrul x_0 , care reprezintă poziția rădăcinii duble, precum și de prima rădăcină care se alege pentru gruparea (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Ținînd seama de lemele 10 și 11, rezultă că mulțimile $X_{A,B}$ și $X_{A,B}^*$ verifică proprietatea:

$$\inf X_{A,B} = \inf X_{A,B}^* \quad (59)$$

Să notăm

$$\inf X_{A,B} = \inf_{x_1, R, \alpha} (x_4 - x_1) = L_{A,B}$$

$$\inf X_{A,B}^* = \inf_{\xi_1, x_0} (\xi_3 - \xi_1) = L_{A,B}^*$$

Cu aceste notații, egalitatea (59) se transcrie

$$L_{A,B} = L_{A,B}^* \quad (60)$$

Luînd marginea inferioară relativ la A și B a ambilor membri ai acestei egalități și ținînd seama de consecința lemei 11, precum și de faptul că în expresiile (51) — (53), care definesc numerele L și L^* , se poate lua marginea inferioară în mod succesiv, relativ la diverși parametri de care depinde mulțimea \mathcal{X} , respectiv mulțimea $\{f^*\}^1$, avem egalitatea $L = L^*$, c. c. t. d.

§ 4. Vom prezenta acum o teoremă (teorema II), echivalentă cu teorema I, a cărei demonstrație are însă un caracter analitic.

Să considerăm patru puncte consecutive de intersecție ale curbelor (Y) și (Z) , $M_i(x_i, y_i)$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Curba (Y) fiind presupusă fixă, evident că curba (Z) este complet determinată prin condiția ca ea să treacă

¹⁾ Fiind dată o expresie oarecare, definită de exemplu pe mulțimea integralelor $\{f^*\}$, a lua marginea inferioară a expresiei respective, în mod succesiv, relativ la diverși parametri de care depinde mulțimea $\{f^*\}$, revine de fapt la o împărțire a mulțimii $\{f^*\}$ într-un număr infinit de submulțimi disjuncte, a lua apoi marginea inferioară a expresiei respective, separat în raport cu fiecare submulțime componentă și în cele din urmă marginea inferioară a rezultatelor parțiale obținute anterior. Se constată ușor că numărul pe care-l obținem în acest fel coincide cu marginea inferioară a expresiei respective, referitoare la întreaga mulțime $\{f^*\}$.

prin două puncte oarecari M_i și M_{i_2} din cele 4 puncte M_i de pe curba (Y) , dacă abscisele lor nu diferă printr-un multiplu de π , întrucît atunci expresiile $R \sin \alpha$ și $R \cos \alpha$ sînt date de un sistem de două ecuații de gradul 1, cu soluție finită. Așadar poziția celorlalte două puncte M_{i_3} și M_{i_4} din punctele M_i este determinată de poziția punctelor M_{i_1} și M_{i_2} ; presupunînd dar pe M_{i_2} fix iar pe M_{i_1} variabil pe curba (Y) , x_{i_1} și x_{i_2} sînt funcții de x_{i_1} . Să notăm cu Γ punctul de abscisă γ , situat pe curba (Y) , abscisa γ avînd expresia dată în (30). Cu aceste precizări, are loc

TEOREMA II. Dacă M_3 este la stînga lui Γ dar fix, iar M_2 mobil, atunci diferența $x_4 - x_3$, dacă este mai mică decît $2\pi^2$, atinge marginea sa inferioară cînd M_2 și M_3 se confundă. Dacă M_3 este la dreapta lui Γ și fix iar M_4 mobil, atunci marginea inferioară a diferenței $x_4 - x_1$ se realizează cînd M_3 și M_4 se confundă.

Demonstrație. Au loc egalitățile:

$$Ae^{ax_1} + Be^{bx_1} = R \sin (x_1 - \alpha) \quad (61)$$

$$Ae^{ax_2} + Be^{bx_2} = R \sin (x_2 - \alpha) \quad (62)$$

$$Ae^{ax_3} + Be^{bx_3} = R \sin (x_3 - \alpha) \quad (63)$$

$$Ae^{ax_4} + Be^{bx_4} = R \sin (x_4 - \alpha) \quad (64)$$

Se va presupune întîi că M_3 se află la stînga punctului Γ . Se va lua atunci $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 1$, $i_4 = 4$. Derivînd relațiile (61) și (63) în raport cu x_2 , se obține respectiv

$$\begin{cases} (aAe^{ax_1} + bBe^{bx_1}) \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dR}{dx_2} \sin (x_1 - \alpha) + R \left(\frac{dx_1}{dx_2} - \frac{d\alpha}{dx_2} \right) \cos (x_1 - \alpha) \\ \frac{dR}{dx_2} \sin (x_3 - \alpha) = R \frac{d\alpha}{dx_2} \cos (x_3 - \alpha) \end{cases} \quad (65)$$

din care se deduce

$$\frac{dx_1}{dx_2} = R \frac{d\alpha}{dx_2} \frac{\sin (x_1 - x_3)}{\sin (x_3 - \alpha) [aAe^{ax_1} + bBe^{bx_1} - R \cos (x_1 - \alpha)]} \quad (66)$$

Derivînd și relația (64) în raport cu x_2 și ținînd seama de (65) se obține:

$$\frac{dx_4}{dx_2} = R \frac{d\alpha}{dx_2} \frac{\sin (x_4 - x_3)}{\sin (x_3 - \alpha) [aAe^{ax_4} + bBe^{bx_4} - R \cos (x_4 - \alpha)]} \quad (67)$$

Din (66) și (67) rezultă

$$\frac{d}{dx_2} (x_4 - x_1) = \frac{R \frac{d\alpha}{dx_2}}{\sin (x_3 - \alpha)} \left[\frac{\sin (x_4 - x_3)}{Y'(x_4) - Z'(x_4)} + \frac{\sin (x_3 - x_1)}{Y'(x_1) - Z'(x_1)} \right] \quad (68)$$

Conform lemelor 7 — 9, rezultă că singurele dispoziții în care $x_4 - x_1 < 2\pi$ sînt acelea din fig. 26.

²⁾ În cadrul lemei 9, s-a dovedit că există dispoziții ale curbelor (Y) și (Z) pentru care are loc $x_4 - x_1 < 2\pi$.

În figura 26 se vede că $0 < x_4 - x_3 < \pi$, $\pi < x_3 - x_1 < 2\pi$, $\sin(x_3 - \alpha) < 0$, și de asemenea că au loc următoarele inegalități între coeficienții unghiulari ai curbelor (Y) și (Z):

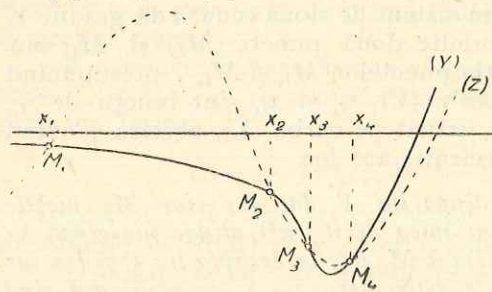


Fig. 26

$$Y'(x_4) > Z'(x_4); \quad Y'(x_1) < Z'(x_1).$$

Ținând seama de aceste inegalități, din (68) obținem

$$\operatorname{sg} \frac{d}{dx_2} (x_4 - x_1) = - \operatorname{sg} \frac{d\alpha}{dx_2}. \quad (69)$$

Relațiile (62) și (63) ne dau

$$Q = \frac{Ae^{ax_2} + Be^{bx_2}}{Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}} = \frac{\sin x_2 - \cos x_2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin x_3 - \cos x_3 \operatorname{tg} \alpha} \quad (70)$$

de unde

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sin x_2 - Q \sin x_3}{\cos x_2 - Q \cos x_3}.$$

Derivând în raport cu x_2 și ținând seamă de relația (70), se obține:

$$\frac{d\alpha}{dx_2} = \frac{1 - Q \cos(x_3 - x_2) - Q' \sin(x_3 - x_2)}{1 - 2Q \cos(x_3 - x_2) + Q^2} = \frac{(Ae^{ax_2} + Be^{bx_2})[Ae^{ax_3} + Be^{bx_3} - (Ae^{ax_2} + Be^{bx_2}) \cos(x_3 - x_2) - (aAe^{ax_2} + bBe^{bx_2}) \sin(x_3 - x_2)]}{(Ae^{ax_2} + Be^{bx_2})^2 - 2(Ae^{ax_2} + Be^{bx_2})(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos(x_3 - x_2) + (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3})^2}$$

Această relație ne arată că

$$\operatorname{sg} \frac{d\alpha}{dx_2} = - \operatorname{sg} N = - \operatorname{sg} [Ae^{ax_2} + Be^{bx_2} - (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos(x_3 - x_2) - (aAe^{ax_2} + bBe^{bx_2}) \sin(x_3 - x_2)]. \quad (71)$$

Ori, dacă se înseamnă

$$G(s) = Ae^{ax_2}(1 - e^{-as} \cos s - ae^{-as} \sin s) + Be^{bx_2}(1 - e^{-bs} \cos s - be^{-bs} \sin s) \quad (72)$$

ceea ce ne dă

$$G'(s) = \theta(s) \cdot \sin s$$

unde

$$\theta(s) = Ae^{a(x_2-s)} \cdot (1 + a^2) + Be^{b(x_2-s)} \cdot (1 + b^2).$$

se obține:

$$N = G(x_3 - x_2). \quad (73)$$

Din (72) se vede îndată că $\theta(s) = 0$ pentru $s = \sigma = x_3 - \gamma < 0$ și că $\theta(-\infty) = +\infty$, așa că $\theta(s) < 0$ pentru $s \geq 0$, deci pentru $0 < s < \pi$, $G'(s) < 0$ și cum $G(0) = 0$, rezultă că pentru $0 < s < \pi$, $G(s) < 0$. Ori în figura 26 se vede că $0 < x_3 - x_2 < \pi$, așa că în (73) $N < 0$, deci în (71)

$\frac{d\alpha}{dx_2} > 0$, iar în (69) $\frac{d}{dx_2} (x_4 - x_1) < 0$, ceea ce ne arată că $\inf_{x_2} (x_4 - x_1)$ este atins atunci cînd $x_2 = x_3$.

Să presupunem acum că M_3 se situează la dreapta lui Γ . Se va lua $i_1 = 4, i_2 = 3, i_3 = 2, i_4 = 1$. Derivînd relațiile (63) și (61) în raport cu x_4 , se obține respectiv

$$\frac{dR}{dx_4} \sin(x_3 - \alpha) = R \frac{d\alpha}{dx_4} \cos(x_3 - \alpha)$$

și

$$\frac{dx_1}{dx_4} [aAe^{x_1} + bBe^{x_1} - R \cos(x_1 - \alpha)] = \frac{dR}{dx_4} \sin(x_1 - \alpha) - R \frac{d\alpha}{dx_4} \cos(x_1 - \alpha).$$

de unde

$$\frac{d}{dx_4} (x_4 - x_1) = 1 - \frac{dx_1}{dx_4} = 1 + \frac{R}{\sin(x_3 - \alpha)} \cdot \frac{d\alpha}{dx_4} \cdot \frac{\sin(x_3 - x_1)}{Y'(x_1) - Z'(x_1)}. \quad (74)$$

Relațiile (63) și (64) ne dau:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sin x_4 - Q \sin x_3}{\cos x_4 - Q \cos x_3}, \quad \text{unde} \quad Q = \frac{Ae^{ax_4} + Be^{bx_4}}{Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}},$$

de unde, ținînd seama de (63), se obține

$$\frac{1}{\sin(x_3 - \alpha)} \cdot \frac{d\alpha}{dx_4} = \frac{RG(x_4 - x_3)}{(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3})^2 - 2(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3})(Ae^{ax_4} + Be^{bx_4}) \cos(x_3 - x_4) + (Ae^{ax_4} + Be^{bx_4})^2}$$

unde

$$G(s) = Ae^{ax_3}[1 + e^{as}(a \sin s - \cos s)] + Be^{bx_3}[1 + e^{bs}(b \sin s - \cos s)]$$

ceea ce ne dă

$$G'(s) = \varphi(s) \sin s,$$

unde

$$\varphi(s) = Aa^{a(x_3+s)}(1 + a^2) + Bb^{b(x_3+s)}(1 + b^2).$$

Obținem că $\varphi(s) = 0$ pentru $s = \tau = \gamma - x_3 < 0$, iar $\varphi(\infty) = \infty$. Deci pentru $0 < s < \pi$ are loc relația:

$$G'(s) > 0.$$

Deoarece $G(0) = 0$, rezultă că pentru $0 < s < \pi$ are loc relația

$$G(s) > 0. \quad (76)$$

Din fig. 26 se observă că $0 < x_4 - x_3 < \pi$, așa că (76) și (75) ne dau

$$\frac{1}{\sin(x_3 - \alpha)} \cdot \frac{d\alpha}{dx_4} > 0. \quad (77)$$

Tot din fig. 26 se observă că $\pi < x_3 - x_1 < 2\pi$ și $Y'(x_1) < Z'(x_1)$, așa că

$$\frac{\sin(x_3 - x_1)}{Y'(x_1) - Z'(x_1)} > 0. \tag{78}$$

Obținem deci din (74), (77), (78) că $\frac{d}{dx_4}(x_4 - x_1) > 0$, ceea ce ne arată că $\inf(x_4 - x_1)$ este atins când $x_3 = x_4$. Ar mai fi de asigurat că în (68) și (74), avem $Y'(x_1) - Z'(x_1) \neq 0$ și $Y'(x_4) - Z'(x_4) \neq 0$. Prima relație este evidentă, fiindcă după cum s-a arătat $Y'(x_1) < 0$ și $Z'(x_1) > 0$. A doua relație din (68) este evidentă dacă $x_4 > \gamma$, întrucît dacă $Y'(x_4) = Z'(x_4)$, cum arcul de pe curba (Z), situat între M_3 și M_4 , este deasupra arcului cuprins între aceleași puncte de pe curba (Y), s-ar deduce că (Y) și (Z) sînt tangente în M_4 situat la dreapta lui Γ , și că în jurul lui M_4 , (Z) este deasupra curbei (Y). Aceasta însă ar contrazice lema 4₁. Dacă M_4 este la stînga lui Γ , și $Y'(x_4) = Z'(x_4)$, s-ar deduce că pe aceeași buclă a lui (Z) se află un punct de tangență și două puncte de intersecție cu (Y), contrar lemei 8. În mod asemănător se procedează dacă M_4 coincide cu Γ .

§ 5. S-a stabilit în teoremele I și II din § 4, că

$$L_4 = \inf_{A,B,R,\alpha} \inf_{x_1} (x_4 - x_1) = \min_{A,B} [\inf_{x_0 < \gamma} \inf_{x_0 \geq \gamma} (\bar{s} - s), \inf_{A,B} \inf_{x_0 \geq \gamma} (x_0 - \sigma)] \tag{79}$$

unde \bar{s} și s sînt rădăcinile care încadrează respectiv la dreapta și la stînga rădăcina dublă x_0 a integralei $f_{x_0}^*(x)$ a ecuației diferențiale considerate, iar σ este rădăcina imediat inferioară lui s a aceleiași integrale (fig. 27 și 28). Dispozițiile din fig. 29 sau 30 sînt excluse de lemele 7-8.

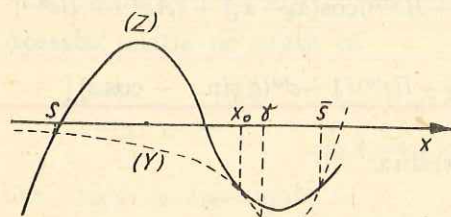


Fig. 27

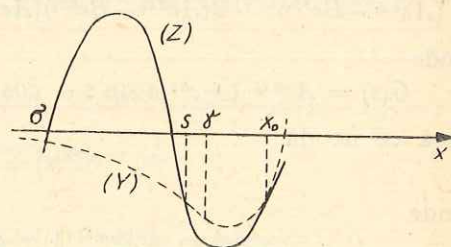


Fig. 28

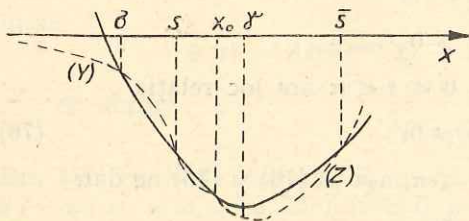


Fig. 29

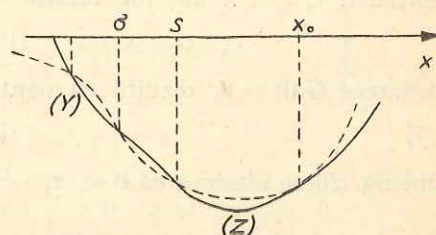


Fig. 30

Lema 12. Expresiile σ , s și \bar{s} sînt funcții continue de x_0 (σ și s pentru orice x_0 , iar \bar{s} pentru $x_0 \leq \sigma$).

Demonstrație: σ , s și \bar{s} sînt rădăcini ale ecuației

$$F(x_0, \rho) = Ae^{a\rho} + Be^{b\rho} - R(x_0) \sin[\rho - \alpha(x_0)] = 0. \tag{80}$$

Expresiile $F(x_0, \rho)$, $\frac{\partial F}{\partial \rho}(x_0, \rho)$, $\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, \rho)$ sînt dar continue în variabilele x_0 și ρ , pentru orice valori ale acestora. Se va însemna $\sigma = \rho_1$, $s = \rho_2$, $\bar{s} = \rho_3$ și se va da lui x_0 o valoare oarecare $x_0 \neq \gamma$. Fie atunci $\bar{\rho}_p$ valoarea respectivă a lui ρ_p , așa că $F(x_0, \bar{\rho}_p) = 0$ ($p = 1, 2, 3$). Din lema 2 se deduce că $F'_0(x_0, \rho_p) \neq 0$, pentru $x = x_0$, $\rho_p = \rho_p$, dat fiind că (Y) și (Z) fiind tangente în M_0 nu mai pot fi tangente în punctele de abscisă ρ_p . Așadar sînt îndeplinite toate condițiile spre a putea folosi teorema de existență a funcțiilor implicite (vezi de pildă *Cursul de matematici superioare* de Smirnov, tom. I, ed. a 12-a rusă, pag. 376), care ne asigură că ecuația

$$F(x_0, \rho_p) = Ae^{a\rho_p} + Be^{b\rho_p} - R(x_0) \sin[\rho_p - \alpha(x_0)] = 0 \tag{81}$$

are o singură rădăcină $\rho_p = \rho_p(x_0)$, funcție continuă și derivabilă în raport cu x_0 pentru toate valorile lui x_0 dintr-un interval destul de mic în jurul lui x_0 și pentru care $\rho_p(x_0) = \bar{\rho}_p$; deci

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_0} \bar{\rho}_p(x_0) = \bar{\rho}_p. \tag{82}$$

Să vedem acum cum variază ρ_p cînd $x_0 \rightarrow \gamma$. Dacă se înseamnă

$$x_0 = \gamma - \varepsilon, \quad \rho_p = \gamma + \varphi_p \tag{83}$$

și se ține seama de valoarea (30) a lui γ , precum și de valorile lui $R(x_0) \sin[x_0 - \alpha(x_0)]$ și $R(x_0) \cos[x_0 - \alpha(x_0)]$, ecuația (80) se scrie

$$G(\varepsilon, \varphi_p) = (1 + b^2) e^{a\varphi_p} - (1 + a^2) e^{b\varphi_p} - [a(1 + b^2) e^{-a\varepsilon} - b(1 + a^2) e^{-b\varepsilon}] \sin(\varphi_p + \varepsilon) - [(1 + b^2) e^{-a\varepsilon} - (1 + a^2) e^{-b\varepsilon}] \cos(\varphi_p + \varepsilon) = 0. \tag{83_1}$$

Se deduce din (83₁) că $G(0, 0) = G'_{\varphi_p}(\varepsilon, \varphi_p)_{\varepsilon=\varphi_p=0} = G''_{\varphi_p^2}(\varepsilon, \varphi_p)_{\varepsilon=\varphi_p=0} = 0$, $G^{(3)}_{\varphi_p^3}(\varepsilon, \varphi_p)_{\varepsilon=\varphi_p=0} = (a - b)(1 + a^2)(1 + b^2) > 0$, așa că teorema de analiză de care ne-am folosit rămîne în putere (eventual în afară de derivabilitatea rădăcinii).

Spre a justifica afirmația de mai sus, vom înlocui în (83₁), pentru înlesnirea scrisorii, pe ε cu x și pe φ_p cu y . Se obține astfel ecuația

$$G(x, y) = (1 + b^2) e^{ay} - (1 + a^2) e^{by} - [a(1 + b^2) e^{-ax} - b(1 + a^2) e^{-bx}] \sin(x + y) - [(1 + b^2) e^{-ax} - (1 + a^2) e^{-bx}] \cos(x + y) = 0 \tag{84}$$

cu condițiile $G(0, 0) = G'_x(0, 0) = G'_y(0, 0) = G''_{yy}(0, 0) = 0$, $G''_{yy}(0, 0) = (a-b)(1+a^2)(1+b^2) > 0$. Dacă se înseamnă $G(x, y) = G_x(y)$, se obține

$$G_0(y) = (1+b^2)e^{ay} - (1+a^2)e^{by} - [a(1+b^2) - b(1+a^2)] \sin y + (a^2 - b^2) \cos y \quad (85)$$

$$G'_0(y) = a(1+b^2)e^{ay} - b(1+a^2)e^{by} - [a(1+b^2) - b(1+a^2)] \cos y + (b^2 - a^2) \sin y \quad (86)$$

$$G''_0(y) = a^2(1+b^2)e^{ay} - b^2(1+a^2)e^{by} + [a(1+b^2) - b(1+a^2)] \sin y + (b^2 - a^2) \cos y \quad (87)$$

$$G'''_0(y) = a^3(1+b^2)e^{ay} - b^3(1+a^2)e^{by} + [a(1+b^2) - b(1+a^2)] \cos y + (a^2 - b^2) \sin y \quad (88)$$

$$G'''_0(0) = (a-b)(1+a^2)(1+b^2) > 0 \quad (89)$$

| y | $-Y$ | 0 | Y |
|-------------|--------|-----|--------|
| $G'''_0(y)$ | + | + | + |
| $G''_0(y)$ | - | 0 | + |
| $G'_0(y)$ | ↘ + | 0 | ↗ + |
| $G_0(y)$ | ↗ - | 0 | ↘ + |

Se deduce din tabelul de variație alăturat că există un interval fix $(-Y, Y)$ în care funcția $G_0(y)$ este crescătoare, avîndu-se:

$$\operatorname{sgn} G_0(y) = \operatorname{sgn} y \text{ și } G_0(0) = 0. \quad (90)$$

Reluînd demonstrația teoremei de existență a funcțiilor implicite și ținînd seama de condițiile speciale pe care le satisface funcția $G(x, y)$ (care nu coincid cu condițiile uzuale cerute de teorema de existență și care sînt numai suficiente), se constată că există un interval cu centrul în punctul $x=0$ astfel încît

oricare ar fi \bar{x} din acel interval, există cel puțin o valoare corespunzătoare \bar{y} , dintr-un anumit interval cu centrul în punctul $y=0$, astfel încît $G(\bar{x}, \bar{y})=0$. Deoarece funcția $G(x, y)$ nu verifică condițiile utilizate în demonstrația unicității rădăcinii din teorema de existență amintită, nu se poate folosi acea demonstrație în cazul de față. Cu toate acestea, valoarea \bar{y} corespunzătoare valorii \bar{x} este unică conform lemei 8. Continuitatea funcției implicite $y=f(x)$ în punctul $x=0$ se demonstrează ca în teorema de existență amintită.

Cum pentru $x_0 < \gamma$ se are pe figura 27, $x_0 - s > \pi$, evident că rădăcina în chestiune a ecuației (80) este \bar{s} . Cînd $x_0 > \gamma$, rădăcina în chestiune (care tinde spre γ o dată cu x_0) este evident s (avîndu-se în fig. 28, $x_0 - \sigma > \pi$). (91)

Din (83₁) s-a avut $G(0, 0) = 0$, deci de aici și din (68) se deduce că în (80) se are $F(\gamma, \gamma) = 0$. Definind dar valorile $s(\gamma) = \gamma$ (cînd $x_0 \rightarrow \gamma$ și $x_0 > \gamma$), $\bar{s}(\gamma) = \gamma$ (cînd $x_0 \rightarrow \gamma$, $x_0 < \gamma$), se deduce de aici și din (91) că:

$$\bar{s} \text{ și } s \text{ sînt continue pentru valoarea } \gamma \text{ a lui } x_0. \quad (92)$$

Dacă se înseamnă cu $\rho_p^{(\gamma)}$ valoarea lui ρ_p pentru $x_0 = \gamma$, se obține în (83₁) $G(0, \rho_p^{(\gamma)} - \gamma) = 0$, $G_{\varphi_p}(\varepsilon, \varphi_p)_{\varepsilon=0, \varphi_p = \rho_p^{(\gamma)} - \gamma} \neq 0$ (lema 2), așa că cu ajutorul teoremei de existență mai sus amintită se deduce că $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_p(\varepsilon) = \rho_p^{(\gamma)} - \gamma$, de unde se vede cu ajutorul lui (83) că

$$\lim_{x_0 \rightarrow \gamma} \rho = \rho_p^{(\gamma)} \quad (p = 1). \quad (93)$$

Din (82), (92) și (93) se deduce afirmația lemei.

§ 6. Se va demonstra următoarea

TEOREMA III:

$$\inf_{x_0 < \gamma} (\bar{s} - s) = \inf_{x_0 > \gamma} (x_0 - \sigma) = \gamma - \sigma(\gamma) = \Delta \quad (94)$$

Se vor da două demonstrații teoremei în chestiune.

Demonstrația 1. Se are din (81)

$$\rho'_p(x_0) = \frac{R'(x_0) \sin [\rho_p - \alpha(x_0)] - R(x_0) \alpha'(x_0) \cos [\rho_p - \alpha(x_0)]}{aAe^{a\rho_p} + bBe^{b\rho_p} - R(x_0) \cos (\rho_p - \alpha(x_0))}. \quad (94_1)$$

Înlocuind în (94₁) valorile din (9) și (10) ale lui $R'(x_0)$ și $\alpha'(x_0)$, se obține

$$\rho'_p(x_0) = \frac{A(1+a^2)e^{ax_0} + B(1+b^2)e^{bx_0}}{aAe^{a\rho_p} + bBe^{b\rho_p} - R \cos (\rho_p - \alpha)} \sin (\rho_p - x_0). \quad (94_2)$$

Însemnînd dar

$$D(x_0) = x_0 - \sigma \quad (95)$$

se are cu ajutorul lui (94₂)

$$D'(x_0) = 1 - \sigma'(x_0) = 1 + \frac{A(1+a^2)e^{ax_0} + B(1+b^2)e^{bx_0}}{aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos (\sigma - \alpha)} \sin (x_0 - \sigma). \quad (96)$$

Ori, se vede în fig. 28, cu ajutorul lemei 9, că $\pi < x_0 - \sigma < 2\pi^3$, iar

$$aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos (\sigma - \alpha) = Y'(\sigma) - Z'(\sigma) < 0$$

$$A(1+a^2)e^{ax_0} + B(1+b^2)e^{bx_0} > 0$$

pentru $x > \gamma$. Deci în (96) se obține $D'(x_0) > 0$ pentru $x_0 > \gamma$, așa că $\inf_{x_0 > \gamma} D(x_0)$ are loc pentru $x_0 = \gamma$. Dacă $x_0 < \gamma$, se obține din (94₂) însemnînd

$$D_1(x_0) = \bar{s}(x_0) - s(x_0) \quad (97)$$

$$D'_1(x_0) = [A(1+a^2)e^{ax_0} + B(1+b^2)e^{bx_0}] \left[\frac{\sin (\bar{s} - x_0)}{Y'(\bar{s}) - Z'(\bar{s})} + \frac{\sin (x_0 - s)}{Y'(s) - Z'(s)} \right]. \quad (98)$$

³⁾ Deoarece din demonstrația lemei 9 se deduce că există un interval cu centrul în y astfel încît oricare ar fi x_0 din acest interval, avem $x_0 - \sigma < 2\pi$.

Ori, se vede în figura 27 că $0 < \bar{s} - x_0 < \pi$, $\pi < x_0 - s < 2\pi$, $Y'(\bar{s}) - Z'(\bar{s}) > 0$, $Y'(s) - Z'(s) < 0$, iar $A(1+a^2)e^{ax_0} + B(1+b^2)e^{bx_0} < 0$ pentru $x_0 < \gamma$, așa că în (98) se are $D'_1(x_0) < 0$ pentru $x_0 < \gamma$, $\inf_{x_0 < \gamma} D_1(x_0)$ are loc pentru $x_0 = \gamma$. (98₁)

Demonstratia 2. Presupunînd iarăși mai întîi $x_0 > \gamma$ și însemnînd $\varphi = \sigma - x_0$ (99)

se are, înlocuind în (96) pe $R \cos(\sigma - \alpha)$ cu $R \cos(\sigma - x_0 + x_0 - \alpha)$, iar pe $R \sin(x_0 - \alpha)$ și $R \cos(x_0 - \alpha)$ cu valorile lor și scriind că $D'(x_0) = 0$,

$$aAe^{ax_0}[e^{a\varphi} - (\cos \varphi + a \sin \varphi)] + bBe^{bx_0}[e^{b\varphi} - (\cos \varphi + b \sin \varphi)] = 0. \quad (100)$$

Relația (80) se scrie cu ajutorul lui (99) și al valorilor amintite ale lui $R \sin(x_0 - \alpha)$ și $R \cos(x_0 - \alpha)$:

$$Ae^{ax_0}[e^{a\varphi} - (\cos \varphi + a \sin \varphi)] + Be^{bx_0}[e^{b\varphi} - (\cos \varphi + b \sin \varphi)] = 0. \quad (101)$$

Din (100) și (101) se deduce

$$e^{a\varphi} - (\cos \varphi + a \sin \varphi) = e^{b\varphi} - (\cos \varphi + b \sin \varphi) = 0. \quad (102)$$

Ori, relațiile (102) nu pot avea loc pentru același φ , fiindcă în caz contrar s-ar deduce din ele

$$\begin{aligned} (a-b) \cos \varphi &= ae^{b\varphi} - be^{a\varphi} \\ (a-b) \sin \varphi &= e^{a\varphi} - e^{b\varphi} \end{aligned}$$

de unde

$$F(\varphi) = (e^{a\varphi} - e^{b\varphi})^2 + (ae^{b\varphi} - be^{a\varphi})^2 = (a-b)^2$$

avînd

$$F'(\varphi) = 2e^{b\varphi}[e^{(a-b)\varphi} - 1][a(1+b^2)e^{(a-b)\varphi} - b(1+a^2)].$$

Se deduce de aici că pentru $\varphi < 0$, relația $F(\varphi) = (a-b)^2$ nu poate avea loc. Deci $D'(x_0)$ nu se anulează pentru nici un $x_0 > \gamma$ și este o funcție continuă de x_0 , cum se deduce din (96) și din lema 12. Se are dar $\text{sg } D'(x_0) = \text{sg } D'(\beta)$. Ori, din (10) $x_0 > \gamma$

se are $\alpha'(\beta) = 1 - ab < 0$ iar $\cos[\beta - \alpha(\beta)] = 0$ (dat fiind că $\sin[\beta - \alpha(\beta)] = -1$), așa că

$$\cos[\sigma(\beta) - \alpha(\beta)] = \cos[\sigma(\beta) - \beta + \beta - \alpha(\beta)] = -\sin[\beta - \sigma(\beta)] > 0,$$

dat fiind că se are în fig. 31, $\frac{3}{2}\pi < \beta - \sigma(\beta) < 2\pi$. Așadar expresia lui $D'(x_0)$, dată de (94₁), ne dă $D'(\beta) > 0$, deci $D(x_0)$ crește cu $x_0 > \gamma$. Trecînd la cazul $x_0 < \gamma$ și însemnînd

$$\varphi = s - x_0 < 0, \quad \bar{\varphi} = \bar{s} - x_0 > 0, \quad (103)$$

$$D_1(x_0) = \bar{s}(x_0) - s(x_0), \quad (104)$$

se capătă din (80) relația (101) și relația

$$Ae^{ax_0}[e^{a\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + a \sin \bar{\varphi})] + Be^{bx_0}[e^{b\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + b \sin \bar{\varphi})] = 0 \quad (105)$$

Cu ajutorul relației (94₂), relația $D'_1(x_0) = 0$ dată de (104) se scrie

$$\begin{aligned} aAe^{ax_0}\{ \sin \bar{\varphi} [e^{a\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + a \sin \bar{\varphi})] - \\ - \sin \varphi [e^{a\varphi} - (\cos \varphi + a \sin \varphi)] \} + \\ + bBe^{bx_0}\{ \sin \bar{\varphi} [e^{b\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + b \sin \bar{\varphi})] - \\ - \sin \varphi [e^{b\varphi} - (\cos \varphi + b \sin \varphi)] \} = 0. \end{aligned} \quad (106)$$

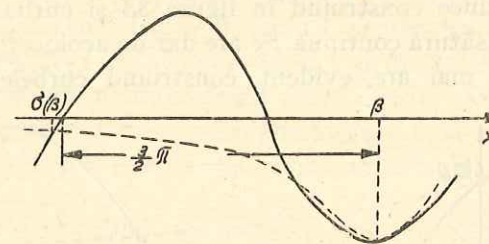


Fig. 31

Dacă se înseamnă

$$\begin{aligned} X &= Ae^{ax_0}[e^{a\varphi} - (\cos \varphi + a \sin \varphi)]; \quad Y = Be^{bx_0}[e^{b\varphi} - (\cos \varphi + b \sin \varphi)], \\ \bar{X} &= Ae^{ax_0}[e^{a\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + a \sin \bar{\varphi})]; \quad \bar{Y} = Be^{bx_0}[e^{b\bar{\varphi}} - (\cos \bar{\varphi} + b \sin \bar{\varphi})], \end{aligned} \quad (107)$$

relațiile (101), (105), (106) se vor scrie respectiv

$$X + Y = 0, \quad \bar{X} + \bar{Y} = 0, \quad a(X \sin \bar{\varphi} - \bar{X} \sin \varphi) + b(Y \sin \bar{\varphi} - \bar{Y} \sin \varphi) = 0.$$

Luînd din primele două

$$Y = -X, \quad \bar{Y} = -\bar{X} \quad (108)$$

și înlocuind aceste valori în a treia, se are

$$X \sin \bar{\varphi} = \bar{X} \sin \varphi, \quad (109)$$

relație care se mai scrie cu ajutorul lui (108)

$$Y \sin \bar{\varphi} = \bar{Y} \sin \varphi. \quad (110)$$

Înlocuind în (109) și (110) valorile (107) se capătă

$$\frac{\sin \varphi}{e^{a\varphi} - \cos \varphi} = \frac{\sin \bar{\varphi}}{e^{a\bar{\varphi}} - \cos \bar{\varphi}}; \quad \frac{\sin \varphi}{e^{b\varphi} - \cos \varphi} = \frac{\sin \bar{\varphi}}{e^{b\bar{\varphi}} - \cos \bar{\varphi}}. \quad (111)$$

Ori, relațiile (111) nu pot avea loc pentru valori (104) ($\varphi < 0$ și $\bar{\varphi} > 0$) pentru care $\bar{\varphi} - \varphi < 2\pi$, cum se poate vedea îndată însemnînd

$$f_a(x) = \frac{\sin x}{e^{ax} - \cos x}, \text{ ceea ce ne dă } f'_a(x) = e^{ax} \frac{\cos x - a \sin x - e^{-ax}}{(e^{ax} - \cos x)^2}.$$

Rădăcinile lui $f'_a(x)$ (care se vor însemna cu $x_1^{(a)} < x_2^{(a)} < \dots$) sînt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor de ecuații respectiv $y = \cos x - a \sin x$, $y = e^{-ax}$ (fig. 32). Rădăcinile numitorului lui $f_a(x)$ (care se vor însemna cu $x_0^{(a)} > \bar{x}_0^{(a)} > \dots$) sînt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor de ecuații respectiv $y = \cos x$, $y = e^{ax}$ (fig. 33). În fig. 34 sînt construite pe același sistem de

axe curbele de ecuații $y=f_b(x)$ (punctat) și $y=f_a(x)$ (plin). ($f_b(x) = \frac{\sin x}{e^{bx} - \cos x}$), care se vor însemna respectiv cu (C_b) și (C_a) . Poziția lor reciprocă se deduce construind în figura 33 și curba de ecuație $y=e^{bx}$ indicată printr-o trăsătură continuă. Se are dar de acolo $\bar{x}_{2p}^{(a)} < \bar{x}_{2p}^{(b)}$ și $\bar{x}_{2p+1}^{(a)} > \bar{x}_{2p+1}^{(b)}$ ($p=0,1,\dots$). Se mai are, evident, construind curbele de ecuații $y = \cos x - b \sin x$ și

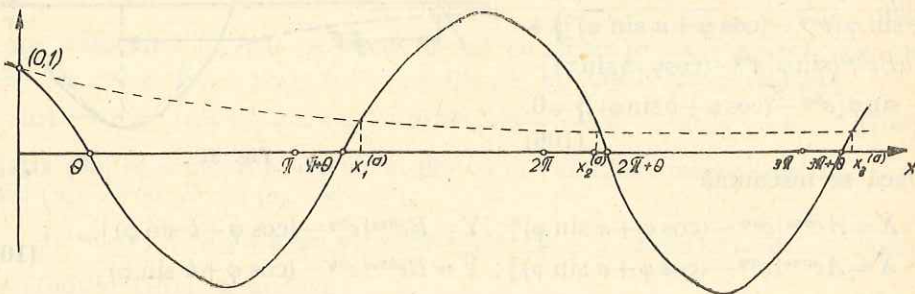


Fig. 32

$y = e^{-bx} : p\pi < x_p^{(b)} < (p+1)\pi$, ($p=1,2,\dots$). De asemenea, se are $f_a(x) \neq f_b(x)$ pentru $x \neq p\pi$ (p întreg), iar pentru $\varepsilon > 0$ destul de mic se are

- (1°) $f_a[(2p+1)\pi + \varepsilon] > f_b[(2p+1)\pi + \varepsilon]$
- (2°) $f_a[(2p+1)\pi - \varepsilon] < f_b[(2p+1)\pi - \varepsilon]$
- (3°) $f_a[-(2p+1)\pi + \varepsilon] < f_b[-(2p+1)\pi + \varepsilon]$
- (4°) $f_a[-(2p+1)\pi - \varepsilon] > f_b[-(2p+1)\pi - \varepsilon]$
- (5°) $f_a(2p\pi + \varepsilon) < f_b(2p\pi + \varepsilon)$
- (6°) $f_a(2p\pi - \varepsilon) > f_b(2p\pi - \varepsilon)$
- (7°) $f_a(-2p\pi + \varepsilon) > f_b(-2p\pi + \varepsilon)$
- (8°) $f_a(-2p\pi - \varepsilon) < f_b(-2p\pi - \varepsilon)$

Se obține următorul tabel de variație pentru funcția $f_a(x)$;

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------------|------------------|--------------|-----------------------|--------------|--------------------|-----------------------|------------------------|--------------|----------------|--------------|----------------------|
| x | $-\infty \dots$ | $-(k+1)\pi$ | \bar{x}_k | $-k\pi \dots$ | $-\pi$ | \bar{x}_0 | 0 | π | x_1 | 2π | x_2 | $3\pi \dots$ |
| $f'_a(x)$ | | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + | 0 | - |
| $f_a(x)$ | | $\dots \searrow$ | $0 \searrow$ | $\mp \infty \searrow$ | $0 \searrow$ | $\dots 0 \searrow$ | $\pm \infty \searrow$ | $\frac{1}{a} \searrow$ | $0 \searrow$ | $m_1 \nearrow$ | $0 \nearrow$ | $M_2 \searrow \dots$ |

Relațiile (1°), (2°), (3°), (4°) au loc și pentru $p=0$. Se are

$$\left. \begin{matrix} f'_a(2p\pi) < f'_b(2p\pi) \\ f'_a(-2p\pi) > f'_b(-2p\pi) \end{matrix} \right\} p \geq 1 \quad \left. \begin{matrix} f'_a[(2p+1)\pi] > f'_b[(2p+1)\pi] \\ f'_a[-(2p+1)\pi] < f'_b[-(2p+1)\pi] \end{matrix} \right\} p \geq 0.$$

Din indicațiile de mai sus se deduce îndată poziția curbelor (C_a) și (C_b) din figura 34, care ne arată că relațiile (111), ce se scriu

$$f_a(\varphi) = f_a(\bar{\varphi}); \quad f_b(\varphi) = f_b(\bar{\varphi}) \tag{112}$$

nu pot să aibă loc pentru $\varphi < 0, \bar{\varphi} > 0, \bar{\varphi} - \varphi < 2\pi$, fiindcă dacă $f_a(\varphi) > 0$, cum pentru $x > 0$ când $f_a(x) > 0$, se are $f_b(x) > f_a(x)$, se deduce din (112)

că $f_b(\bar{\varphi}) > f_a(\bar{\varphi})$ și deci că $f_b(\varphi) > f_a(\varphi)$, adică valorile lui φ și $\bar{\varphi}$ care ar verifica relațiile (112) și care ar da cea mai mică valoare pentru $\bar{\varphi} - \varphi$, ar fi așezate astfel: sau $x_0^{(b)} < \varphi \leq 0$ și $2\pi < \bar{\varphi}$ sau $x_2^{(b)} < \varphi < -2\pi$ și $0 < \bar{\varphi} < \pi$; ori în amîndouă cazurile se are $\bar{\varphi} - \varphi > 2\pi$. Dacă $f_a(\varphi) < 0$, atunci pentru $x > 0$ și $f_a(\bar{\varphi}) < 0$ are loc inegalitatea $f_b(\bar{\varphi}) \leq f_a(\bar{\varphi})$. Se deduce de aici și din (112) că $f_b(\varphi) < f_a(\varphi)$, așa că valorile lui φ și $\bar{\varphi}$ care ne interesează vor fi așezate astfel: $-2\pi < \varphi < x_1^{(b)}$ și $\pi < \bar{\varphi} \leq x_1^{(a)}$. În acest caz, $\bar{\varphi} - \varphi > 2\pi$. Dacă $f_a(\varphi) = 0$, se vede îndată că valorile în chestiune sînt $\varphi = -\pi, \bar{\varphi} = \pi$, care verifică relațiile (111). Se are atunci $\bar{\varphi} - \varphi = 2\pi$.

Așadar, relațiile (101), (105) și (106) nu pot să aibă loc pentru aceiași φ și $\bar{\varphi}$ din (104) dacă $\bar{\varphi} - \varphi = s - s < 2\pi$. Ajungem astfel la următoarea concluzie:

Pentru valorile lui $x_0 < \gamma$, pentru care $D_1(x_0)$ din (104) este $< 2\pi$, se are $D'_1(x_0) \neq 0$. (113)

În continuarea demonstrației se va folosi următoarea

L e m a 13. Dacă există valori ale lui $x_0 < \gamma$ pentru care $D_1(x_0) < 2\pi$, ele alcătuiesc un interval deschis $\mathcal{I} = (a_1, \gamma)$. Cu alte cuvinte, pentru orice $x_0 \leq a_1$, se are $D_1(x_0) \geq 2\pi (D_1(a_1) = 2\pi)$.

Demonstrația lemei este imediată. Pentru $x_0 \leq \gamma - 2\pi$, destul de depărtat la stînga punctului de inflexiune al lui (Y) , ca să se aibă $\bar{s} > \beta$ au loc relațiile

$$D_1(x_0) = \bar{s} - s > \beta - s > \beta - x_0 = \beta - \gamma + \gamma - x_0 > 2\pi. \tag{114}$$

Să presupunem că $D_1(x_0^{(1)}) \geq 2\pi$ și că ar exista un $x_0^{(2)} < x_0^{(1)}$ pentru care $D_1(x_0^{(2)}) < 2\pi$. Cum pentru x_0 destul de mic se are $D_1(x_0) > 2\pi$ (relația (114)) și cum $D_1(x_0)$ și $D'_1(x_0)$ sînt funcții continue de $x_0 < \gamma$ (lema 12 și relația (98)), se deduce că pentru un $x_0^{(3)}$ se are $D_1(x_0^{(3)}) < 2\pi$ și $D'_1(x_0^{(3)}) = 0$, contra propoziției (113). Așadar, dacă pentru un $x_0 = x_0^{(1)}$ se are $D_1(x_0) \geq 2\pi$, se va avea aceeași relație pentru toți $x_0 < x_0^{(1)}$, ceea ce ne arată că dacă $D_1(x_0^{(2)}) < 2\pi$, se va avea aceeași relație pentru toți $x_0 > x_0^{(2)}$, deci că eventualele valori ale lui $x_0 < \gamma$ pentru care $D_1(x_0) < 2\pi$ alcătuiesc un interval $\mathcal{I} = (a_1, \gamma)$, (a_1 fiind cea mai mare valoare a lui $x_0 < \gamma$ pentru care $D_1(x_0) = 2\pi$), ceea ce demonstrează lema.

Întorcîndu-ne la demonstrația teoremei III, se va deduce din lema 13 și din (113) că:

Pentru valorile lui x_0 pentru care $D_1(x_0) < 2\pi$, expresia $D'_1(x_0)$ are un semn constant. (114₀)

Ori, din fig. 27 și 28 se deduce că $\lim_{x_0 \rightarrow \gamma} s = \lim_{x_0 \rightarrow \gamma} \sigma$, dat fiind că (Z) are

aceeași poziție limită cînd $x_0 \rightarrow \gamma$ prin valori mai mari sau mai mici ca γ . Așadar, din relația de mai sus și din (91) se deduce

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow \gamma \\ x_0 < \gamma}} (\bar{s} - s) = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow \gamma \\ x_0 > \gamma}} (x_0 - \sigma) = \gamma - \sigma(\tau). \tag{114₁}$$

Pe de altă parte, se va vedea mai departe (relația (122)) că $\gamma - \sigma(\gamma) < 2\pi$, așa că $D_1(x_0)$ fiind continuă, se deduce din (114₁) că pentru $x_0 < \gamma$ destul de aproape de γ se are $D_1(x_0) < 2\pi$, adică intervalul \mathcal{J} din lema 13 există.

Se are în (98), ținând seama că pentru $x_0 < \gamma$ destul de aproape de γ , \bar{s} este arbitrar de aproape de $\gamma < \beta$:

$$R(\bar{s}) \cos(\bar{s} - \alpha(\bar{s})) = aAe^{a\bar{s}} + bBe^{b\bar{s}}$$

$$\frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{Y'(\bar{s}) - Z'(\bar{s})} = \frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{aAe^{a\bar{s}} + bBe^{b\bar{s}} - R \cos(\bar{s} - \alpha)} \sim 2(aAe^{a\bar{s}} + bBe^{b\bar{s}}) \frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{F(\bar{s}) - F(x_0)}$$

unde $F(x) = R^2(x)$

Deci pentru x_0 foarte aproape de γ , deci și de \bar{s} , raportul

$$\left| \frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{F(\bar{s}) - F(x_0)} \right| = \left| \frac{\frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{\bar{s} - x_0}}{\frac{F(\bar{s}) - F(x_0)}{\bar{s} - x_0}} \right| \sim \frac{1}{|F'(x_0)|}$$

deci foarte mare în valoare absolută, și cum s-a văzut în (98₁) că $\frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{Y'(\bar{s}) - Z'(\bar{s})} > 0$, iar expresia $\frac{\sin(\bar{s} - x_0)}{Y'(\bar{s}) - Z'(\bar{s})}$ rămîne evident finită⁴⁾, se deduce că pentru valorile amintite ale lui x_0 — și deci în tot intervalul \mathcal{J} , cum arată relația (114₀), se are în (98) $D'(x_0) < 0$. Deci $D_1(x_0)$ scade cînd $x_0 < \gamma$ crește.

Din relațiile (103), (114₂) și (114₁) se deduce relația (94) a teoremei în chestiune.

Lema 14. In cazul $ab > 1$, are loc inegalitatea $L < 2\pi$.

§ 7. *Demonstrație.* Se are din relațiile (79) și (94)

$$L_4 = \inf_{A,B} [\gamma - \sigma(\gamma)] = \inf_{A,B} \Delta. \quad (114_3)$$

Derivînd relația

$$Ae^{a\sigma} + Be^{b\sigma} = R \sin(\sigma - \alpha) \quad (115)$$

în raport cu B , se are

$$\frac{d\sigma}{dB} = \frac{-e^{b\sigma} - R \cos(\sigma - \alpha) \frac{d\alpha}{dB} + \frac{dR}{dB} \sin(\sigma - \alpha)}{aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos(\sigma - \alpha)}. \quad (116)$$

Ori din relațiile (30), (29) și (28), se are

$$\frac{d\alpha}{dB} = \frac{d\gamma}{dB} = \frac{1}{(a-b)B}; \quad \frac{dR}{dB} = \frac{a}{a-b} \frac{R}{B}$$

valori pe care înlocuindu-le în (116) se are

$$\frac{d\sigma}{dB} = \frac{aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos(\sigma - \alpha)}{B(a-b)[aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos(\sigma - \alpha)]} = \frac{1}{(a-b)B} = \frac{d\gamma}{dB}$$

⁴⁾ și $aAe^{a\gamma} + bBe^{b\gamma} \neq 0$.

dat fiind că

$$aAe^{a\sigma} + bBe^{b\sigma} - R \cos(\sigma - \alpha) \neq 0 \quad (\text{conform lemei 2}).$$

Deci în (94) se are $\frac{d\Delta}{dB} \equiv 0$, așa că Δ nu depinde de B . Se vede la fel că

Δ nu depinde nici de A . Luînd din (94) $\sigma = \gamma - \Delta$, relația (115) se scrie cu ajutorul relațiilor $R \sin(\gamma - \alpha) = Ae^{a\gamma} + Be^{b\gamma}$, $R \cos(\gamma - \alpha) = aAe^{a\gamma} + bBe^{b\gamma}$ și (30):

$$(1+a^2)e^{-b\Delta} - (1+b^2)e^{-a\Delta} + (a-b)[(ab-1) \sin \Delta - (a+b) \cos \Delta] = 0. \quad (117)$$

Așa că Δ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației (117). Rădăcinile ei sînt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor (Y_1) și (Y_2) de ecuații respectiv

$$Y_1 = (a-b)[(ab-1) \sin \varphi - (a+b) \cos \varphi]$$

$$Y_2 = (1+b^2)e^{-a\varphi} - (1+a^2)e^{-b\varphi}$$

desenate în figura 35, respectiv plin și punctat.

Se poate vedea îndată că:

Curbele (Y_1) și (Y_2) nu se taie, nici nu sînt tangente în puncte de abscisă $0 < \varphi \leq \pi$. Într-adevăr, dacă curbele (Y_1) și (Y_2) s-ar tăia în puncte de abscisă $0 < \varphi \leq \pi$, ținînd seama că are loc dezvoltarea

$$Y_1 - Y_2 = f(\varphi) = (a-b)(1+a^2)(1+b^2) \frac{\varphi^3}{6} + \dots \quad (118_1)$$

și că deci pentru $\varphi > 0$ și destul de mic are loc $Y_1 > Y_2$, curbele (Y_1) și (Y_2) ar avea neapărat poziția din fig. 36, unde s-a însemnat cu φ cea mai mică rădăcină pozitivă a funcției $f(\varphi)$ din (118₁). Însemnînd dar

$$K = f'(\bar{\varphi}) = (a-b)[(ab-1) \cos \bar{\varphi} + (a+b) \sin \bar{\varphi}] + a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}} \quad (119)$$

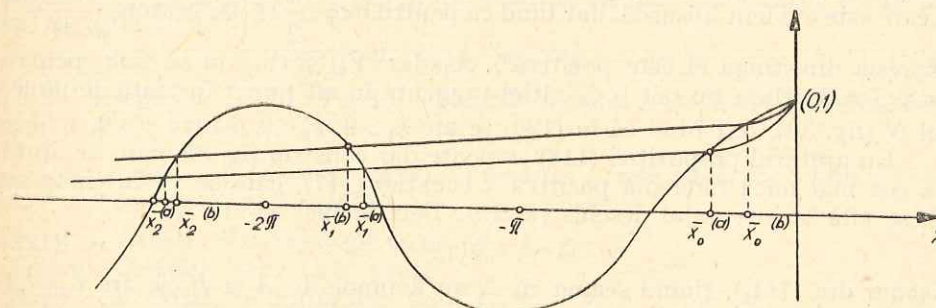


Fig. 33

se deduce de aci și din relația $f(\bar{\varphi}) = 0$:

$$(ab-1) \sin \bar{\varphi} - (a+b) \cos \bar{\varphi} = \frac{1}{a-b} [(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - (1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}]$$

$$(ab-1) \cos \bar{\varphi} + (a+b) \sin \bar{\varphi} = \frac{1}{a-b} [k - a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} + b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}].$$

Ridicînd la patrat termenii celor două relații căpătate, se obține prin adunare o relație din care se deduce

$$k_1 = a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)^2 - [(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - (1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}]^2} \quad (120)$$

$$k_2 = a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}} - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)^2 - [(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - (1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}]^2}$$

Expresia $a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}$ se anulează pentru $\bar{\varphi} = \frac{1}{a-b} \log \frac{a(1+b^2)}{b(1+a^2)} < 0$ (în condițiile cazului cercetat), așa că pentru $\bar{\varphi} > 0$ are loc inegalitatea

$$a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}} < 0 \quad (121)$$

de unde se deduce că în (120) se are $k_2 < 0$. Relația $k_1 = 0$ se scrie prin izolarea rădăcinii patrăte și ridicarea la patrat

$$G(\bar{\varphi}) = (e^{-a\bar{\varphi}} - e^{-b\bar{\varphi}})^2 + (be^{-a\bar{\varphi}} - ae^{-b\bar{\varphi}})^2 - (a-b)^2 = 0.$$

Privind pe $\bar{\varphi}$ ca o variabilă independentă, se are

$$G'(\bar{\varphi}) = -2(e^{-a\bar{\varphi}} - e^{-b\bar{\varphi}})[a(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - b(1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}],$$

de unde se deduce cu ajutorul lui (121) că pentru orice $\bar{\varphi} > 0$, are loc $G'(\bar{\varphi}) < 0$, deci cum pentru $\bar{\varphi}$ destul de mare evident că $k_1 > 0$, se deduce că pentru $\bar{\varphi} > 0$, $k_1 > 0$. Așadar, se are din fig. 36 și din (119), $f'(\bar{\varphi}) = k_2$, relație care se scrie

$$(a-b)[(ab-1) \cos \bar{\varphi} + (a+b) \sin \bar{\varphi}] = -\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)^2 - [(1+b^2)e^{-a\bar{\varphi}} - (1+a^2)e^{-b\bar{\varphi}}]^2}$$

și care este evident absurdă, dat fiind că pentru $0 < \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2} + \xi$ ($0 < \xi = \arctg \frac{a+b}{ab-1} < \frac{\pi}{2}$)

expresia din stînga ei este pozitivă⁵). Așadar (Y_1) și (Y_2) nu se taie, pentru $0 < \varphi \leq \pi$. Curbele nu pot fi de altfel tangente în alt punct în afară de punctul N (fig. 36), dat fiind că în (120) se are $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ pentru $\bar{\varphi} > 0$.

Cu ajutorul propoziției (118) se poate dar construi fig. 35, care ne arată că cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației (117), care se va însemna cu Ψ , se află în intervalul deschis $(\pi, 2\pi)$. Deci în (94) se are

$$\pi < \Delta = \gamma - \sigma(\gamma) = \Psi < 2\pi. \quad (122)$$

Așadar din (114₃), ținînd seama că Δ nu depinde de A și B , se are $L_4 = \Delta$, iar de aici și din (122)

$$L_4 = \Psi < 2\pi. \quad (123)$$

§ 8. L e m a 15. In cazul $ab > 1$, are loc egalitatea $L = L_4$.

⁵Deci (Y_1) și (Y_2) nu se taie pentru $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} + \xi$; se deduce ușor pe un grafic al funcțiilor $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$, dat fiind că pentru $\varphi > 0$ se are $Y_2(\varphi) < 0$, că (Y_1) și (Y_2) nu se taie nici pentru $\frac{\pi}{2} + \xi \leq \varphi < \pi$.

Demonstrație. Dacă $A > 0$, $B > 0$, curbele (Y) și (Z) au dispoziția din fig. 37, de unde se vede că distanța dintre patru rădăcini simple consecutive ale unei integrale, sau dintre una dublă și cea simplă anteprecedentă (singurele cazuri care se pot prezenta), este mai mare ca 2π .

Dacă $A = 0$, $B > 0$ sau $B = 0$, $A > 0$, se are dispoziția din fig. 37, iar dacă $A = 0$, $B < 0$, sau $B = 0$, $A < 0$, dispoziția din fig. 38, care ne duce la

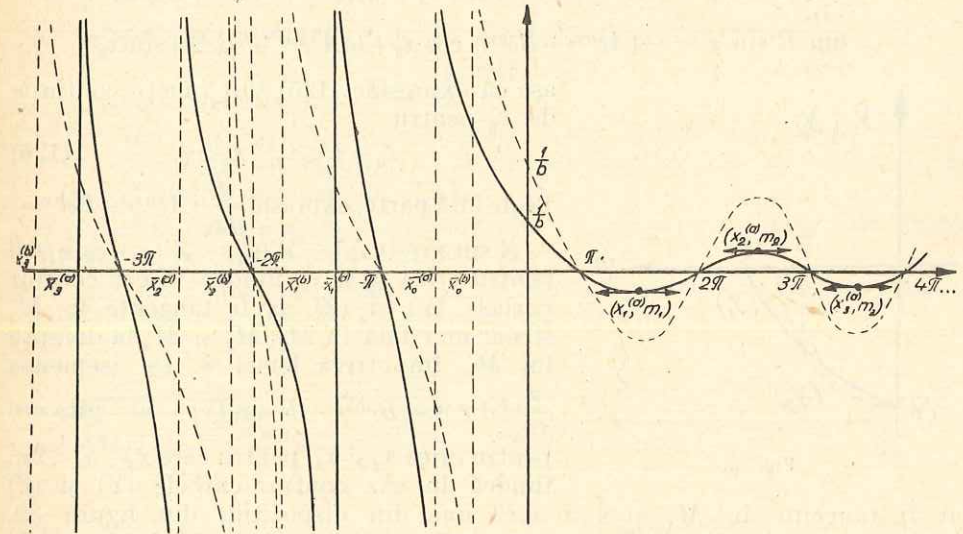


Fig. 34

aceleași concluzii. Așadar cazurile 1, 2 și 3 din (5) ne dau intervale de lungime maximă $L_1, L_2, L_3 > 2\pi$. De aici și din (123) se deduce că în cazul 1° din (3) au loc egalitățile:

$$L = \min \{L_1, L_2, L_3, L_4\} = L_4 = \Psi. \quad (124)$$

Ținînd seamă de lemele 14 și 15, sîntem în măsură să formulăm următoarea concluzie:

TEOREMA IV. In cazul $ab > 1$, numărul L este rădăcina cuprinsă în $(\pi, 2\pi)$ a ecuației în Δ , (117).

§ 9. Cîteva observații. 1°. Cu ajutorul relației (122) se poate dovedi că există o infinitate de grupe de patru valori ale absciselor (x_1, x_2, x_3, x_4) pentru care $x_4 - x_1 < 2\pi$. Această afirmație a mai fost stabilită pe altă cale în cadrul lemei 9.

Presupunînd pentru aceasta mai întîi $x_3 < \gamma$, se va avea din (62) și (63)

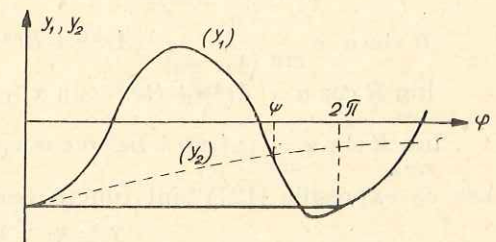


Fig. 35

$$R \sin \alpha = \frac{1}{\sin(x_3 - x_2)} [(Ae^{ax_2} + Be^{bx_2}) \sin x_2 - (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \sin x_3] \quad (125)$$

$$R \cos \alpha = \frac{1}{\sin(x_3 - x_2)} [(Ae^{ax_2} + Be^{bx_2}) \cos x_2 - (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos x_3]$$

de unde

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_3} R \cos \alpha = (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \sin x_3 + (aAe^{ax_3} + bBe^{bx_3}) \cos x_3$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_3} R \sin \alpha = -(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos x_3 + (aAe^{ax_3} + bBe^{bx_3}) \sin x_3^6$$

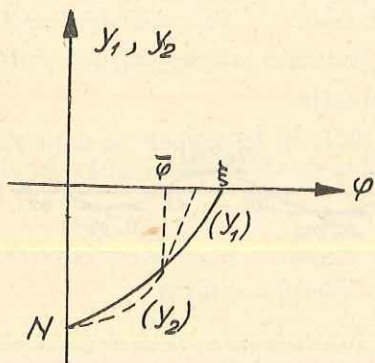


Fig. 36

asa ca expresiile (125) sînt funcții continue de x_2 pentru

$$x_3 - \pi < x_2 \leq x_3 < \gamma. \quad (126)$$

Pe de altă parte, expresia $\frac{d}{dx_1} [Ae^{ax_1} + Be^{bx_1} - R \sin(x_1 - \alpha)] = Y'(x_1) - Z'(x_1)$ este $\neq 0$

pentru orice x_2 și x_3 , fiindcă în caz contrar curbele (Y) și (Z) ar fi tangente în M_1 și s-ar mai tăia în M_2, M_3 și M_4 la dreapta lui M_1 , împotriva lemei 8. De asemenea

$$\frac{d}{dx_4} [Ae^{ax_4} + Be^{bx_4} - R \sin(x_4 - \alpha)] \text{ este } \neq 0$$

pentru orice x_2 și x_3 , pentru care $x_4 - x_1 < 2\pi$, fiindcă în caz contrar curbele (Y) și (Z)

ar fi tangente în M_4 și s-ar avea una din dispozițiile din figura 39, împotriva lemei 7. Folosind dar teorema de analiză amintită în demonstrația lemei 12, și pe (126), se deduce că x_1 și x_4 dați de ecuațiile (61) și (64) sînt funcții continue de x_2 pentru valorile lui x_2 din (126).

Ori, se vede în figura 30 că atunci cînd $x_2 = x_3 = x_0$, au loc egalitățile $x_1 = s$ și $x_4 = \bar{s}$. Luînd dar pe x_2 destul de aproape de x_3 , x_1 și x_4 vor fi oricît de aproape respectiv de s și \bar{s} . Luînd dar pe x_3 în intervalul \mathcal{I} definit în lema 13 și pe x_2 destul de aproape de x_3 , se va deduce din (114₁) și (122) că $x_4 - x_1 < 2\pi$.

Dacă $x_3 \geq \gamma$, se va avea din (63) și (64)

$$R \sin \alpha = \frac{1}{\sin(x_4 - x_3)} [(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \sin x_3 - (Ae^{ax_4} + Be^{bx_4}) \sin x_4] \quad (127)$$

$$R \cos \alpha = \frac{1}{\sin(x_4 - x_3)} [(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos x_3 - (Ae^{ax_4} + Be^{bx_4}) \cos x_4]$$

$$\lim_{x_4 \rightarrow x_3} R \cos \alpha = (Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \sin x_3 + (aAe^{ax_3} + bBe^{bx_3}) \cos x_3$$

$$\lim_{x_4 \rightarrow x_3} R \sin \alpha = -(Ae^{ax_3} + Be^{bx_3}) \cos x_3 + (aAe^{ax_3} + bBe^{bx_3}) \sin x_3^6$$

asa ca expresiile (127) sînt funcții continue de x_4 pentru

$$\gamma \leq x_3 \leq x_4 < \pi + x_3. \quad (128)$$

⁶⁾ Se constată ușor că și derivatele în raport cu variabilele care ne interesează ale lui $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ rămîn finite în intervalul menționat.

S-a văzut mai sus că expresia $\frac{d}{dx_1} [Ae^{ax_1} + Be^{bx_1} - R \sin(x_1 - \alpha)]$ este $\neq 0$ pentru orice x_3 și x_4 , așa că se deduce cu ajutorul teoremei de existență amintite că :

$$\text{Rădăcina } x_1 \text{ dată de ecuația (61) este o funcție} \quad (128_1)$$

continuă de x_4 pentru valorile lui x_4 din (128).

Dat fiind că σ este o funcție continuă de x_0 (lema 12), se deduce din (122) că :

$$\text{Există un interval } [\gamma, \mu] \text{ în care luînd pe } x_0, \text{ se are} \quad (129)$$

$$x_0 - \sigma(x_0) < 2\pi.$$

Ori, se vede pe figura 28 că :

$$\text{Dacă } x_3 = x_4 = x_0, \text{ atunci se are } x_1 = \sigma. \text{ Luînd dar pe } x_4 \text{ destul de aproape de } x_3, \text{ se deduce din (128}_1) \text{ că } x_1 \text{ va fi} \quad (130)$$

$$\text{oricît de apropiat de } \sigma(x_3).$$

Luînd dar pe x_3 în semi-intervalul $[\gamma, \mu]$ și pe x_4 destul de aproape de x_3 , se va deduce din (129) că $x_4 - x_1 < 2\pi$.

2°. Se deduce din (129) că $\mu < \delta$, fiind că pentru $x_0 = \delta$ se are dispoziția din fig. 40, cea din fig. 41 fiind exclusă de lema 7.

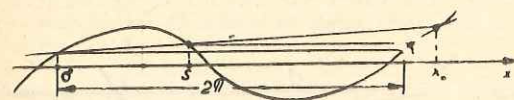


Fig. 37

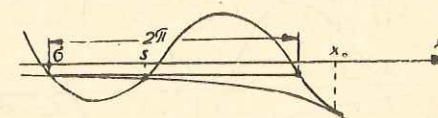


Fig. 38

De aici și din (103) se deduce că $D(x_0) > 2\pi$ pentru $x_0 \geq \delta$, așa că $\mu < \delta$.

Tot din (103) se deduce că :

$$\text{Pentru } x_0 > \mu, \text{ se are } x_0 - \sigma(x_0) > 2\pi \text{ (avînd } \mu - \sigma(\mu) = 2\pi). \quad (131)$$

3°... Vom face o ultimă observație :

$$\text{Dacă } x_4 \geq \gamma + \pi, \text{ se are } x_4 - x_1 \geq 2\pi \text{ pentru orice } x_3 \geq x_3 > x_4 - \pi. \quad (132)$$

Spre a dovedi această observație, se va privi pe M_4 fix, M_3 variabil pe (Y) și deci pe x_1 și x_2 ca funcții de x_3 . Evident că $x_4 > \mu$, fiindcă $\gamma + \pi > \delta > \mu^7$.

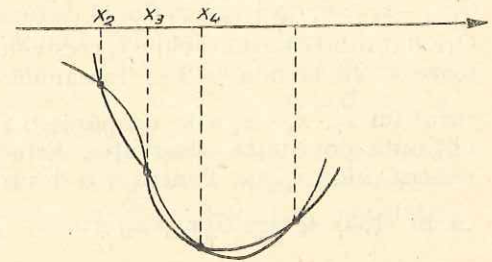
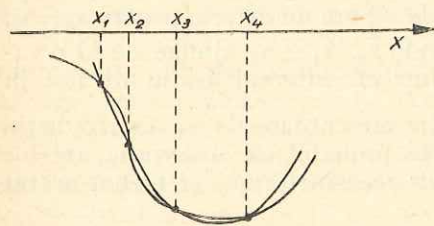


Fig. 39

⁷⁾ Relația $\gamma + \pi > \sigma$ se deduce imediat cu ajutorul expresiilor (6) și (30), în care se scrie (ținînd seama că $a < b$) $f(a) = \log \frac{1+a^2}{1+b^2} - \pi(a-b) < 0$. Ori, $f'(a) < 0$, iar $f(b) = 0$,

Se deduce ca în (128₁) că x_1 este o funcție continuă de x_3 în intervalul (132), iar prin calcule analoage ca acelea care ne-au dat formulele (74) și (75) că

$$\begin{aligned} [Y'(x_1) - Z'(x_1)] \frac{d}{dx_3} (x_4 - x_1) = \\ = \frac{G(x_4 - x_3) \cdot \sin(x_4 - x_1)}{\sin^2(x_3 - \alpha) - 2 \sin(x_3 - \alpha) \sin(x_4 - \alpha) \cos(x_4 - x_3) + \sin^2(x_4 - \alpha)} \end{aligned} \quad (133)$$

unde

$$G(s) = Ae^{ax_1}(1 - e^{-as} \cos s - ae^{-as} \sin s) + Be^{bx_1}(1 - e^{-bs} \cos s - be^{-bs} \sin s).$$

Însemnînd pentru prescurtare $x_4 - x_1 = D(x_3, x_4)$, să presupunem dar că pentru un $x_4 = \bar{x}_4 > \gamma + \pi$ și un $x_3 = \bar{x}_3 < x_4$ din (132) s-ar avea $D(\bar{x}_3, \bar{x}_4) < 2\pi$. Cum din (130) și (131) se deduce că există un $\bar{x}_3 > x_3$ destul de aproape de \bar{x}_4 ca să se aibă $D(\bar{x}_3, \bar{x}_4) > 2\pi$, înseamnă că există un \bar{x}_3 , ($\bar{x}_3 < x_3 < \bar{x}_3$), astfel încît $D(\bar{x}_3, \bar{x}_4) = 2\pi$, $D(x_3, \bar{x}_4)$ trecînd de la valori $< 2\pi$ la valori $> 2\pi$ cînd x_3 trece prin valoarea \bar{x}_3 .

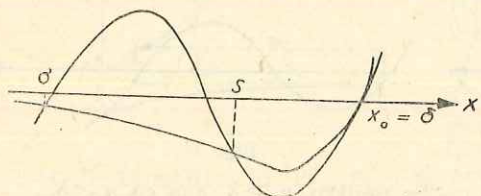


Fig. 40

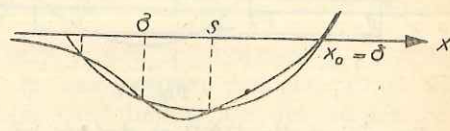


Fig. 41

Ori, se are din (133)

$$G'(s) = \sin s [Ae^{a(x_4 - s)}(1 + a^2) + B(1 + b^2)e^{b(x_4 - s)}] = \Theta(s) \sin s.$$

Se deduce dar că $\Theta(s) > 0$, pentru $s < \sigma = x_4 - \gamma$. Ori, prin ipoteză $\sigma \geq \pi$, așa că pentru $0 < s \leq \pi$ se are $G'(s) \geq 0$; și cum $G(0) = 0$, înseamnă că pentru $0 < s \leq \pi$ se are $G(s) > 0$. Ori, din (132) se deduce că $\bar{x}_4 - \bar{x}_3 < \pi$, așa că $G(\bar{x}_4 - \bar{x}_3) > 0$, deci $\bar{x}_4 - x_1$ (luată ca funcție de x_3) are un extrem pentru $x_3 = \bar{x}_3$. Ori, dat fiind că atunci cînd x_3 crește de la \bar{x}_3 la x_3 , $\bar{x}_4 - x_1$ ajunge de la o valoare $< 2\pi$ la una $> 2\pi$, înseamnă că într-un interval destul de mic în jurul lui \bar{x}_3 , $\bar{x}_4 - x_1$ este neapărat o funcție crescătoare de x_3 . Contradicția obținută dovedește observația. Este foarte probabil că observația are loc pentru orice $x_4 \geq \mu$. Pentru a o dovedi sub această formă, ar trebui arătat că în (133) se are $G(\bar{x}_4 - \bar{x}_3) \neq 0$.

* * *

Ținem să semnalăm în încheiere că metoda de cercetare folosită pentru determinarea numărului L în cazul $ab > 1$, examinat în această parte a lucrării, se poate extinde cu ușoare modificări la toate cazurile referitoare

la rădăcinile a și b , în care lema 2 subsistă. Aceste cazuri au fost puse în evidență în lucrarea [5], în care se arată că subsistența lemei 2 este echivalentă cu neexistența nici unei rădăcini pozitive pentru următoarea ecuație în necunoscuta s :

$$f(s) = (1 + ab)(e^{as} - e^{bs}) \sin s + (a - b) [(e^{as} + e^{bs}) \cos s - (1 + e^{(a+b)s})] = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

1. O. Aramă și D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. (I)*. Studii și cercetări științifice — Acad. R.P.R. Filiala Cluj, t. VIII, 1957, nr. 1-2.
2. Ch. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*. Journ. de Math. pures et appl. (9), 8, 1929.
3. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima*. Bologna, 1949.
4. G. Pólya, *American M. S. Trans.*, vol. XXIV, 1924, p. 312-324.
5. O. Aramă, D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale cu noduri confundate, pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*. Buletinul universităților „V. Babeș” și „Bolyai” Cluj, 1958 (sub tipar).
6. C. Foaș, G. Gussi, V. Poenaru, *Despre problema polilocale la ecuațiile diferențiale liniare de ordinul al doilea*. Bul. științ. — Acad. R.P.R., Sect. de șt. mat. și fiz., 1955, t. VII, nr. 3.

Об одной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (II)

(Краткое содержание)

В настоящей, продолжающей [1] работе, рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 4-го порядка и делается попытка, вычислить, в зависимости от коэффициентов дифференциального уравнения, длину L максимального открытого интервала, в котором множество интегралов рассматриваемого дифференциального уравнения является интерполяторным 4-го порядка.

Предполагается, что характеристический многочлен имеет два действительных и два комплексных корня. С помощью простой замены переменной можно свести исследование к частному случаю, когда корни характеристического многочлена являются a , b , $\pm i$.

Метод работы основывается на следующем замечании, которое использовано при доказательстве теоремы существования и единственности Валле Пуссена, относящейся к плурилокальной проблеме для линейных дифференциальных уравнений [2], [3]:

Для того, чтобы множество интегралов некоторого линейного дифференциального уравнения n -ого порядка было интерполяторным n -ого порядка в некотором интервале I , необходимо и достаточно, чтобы любой частный неравный тождественно нулю интеграл этого уравнения имел в интервале I не более $n-1$ нулей.

Из этого замечания следует, что искомое число L равно нижней грани разностей $x_4 - x_1$, где x_1, x_2, x_3, x_4 представляют собой четверку последовательных корней некоторого частного интеграла, не равного тождественно нулю, где нижняя грань берётся по множеству всевозможных таких групп, рассматривая все частные интегралы данного уравнения. Точнее, обозначим через N_f множество всех таких групп из четырёх последовательных корней частного интеграла $f(x)$.

Пусть $N = \bigcup_{(f)} N_f$. В силу предыдущего замечания можно написать:

$$L = \inf_N (x_4 - x_1). \tag{1}$$

Для нахождения числа L мы попытались свести это множество N , по которому берётся нижняя грань (1), к некоторому более узкому множеству. Различаются несколько случаев относящихся к действительным корням a, b характеристического многочлена. Предполагается, например, что эти корни удовлетворяют неравенству $ab > 1$. Устанавливаются следующие две леммы сведения:

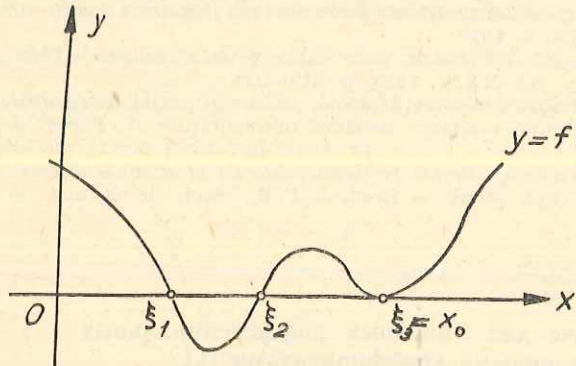


Рис. 1

Пусть $f^*(x)$ частный интеграл, представляющий кривую, которая касается оси Ox в точке x_0

Первая лемма сведения доказанная в работе, утверждает, что $L = L^*$. Для эффективного определения числа L устанавливается вторая лемма сведения:

Пусть $f^{**}(x)$ частный интеграл, представляющий кривую, которая допускает контакт второго порядка с осью Ox в некоторой точке абсциссы γ (т. е. $f^{**}(\gamma) = f^{**\prime}(\gamma) = f^{**\prime\prime}(\gamma) = 0$). Рассматриваются группы из двух последовательных корней $\eta_1 < \eta_2$ среди которых находится и тройной корень γ . Очевидно, что для некоторого интеграла $f^{**}(x)$ могут существовать не более двух таких групп. Множество, состоящее из этих двух групп обозначим через $N^{**}_{f^{**}}$.

Рассматривается множество $N^{**} = \bigcup_{(f^{**})} N^{**}_{f^{**}}$. Пусть потом $L^{**} = \inf_{N^{**}} (\eta_2 - \eta_1)$. Второй леммой сведения доказывается равенство $L^* = L^{**}$.

Из этих двух лемм следует равенство $L = L^{**}$.

Из этих двух лемм следует равенство $L = L^{**}$.

Для определения числа L , входящего в вышеуказанное равенство, рассматриваются интегралы $y = f^{**}(x)$, которые имеют с осью Ox по одной точке контакта второго порядка. Общая форма этих интегралов есть

$$f^{**}(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha),$$

где

$$R = e^{b\gamma} |B| |a - b| \sqrt{\frac{1 + b^2}{1 + a^2}}$$

$$\alpha = \gamma - k\pi - \operatorname{arctg} \frac{a + b}{ab - 1}$$

и γ представляет собой абсциссу точки контакта и имеет выражение:

$$\gamma = \frac{1}{a - b} \log \left[\frac{B(1 + b^2)}{A(1 + a^2)} \right].$$

В этих выражениях параметры A и B остаются произвольными, с условием $AB < 0$. В рассматриваемом случае ($ab > 1$), показывается что интегральная кривая уравнения $y = f^{**}(x)$, больше не пересекает ось Ox правее, соответственно левее, точки контакта γ , в зависимости от того $a > 0$, или $a < 0$.

Пусть s корень интеграла $f^{**}(x)$, находящийся непосредственно перед γ , в случае $a > 0$, соответственно после γ , в случае $a < 0$.

Рассматривается разность $|\gamma - s|$ и показывается, что она не зависит от параметров A и B . Этот результат позволяет легко вычислить число $L = L^{**}$. Приходим к следующему результату: число $L^{**} = L$ является корнем, содержащимся в интервале $(\pi, 2\pi)$ следующего уравнения от Δ :

$$(1 + a^2)e^{-|b|\Delta} - (1 + b^2)e^{-|a|\Delta} + |a - b| [(ab - 1)\sin\Delta - |a + b|\cos\Delta] = 0. \tag{2}$$

Легко показать, что это уравнение имеет единственный действительный корень в интервале $(\pi, 2\pi)$. Отсюда переходим к случаю, когда корни характеристического многочлена являются r_1, r_2 (действительные) и $a + i\beta$ и $a - i\beta$ (комплексные). Легко выразить корни характеристического многочлена, входящие в уравнение (2), через коэффициенты данного дифференциального уравнения.

Sur un problème polylocal pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants (II)

(Résumé)

Dans le présent mémoire, qui continue [1], on considère des équations différentielles linéaires à coefficients constants du quatrième ordre et on essaye de déterminer, en fonction des coefficients de l'équation différentielle, la longueur L de l'intervalle ouvert maximum, dans lequel l'ensemble des intégrales de l'équation différentielle considérée est interpolateur du quatrième ordre.

On suppose que le polynôme caractéristique a deux racines réelles et distinctes et deux racines complexes. Au moyen d'un changement simple de variables, on peut limiter l'étude au cas particulier où les racines du polynôme caractéristique sont $a, b, \pm i$.

La méthode de travail s'appuie sur la remarque suivante, utilisée dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de Charles de la Vallée Poussin, concernant le problème polylocal pour les équations différentielles linéaires [2], [3]:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des intégrales d'une équation différentielle d'ordre n soit interpolateur d'ordre n dans un intervalle I est que n'importe quelle intégrale particulière non identiquement nulle de cette équation ait dans l'intervalle I au plus $n-1$ zéros distincts.

Il résulte de cette remarque que le nombre cherché L est égal à la limite inférieure des différences $x_4 - x_1$, où x_1, x_2, x_3, x_4 représentent quatre racines consécutives d'une intégrale particulière quelconque, la limite inférieure étant prise par rapport à l'ensemble de tous les groupes de ce genre, en considérant toutes les intégrales particulières non identiquement nulles de l'équation donnée. Plus précisément, on marquera par N_f l'ensemble de tous ces groupes de quatre racines consécutives de l'intégrale particulière $f(x)$.

Soit $N = \bigcup_{(f)} N_f$. Conformément à la remarque antérieure, on peut écrire

$$L = \inf_N (x_4 - x_1) \quad (1)$$

Pour trouver le nombre L on a cherché à réduire cet ensemble N , par rapport auquel on prend la limite inférieure (1), à un sous-ensemble aussi res-

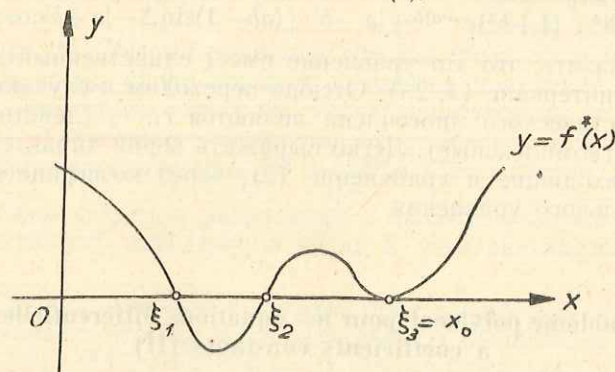


Fig. 1

treint que possible. On distingue plusieurs cas se rapportant aux racines réelles a, b du polynôme caractéristique. On supposera, par exemple, que ces racines satisfont l'inégalité $ab > 1$. On établit les deux lemmes de réduction suivants:

Soit $f^*(x)$ une intégrale particulière non identiquement nulle dont la courbe représentative est tangente en un point x_0 à l'axe Ox (fig. 1).

On considère les groupes de trois racines consécutives $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, parmi lesquelles se trouve aussi la racine double x_0 (il est évident que pour une intégrale $f(x)$ peuvent exister tout au plus trois pareils groupes). On marquera par $N^*_{f^*}$ l'ensemble formé de ces trois groupes et on formera l'ensemble $N^* = \bigcup_{(f^*)} N^*_{f^*}$. Soit ensuite $L^* = \inf_{N^*} (\xi_3 - \xi_1)$.

Le premier lemme de réduction démontré dans le mémoire affirme que $L = L^*$.

Afin de déterminer effectivement le nombre L on établit un second lemme de réduction:

Soit $f^{**}(x)$ une intégrale particulière non identiquement nulle dont la courbe représentative admet avec l'axe Ox un contact du second ordre dans un point d'abscisse γ (c'est-à-dire $f^{**}(\gamma) = f^{**\prime}(\gamma) = f^{**\prime\prime}(\gamma) = 0$). On considère les groupes de deux racines consécutives $\eta_1 < \eta_2$, parmi lesquels il y a aussi la racine triple γ . Il est évident que pour une intégrale $f^{**}(x)$ peuvent exister au plus deux pareils groupes. On marquera par $N^{**}_{f^{**}}$ l'ensemble formé par ces deux groupes. On considère l'ensemble $N^{**} = \bigcup_{(f^{**})} N^{**}_{f^{**}}$. Soit ensuite

$L^{**} = \inf_{N^{**}} (\eta_2 - \eta_1)$. Le second lemme de réduction démontre l'égalité $L = L^{**}$.

Des deux lemmes résulte l'égalité $L = L^{**}$.

Afin de déterminer le nombre L qui intervient dans l'égalité ci-dessus, on considère les intégrales $y = f^{**}(x)$ qui admettent avec l'axe Ox un contact du second ordre. La forme générale des ces intégrales est $f^{**}(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} - R \sin(x - \alpha)$, où $R = e^{b\gamma} |B| |a-b| \sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}$, $\alpha = \gamma - k\pi - \arctg \frac{a+b}{ab-1}$ et γ représente l'abscisse du point de contact ayant l'expression

$$\gamma = \frac{1}{a-b} \log \left(-\frac{B(1+b^2)}{A(1+a^2)} \right).$$

Dans ces expressions les paramètres A et B restent arbitraires, avec la condition $AB < 0$. Dans le cas considéré $ab > 1$ on montre que n'importe quelle courbe intégrale d'équation $y = f^{**}(x)$ ne coupe plus l'axe Ox à droite, respectivement à gauche du point de contact γ , selon que $a > 0$ ou $a < 0$.

Soit s la racine de l'intégrale $f^{**}(x)$, immédiatement inférieure à γ dans le cas $a > 0$, respectivement supérieure à γ dans le cas $a < 0$.

On considère la différence $|\gamma - s|$ et on montre qu'elle ne dépend pas des paramètres A et B . Ce résultat permet d'effectuer facilement le calcul du nombre $L^{**} = L$. On aboutit au résultat suivant:

Le nombre $L^{**} = L$ est la racine comprise dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$ de l'équation suivante en Δ :

$$(1+a^2)e^{-|\Delta|} - (1+b^2)e^{-|\Delta|} + |a-b| [(ab-1) \sin \Delta - |a+b| \cos \Delta] = 0. \quad (2)$$

On montre facilement que cette équation a une seule racine réelle dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$. D'ici on passe au cas où les racines du polynôme caractéristique sont r_1, r_2 (réelles) et $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ (complexes). L'expression des racines du polynôme caractéristique qui interviennent dans l'équation (2) en fonction des coefficients de l'équation différentielle se fait facilement.