ASUPRA INEGALITĂŢII LUI DE LA VALLÉE POUSSIN ÎN CAZUL ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA

DE

DUMITRU RIPIANU

(Cluj)

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{E}$ a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea, de forma

$$E[y(x)] = y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

unde $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$ parcurg mulţimea funcţiilor continue într-un interval $[0, l]$ dat. Referitor la o ecuaţie dată $E[y(x)] = 0$ din $\mathcal{E}$ se înseamnă cu $\mathcal{H}_E$ mulţimea numerelor pozitive h care au proprietatea că există cel puţin o integrală $y_1(x)$ neidentic nulă a ecuaţiei $E[y(x)] = 0$, care se anulează pentru $x = 0$ şi $x = h$ $(h \leq l)$. Se mai înseamnă

$$m_i = \max_{x\in[0,h]} |p_i(x)| \qquad (i = 1,2)$$

şi cu $\mathcal{M}$ mulţimea perechilor de numere pozitive (a_1, a_2) care au proprietatea că relaţia

$$1 \leq a_1 m_1 h + a_2 m_2 h^2 \tag{2}$$

are loc pentru orice $h \in \mathcal{H}_E$ şi orice ecuaţie $E[y(x)] = 0$ din $\mathcal{E}$. Mulţimea $\mathcal{M}$ nu este vidă. Astfel, conform teoremei generale a lui De la Vallée Poussin [3] mulţimea $\mathcal{M}$ cuprinde perechea $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (cu inegalitate strictă în (2)). Ph. Hartman şi A. Wintner [1] au dat perechea $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, iarăşi cu inegalitate strictă în (2), iar Z. Opial [2], a dat perechea $\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$ care realizează în (2) atît semnul $=$ cît şi semnul $<$, stabilind că perechea aceasta este „cea mai bună" pereche de acest tip (adică din mulţimea $\mathcal{M}$), în sensul că coeficienţii $\frac{2}{\pi^2}$ şi $\frac{1}{\pi^2}$ sînt cei mai mici cu putinţă.

Mulţimea $\mathcal{M}$ este mărginită inferior aşa că se poate pune problema existenţei — şi în caz afirmativ a determinării — elementelor (perechilor) minime ale ei, în funcţie de definiţia dată acestor elemente minime.

În nota de faţă se vor introduce trei asemenea definiţii:

DEFINIŢIA 1. *O pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{M}$ se numeşte „minimă relativ" în raport cu a_2, dacă orice pereche $(\bar{a}_1, a_2)$* cu $a_2 < \bar{a}_2$ *nu aparţine mulţimii $\mathcal{M}$.*

DEFINIŢIA 2. *O pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{M}$ se numeşte „minimă absolut" în raport cu a_2, dacă orice pereche (a_1, a_2) cu $a_2 < \bar{a}_2$ şi orice pereche $(a_1, \bar{a}_2)$ cu $a_1 < \bar{a}_1$ nu aparţin mulţimii $\mathcal{M}$.*

DEFINIŢIA 3. *O pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{M}$ se numeşte „minimă în raport cu funcţia $f(a_1, a_2)$", dacă $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \min\limits_{(a_1, a_2) \in \mathcal{M}} f(a_1, a_2)$.*

Definiţiile 1 şi 2 se enunţă în acelaşi fel referitor la a_1.

În notă se determină perechea minimă relativ în raport cu a_2 pentru un a_1 oarecare — care se va însemna cu $(a_1, \alpha(a_1))$ (teorema 1) şi perechea minimă relativ în raport cu a_1 pentru un a_2 oarecare — care se va însemna cu $(\beta(a_2), a_2)$ (teorema 4).

Cu titlu de aplicaţii simple ale teoremei 1 se determină perechile minime în raport cu funcţiile $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, $f(a_1, a_2) = a_1 a_2 =$ (teorema 2) şi $f(a_1, a_2) = a_1^m + a_2^m$, unde m este un număr natural (teorema 3).

În lucrarea [2], Z. Opial a determinat perechea minimă absolut în raport cu a_2:

$$a_1 = \frac{2}{\pi^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2}. \tag{3}$$

Simpla examinare a relaţiei (2) arată că dacă perechea $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}$, atunci orice pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ cu $\bar{a}_1 \geqq a_1$, $\bar{a}_2 \geqq a_2$ aparţine şi ea mulţimii $\mathcal{M}$. După cum se va constata în teorema 1, nu există o pereche minimă absolut în raport cu a_1, acesta putînd fi luat oricît de aproape de zero.

2. În acest paragraf se va determina perechea minimă relativ în raport cu a_2 pentru o valoare oarecare a lui a_1.

TEOREMA 1. *Perechea minimă relativ în raport cu a_2 este $(a_1, \alpha(a_1))$, unde $\alpha(a_1)$ se defineşte astfel:*

Dacă $0 < a_1 < \frac{1}{8}$, atunci $\alpha(a_1)$ este rădăcina pozitivă a funcţiei de variabila a_2

$$f_4(a_2) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\bar{\bar{m}} - 4}}{a_1\sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\bar{\bar{m}}}} + \ln\frac{\sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{\bar{\bar{m}} - 4}}{2},$$

unde

$$\bar{\bar{m}} = \frac{1}{4a_1^3}\Big[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) +$$
$$+ (1 - 2a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - 2a_1)a_2 + (1 - 12a_1 + 4a_1^2)a_2^2}\Big]$$

Dacă $a_1 = \frac{1}{8}$, atunci $\alpha\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$.

Dacă $\frac{1}{8} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}$, atunci $\alpha(a_1)$ este rădăcina pozitivă a funcţiei de variabila a_2

$$f_{12}(a_2) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4 - \bar{m}}}{a_1\sqrt{\bar{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\bar{m}}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 - \bar{m}}{\bar{m}}},$$

unde

$$\bar{m} = \frac{1}{4a_1^3}\Big[2a_1^2(1 + 2a) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) -$$
$$- (1 - 2a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - 2a_1)a_2 + (1 - 12a_1 + 4a_1^2)a_2^2}\Big].$$

Dacă $a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}$, atunci $\alpha(a_1) = \frac{1}{\pi^2}$.

Funcţia $\alpha(a_1)$ este descrescătoare în intervalul $\left(0, \frac{2}{\pi^2}\right)$ şi

$$\lim_{a_1 \to 0} \alpha(a_1) = \infty.$$

Demonstraţie. Se va folosi — aşa cum face şi Z. Opial în [1] următorul rezultat al lui de la Vallée Poussin [3]:

Dacă $h \in \mathcal{H}_E$, atunci

$$h \geqq H(m_1, m_2) = 2\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi^2 + m_1\varphi + m_2}. \tag{4}$$

De altfel, sînt cazuri în care în (4) intervine semnul $=$, de exemplu pentru ecuaţia $(E_1): y'' + k^2 y = 0$ pentru care $m_1 = 0$, $m_2 = k^2$, numărul $h = \frac{\pi}{k}$ aparţine lui $\mathcal{H}_{E_1}$ şi este egal cu $H(0, k^2)$. În cazul coeficienţilor $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$ din (1) constanţi, $m_i (i = 1, 2)$ din (2) nu depinde de h, aşa că relaţia (2) este evident echivalentă*) cu relaţia

$$h \geqq \varphi = \varphi(m_1, m_2) = \frac{1}{2a_2 m_2}\left(-a_1 m_1 + \sqrt{a_1^2 m_1^2 + 4a_2 m_2}\right), \tag{5}$$

iar aceasta din urmă cu relaţia

$$H \geqq \varphi,$$

pentru că din (6) şi (4) urmează (5), iar (5) atrage pe (6) pentru ecuaţiile (E_1) din $\mathcal{E}$ pentru care un $h = h_1 = H \in \mathcal{H}_{E_1}$.

*) Se va înţelege prin echivalenţa relaţiilor (A) şi (B) faptul că (A) atrage pe (B) şi (B) atrage pe (A), exprimat prin notaţia (A) $\sim$ (B). Evident că dacă (A) $\sim$ (B) şi (B) $\sim$ (C), atunci (A) $\sim$ (C).

Dacă se înseamnă cu $\mathfrak{E}_c$ submulţimea lui $\mathfrak{E}$ alcătuită din ecuaţiile (1) cu coeficienţi constanţi şi cu $\mathfrak{E}_\gamma$ complementara ei faţă de $\mathcal{E}$, iar cu $\mathcal{M}_c$ mulţimea perechilor de numere pozitive (a_1, a_2) cu proprietatea că relaţia (2) are loc pentru orice $h \in \mathcal{H}_E$ şi orice ecuaţie $E\,[y(x)] = 0$ din $\mathfrak{E}_c$, atunci evident că mulţimile $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}_c$ coincid.

Este suficient, pentru a ne convinge, de a observa pe de o parte că dacă $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}$, atunci $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}_c$, deci $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_c$, iar pe de alta că dacă se ia o ecuaţie $E_0[y(x)] = 0$ din $\mathfrak{E}_\gamma$ şi un $h_0 \in \mathcal{H}_{E_0}$, atunci în (2) $m_i = m_i^0 = M_i(h_0)$, unde s-a însemnat cu $M_i(h) = \max\limits_{x \in [0,h]} |p_i(x)|$ $(i = 1,2)$.

Se va considera pe $m_i^0 (i = 1,2)$ ca numere, nu ca funcţii de h_0.

Conform lui (4) $h_0 \geqq H(m_1^0, m_1^0)$, iar dacă $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}_c$, atunci conform lui (6) $H(m_1^0, m_2^0) \geqq \varphi(m_1^0, m_2^0)$ deci $h_0 \geqq \varphi(m_1^0, m_2^0)$ adică (2) este verificată, aşa că $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}$. Deci $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$, aşa că $\mathcal{M} = \mathcal{M}_c$. Este deci destul de a considera în (2) pe m_i $(i = 1, 2)$ constante, variind independent de h şi independent una de alta, de la 0 la ∞.

Relaţia (6) se scrie aşadar cu ajutorul lui (4) şi (5) sub forma următoarelor trei relaţii, date — cu alte notaţii — de Z. Opial în lucrarea [2] citată :

$$f_1(m_1) = \frac{\sqrt{4m_2 - m_1^2}}{4}(H - \varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{4m_2 - m_1^2}}{8a_2m_2}\left(a_1m_1 - \sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4m_2 - m_1^2}}{m_1} \geqq 0 \tag{7a}$$

$$\text{pentru } m_1 < 2\sqrt{m_2},$$

$$H - \varphi = \frac{4}{\sqrt{m_2}} \frac{a_1 + a_2 - \frac{1}{4}}{a_1 + 2a_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2}} \geqq 0 \tag{7b}$$

$$\text{pentru } m_1 = 2\sqrt{m_2},$$

$$f_2(m_1) = \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{4}(H - \varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{8a_2m_2}\left(a_1m_1 - \sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}\right) + \ln\frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2\sqrt{m_2}} \geqq 0 \tag{7c}$$

$$\text{pentru } m_1 > 2\sqrt{m_2}.$$

Aceste trei relaţii, luate împreună, sînt deci echivalente cu relaţia (2). Dacă $a_1 = 0$, (7c) dă $\lim\limits_{m_1 \to \infty} f_2(m_1) = -\infty$ pentru orice a_2 finit. Se va presupune aşadar, în toată nota, $a_1 > 0$.

Expresiile (7a) şi (7c) dau

$$\left.\begin{aligned} f_1'(m_1) &= -\frac{f_3(m_1)}{4a_2m_2\sqrt{(4m_2 - m_1^2)(4a_2m_2 + a_1^2m_1^2)}} \\ f_2'(m_1) &= \frac{f_3(m_1)}{4a_2m_2\sqrt{(m_1^2 - 4m_2)(4a_2m_2 + a_1^2m_1^2)}} \\ f_3(m_1) &= -m_1[a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)m_2] + \\ &+ [a_1m_1^2 + 2(2a_2 - a_1)m_2]\sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}. \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

Relaţia $f_3(m_1) = 0$ se scrie prin izolarea termenului cu rădăcina patrată şi ridicare la pătrat

$$P_1(m) = 0, \text{ unde } m = \frac{m_1^2}{m_2}$$

şi

$$P_1(m) = 2a_1^3m^2 - [2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2)]m + 4(a_1 - 2a_2)^2. \tag{9}$$

Aşadar, $f_3(m_1)$ poate avea cel mult două rădăcini nenegative, care se vor însemna —dacă există— cu $\overline{m}_1$ şi $\overline{\overline{m}}_1$. Pentru aceasta este necesar ca rădăcinile polinomului $P_1(m)$ din (9) — care se vor însemna cu $\overline{m}$ şi $\overline{\overline{m}}$ — să fie nenegative. Pentru ca expresiile pozitive $\sqrt{m_2\overline{m}}$ şi $\sqrt{m_2\overline{\overline{m}}}$, singurele numere care ar putea fi rădăcini ale lui $f_3(m_1)$, — să fie rădăcini ale acestei funcţii, este necesar şi suficient ca să se aibă în (8)

$$[a_1\overline{m} + 2(2a_2 - a_1)]\,[a_1^2\overline{m} + 2(a_2 - a_1^2)] > 0,$$

respectiv

$$[a_1\overline{\overline{m}} + 2(2a_2 - a_1)]\,[a_1^2\overline{\overline{m}} + 2(a_2 - a_1^2)] > 0,$$

$\Big($pentru că expresiile $a_1m + 2(2\,a_2 - a_1)$ şi $a_1^2m + 2(a_2 - a_1^2)$ au aceeaşi rădăcină m în singurul caz $a_1 = \frac{1}{2}\Big)$, relaţii, care se scriu cu ajutorul lui (9)

$$\left.\begin{aligned} &(1 - 2a_1)\left\{\left[a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right]\overline{m} + 2a_1(2a_2 - a_1)\right\} > 0 \\ &\text{respectiv} \\ &(1 - 2a_1)\left\{\left[a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right]\overline{\overline{m}} + 2a_1(2a_2 - a_1)\right\} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Realizantul polinomului $P_1(m)$ din (9) este

$$\left.\begin{aligned} R &= (1 - 2a_1)^2\,P_2(a_2) \\ P_2(a_2) &= (1 - 12a_1 + 4a_1^2)\,a_2^2 + 4a_1^2(1 - 2a_1)\,a_2 + 4a_1^4 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dacă rădăcinile $\overline{m}$ și $\overline{\overline{m}}$ ale lui $P_1(m)$ sînt distincte, iar $a_1 \neq \frac{1}{2}$, atunci rădăcinile $\overline{m}_1$ și $\overline{\overline{m}}_1$ ale lui $f_3(m_1)$ sînt — dacă există — rădăcini simple pentru că (8) dă

$$f'_3(m_1) = -[3a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)\, m_2] + a_1m_1 \frac{3a_1^2m_1^2 + 2(4a_2 + 2a_1a_2 - a_1^2)m_2}{\sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}},$$

așa că

$$f'_3(\overline{m}_1) = 4a_2m_2 \frac{4a_1^3\overline{m}_1^2 - m_2[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_2 - 4a_1^2)]}{a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)m_2} \neq 0,$$

pentru că în caz contrar, scoțînd din relația $f'_3(\overline{m}_1) = 0$ pe $\overline{m}_1$ și scriind că $P_1(\overline{m}) = 0$ cu $\overline{m} = \frac{\overline{m}_1^2}{m_2}$ și $\overline{m}_1$ astfel determinat, se obține în (11) $R = 0$,

împotriva ipotezei că $P_1(m)$ are rădăcini distincte. Așadar,

dacă polinomul $P_1(m)$ din (9) are două rădăcini ne negative și distincte, iar $a_1 \neq \frac{1}{2}$ atunci funcția $f_3\,(m_1)$ din (8) are două rădăcini ne negative simple, o asemenea rădăcină sau nu are nici una, după cum sînt verificate două, una sau nu este verificată nici una din relațiile (10). (12)

Polinomul $P_2(a_2)$ din (11) are rădăcinile

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \overline{a}_2 = \overline{a}_2(a_1) = -\frac{2a_1^2}{1 - 2a_1 + 2\sqrt{2a_1}} \quad \text{și} \\ a_2 &= \overline{\overline{a}}_2 = \overline{\overline{a}}_2(a_1) = \frac{2a_1^2}{-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dacă $0 < a_1 \leqq \frac{1}{6}$, atunci (7*b*) dă

$$a_2 \geqq \frac{1}{4} - a_1 \geqq \frac{a_1}{2}. \tag{14}$$

Metoda de lucru adoptată este cercetarea semnului expresiilor (7) în funcție de valorile lui a_1 și a_2 și impune deosebirea mai multor cazuri, după valorile pe care le ia a_1.

$$1°.\ 0 < a_1 \leqq \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

În acest caz, (11) dă $R > 0$ pentru orice $a_2 > 0$, iar în (9) $2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4\,a_1^2) > 0$, deci $\overline{m} > 0$, $\overline{\overline{m}} > 0$, în care caz (14) spune că

relațiile (10) sînt verificate, așa că din (12) se deduce existența rădăcinilor $\overline{m}_1$ și $\overline{\overline{m}}_1$. Ori (9) și (7 *b*) dau

$$P_1(4) = 16(a_1^2 + a_2)\left((a_1 + a_2 - \frac{1}{4}\right) \geqq 0 \tag{15}$$

și

$$\frac{\overline{m} + \overline{\overline{m}}}{2} - 4 = \frac{1}{4a_1^3}\,[2a_1^2(1 - 6a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2)] > 0, \tag{16}$$

așa că dacă $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, se are $\overline{m} = 4 < \overline{\overline{m}}$, iar dacă $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, $4 < \overline{m} < \overline{\overline{m}}$, în care caz (9) dă $\overline{m}_1 = 2\sqrt{m_2} < \overline{\overline{m}}_1$, respectiv $2\sqrt{m_2} < \overline{m}_1 < \overline{\overline{m}}_1$.

Tabelul 1

m_1	0		$2\sqrt{m_2}$
$f'_1(m_1)$		$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	0

Tabelul 2

m_1	$2\sqrt{m_2}$		$\overline{\overline{m}}_1$		∞
$f'_2(m_1)$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\searrow$	$f_2(\overline{\overline{m}}_1)$	$\nearrow$	∞

Tabelul 3

m_1	$2\sqrt{m_2}$		$\overline{m}_1$		$\overline{\overline{m}}_1$		∞
$f'_2(m_1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\nearrow$	$f_2(\overline{m}_1)$	$\searrow$	$f_2(\overline{\overline{m}}_1)$	$\nearrow$	∞

Dacă $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, se are deci tabelele 1 și 2 (în care $f'_1(2\sqrt{m_2}) = f'_2(2\sqrt{m_2}) = 0$) iar dacă $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, se are tabelele 1 și 3. Ori (9) dă

$$\left.\begin{aligned} \overline{m} &= \frac{1}{4a_1^3}[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) - (1 - 2a_1)\sqrt{P_2(a_2)}], \\ \overline{\overline{m}} &= \frac{1}{4a_1^3}[2a_1^2\,(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) + (1 - 2a_1)\,\sqrt{P_2(a_2)}], \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

cu $P_2\,(a_2)$ din (11). Tot (9) dă

$$\overline{m}_1 = \sqrt{m_2\overline{m}},\ \overline{\overline{m}}_1 = \sqrt{m_2\overline{\overline{m}}}\ . \tag{18}$$

Se poate deci considera expresia $f_2(\bar{\bar{m}}_1)$ din tabelul 3 ca fiind pe rînd funcţie de a_2, de $\bar{\bar{m}}$, de a_2 şi de $\bar{\bar{m}}$; se va însemna cu $f_4(a_2)$, $f_5(\bar{\bar{m}})$, $f_6(a_2, \bar{\bar{m}})$ funcţiile respective, ţinînd seama că $\bar{\bar{m}}$ din (17) este o funcţie de a_2, care se va însemna cu $\bar{\bar{m}}\ (a_2)$. Relaţiile (7c) şi (17) dau deci

$$f_2\,(\bar{\bar{m}}_1) = f_4(a_2) = f_5(\bar{\bar{m}}) = f_6(a_2, \bar{\bar{m}}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\bar{\bar{m}}-4}}{a_1\sqrt{\bar{\bar{m}}}+\sqrt{4a_2+a_1^2\bar{\bar{m}}}} + \ln\frac{\sqrt{\bar{\bar{m}}}+\sqrt{\bar{\bar{m}}-4}}{2}. \tag{19}$$

Însă (18) dă

$$\frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = f_5'(\bar{\bar{m}}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{\bar{\bar{m}}}}\, f_2'(m_1) = 0, \tag{21}$$

aşa că

$$f_4'(a_2) = \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial a_2} + \frac{d\bar{\bar{m}}}{da_2}\frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial a_2} =$$
$$= \frac{\sqrt{\bar{\bar{m}}-4}}{\sqrt{4a_2+a_1^2\bar{\bar{m}}}\,(a_1\sqrt{\bar{\bar{m}}}+\sqrt{4a_2+a_1^2\bar{\bar{m}}})^2} > 0.$$

Tabelul 4

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\bar{A}_2$		∞
$f_4(a_2)$	$f_7(a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Se deduce deci tabelul 4 în care

$$f_7(a_1) = f_4\left(\frac{1}{4} - a_1\right) = -\frac{1-2a_1}{4a_1\,(1-4a_1)}\sqrt{1-8a_1} +$$
$$+ \ln\frac{1-6a_1+(1-2a_1)\sqrt{1-8a_1}}{4a_1\sqrt{2a_1}},$$

aşa că

$$f_7'(a_1) = \frac{(1-2a_1)(1-8a_1)\sqrt{1-8a_1}}{4a_1^2\,(1-4a_1)^2} > 0.$$

Tabelul 5

a_1	0		$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$		$\frac{1}{8}$
$f_7(a_1)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_7\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	0

în care caz tabelul 5 dă $f_4\left(\frac{1}{4} - a_1\right) < 0$, iar tabelul 4 prezintă rădăcina $\bar{A}_2 = \bar{A}_2(a_1)$ a funcţiei $f_4(a_2)$.

Se va considera acum pe $f_4(a_2)$ din (19) ca funcţie de a_1 şi a_2, deci

$$f_4(a_2) = f_8(a_1, a_2), \text{ aşa că } f_8(a_1, \bar{A}_2(a_1)) \equiv 0 \tag{22}$$

$$\bar{A}_2'(a_1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_2}}\right|_{a_2 = \bar{A}_2(a_1)} \tag{23}$$

Se va mai considera pe $f_4\,(a_2)$ din (19) pe rînd ca funcţie de a_1, apoi de a_1 şi $\bar{\bar{m}}$, iar pe $\bar{\bar{m}}$ din (17) ca funcţie de a_1 ; deci $\bar{\bar{m}} = \bar{\bar{m}}(a_1)$

$$f_4(a_2) = f_8(a_1, a_2) = f_9(a_1) = f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}}), \tag{24}$$

în care caz (20) dă

$$\frac{\partial f_{10}\,(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = \frac{\partial f_6\,(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = 0,$$

aşa că

$$\frac{\partial f_8\,(a_1, a_2)}{\partial a_1} = f_9'(a_1) = \frac{\partial f_{10}\,(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial a_1} + \frac{d\bar{\bar{m}}}{da_1}\frac{\partial f_{10}\,(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = \frac{\partial f_{10}\,(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial a_1} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{a_1\sqrt{\bar{\bar{m}}}+\sqrt{4a_2+a_1^2\bar{\bar{m}}}}\sqrt{\frac{\bar{\bar{m}}\,(\bar{\bar{m}}-4)}{4a_2+a_1^2\,\bar{\bar{m}}}} > 0. \tag{25}$$

Pe de altă parte, conform lui (21)

$$\left.\frac{\partial f_8\,(a_1, a_2)}{\partial a_2}\right|_{a_2 = \bar{A}_2} = f_4'(\bar{A}_2) > 0, \tag{26}$$

aşa că (23) dă $\bar{A}_2'\ (a_1) < 0$ şi tabelul 6, în care

$$\lim_{a_1 \to 0} \bar{A}_2(a_1) = \infty. \tag{27}$$

Tabelul 6

a_1	0		$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$
$\bar{A}_2(a_1)$	∞	$\searrow$	$\bar{A}_2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$

Relaţia (27) se justifică imediat, dacă se ţine seama că dacă $a_1 < \frac{1}{20}$ în tabelul 4, $\bar{A}_2 > \frac{1}{5}$, aşa că (17) dă

$$\lim_{a_1 \to 0} \bar{\bar{m}}|_{a_2 = \bar{A}_2(a_1)} = \lim_{a_1 \to 0} a_1^2\, m|_{a_2 = \bar{A}_2(a_1)} = \infty.$$

Dacă s-ar avea deci $\overline{A}_2(a_1) < M$ pentru orice $a_1 < \alpha$, unde α şi M sînt numere pozitive fixate după voie, atunci dacă $a_1 \to 0$ expresia din dreapta relaţiei

$$a_1 \ln \frac{\sqrt{\overline{\overline{m}}} + \sqrt{\overline{\overline{m}} - 4}}{2}\Bigg|_{a_2=\overline{A}_2(a_1)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{\overline{\overline{m}}}}}{1+\sqrt{1+\frac{4\overline{A}_2}{a_1^2\,\overline{\overline{m}}}}}\Bigg|_{a_2=\overline{A}_2(a_1)}$$

dată de (19) ar tinde spre $\frac{1}{4}$, pe cînd expresia din stînga ar tinde spre zero, cum se deduce imediat din (17), aşa că relaţia de mai sus nu ar avea loc, împotriva definiţiei lui $\overline{A}_2$, pentru $a_1 > 0$ destul de mic, ceea ce dovedeşte relaţia (27).

2°. $\frac{3}{2} - \sqrt{2} < a_1 < \frac{1}{8}$. În acest caz se are în (13) $\overline{a}_2 < 0$ şi $\overline{\overline{a}}_2 > 0$.

Se deduce din (11)

$$P_2\left(\frac{1}{4} - a_1\right) = \left[\frac{1}{4}(1 - 2a_1)(1 - 8a_1)\right]^2 > 0, \tag{28}$$

aşa că $\overline{\overline{a}}_2(a_1) > \frac{1}{4} - a_1$.

Tot (11) dă

$$\frac{2a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2} - \frac{\overline{a}_2 + \overline{\overline{a}}_2}{2} = \frac{16a_1^3(1-8a_1+4a_1^2)}{(-1+8a_1+4a_1^2)(-1+12a_1-4a_1^2)} > 0,$$

dacă $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < a_1 < \frac{1}{8} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi

$$P_2\left(\frac{2a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2}\right) = -32\frac{a_1^5(1-2a_1)^2(1-8a_1)}{(-1+8a_1+4a_1^2)^2} < 0,$$

aşa că dacă $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < a_1 < \frac{1}{8}$, atunci

$$\overline{\overline{a}}_2(a_1) < 2\frac{a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2} < 2a_1^2\frac{1+2a_1}{-1+8a_1+4a_1^2}. \tag{29}$$

Dacă $\frac{1}{4} - a_1 \leqq a_2 < \overline{\overline{a}}_2(a_1)$, se are în (11) $R > 0$, iar $\overline{m}$ şi $\overline{\overline{m}}$ sînt pozitive pentru că (29) dă în (9), dacă $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < a_2 < \frac{1}{8}$,

$$\overline{m} + \overline{\overline{m}} > \frac{1}{2a_1^3}[2a_1^2(1+2a_1) - \overline{\overline{a}}_2(-1+8a_1+4a_1^2)] > 0 \tag{30}$$

(în cazul $\frac{3}{2} - \sqrt{2} < a_1 \leqq \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$, este evident că în (9) $\overline{m} + \overline{\overline{m}} > 0$).

Relaţiile (15) şi (16) se păstrează*) deci şi tabelele 1, 2 şi 3. Tabelul 4 se înlocuieşte cu tabelul 7, în care

$$f_{11}(a_1) = f_4(\overline{\overline{a}}_2) = -\frac{1}{4a_1}\sqrt{1 - 6a_1 - 4a_1\sqrt{2a_1}} +$$

$$+ \ln\frac{1 - \sqrt{2a_1} + \sqrt{1 - 6a_1 - 4a_1\sqrt{2a_1}}}{\sqrt{2\sqrt{2a_1}(-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1})}},$$

Tabelul 7

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$	$\overline{A}_2(a_1)$	$\overline{\overline{a}}_2$
$f_4(a_2)$	$f_7(a_1)$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$f_{11}(a_1)$

aşa că

$$f'_{11}(a_1) = \frac{-(1 - 6a_1 + 16a_1^2) + 2(1 - 4a_1)\sqrt{2a_1}}{4a_1^2(-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1})\sqrt{1 - 6a_1 - 4a_1\sqrt{2a_1}}} < 0,$$

deci

$$f_{11}(a_1) > f_{11}\left(\frac{1}{8}\right) = 0,$$

ceea ce împreună cu tabelul 5, prezintă rădăcina $\overline{A}_2(a_1)$ în tabelul 7. Relaţiile (21), (23) — (26), deci şi relaţia $\overline{A}'_2(a_1) < 0$, se păstrează, aşa că tabelul 6 se înlocuieşte cu tabelul 8.

Tabelul 8

a_1	$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$		$\frac{1}{8} - \varepsilon$
$\overline{A}_2(a_1)$	$\overline{A}_2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$\overline{A}_2\left(\frac{1}{8} - \varepsilon\right)$

---

*) Pentru că (16) se scrie cu ajutorul lui (29) în cazul $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < a_1 < \frac{1}{8}$ astfel

$$\frac{\overline{m} + \overline{\overline{m}}}{2} - 4 > \frac{1}{4a_1^3}[2a_1^2(1 - 6a_1) - \overline{\overline{a}}_2(-1 + 8a_1 + 4a_1^2)] > 0,$$

iar în cazul $\frac{3}{2} - \sqrt{2} < a_1 \leqq \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ relaţia (16) este evidentă.

3°. $a_1 = \frac{1}{8}$. În acest caz (7.b) dă $a_2 \geqq \frac{1}{8}$. Dacă se ia deci $a_1 = a_2 = \frac{1}{8}$, (8) dă

$$f_3(m_1) = \frac{m_2(m_1^2 - 4m_2)^2}{8\left[m_1(m_1^2 + 14m_2) + (m_1^2 + 2m_2)\sqrt{m_1^2 + 32m_2}\right]} \geqq 0,$$

deci $f_1'(m_1) < 0$, $f_2'(m_1) > 0$, așa că în (7) avem :

$$f_1(m_1) > f_1(2\sqrt{m_2}) = 0, \quad f_2(m_1) > f_2(2\sqrt{m_2}) = 0.$$

Perechea minimă relativ în raport cu a_2 este deci în acest caz perechea $a_1 = a_2 = \frac{1}{8}$.

4°. $\frac{1}{8} < a_1 \leqq \frac{1}{6}$. În acest caz se are în (16) pentru $a_2 \geqq \frac{1}{4} - a_1$:

$$\frac{\overline{m} + m}{2} - 4 \leqq \frac{1}{4a_1^3}\left[2a_1^2(1 - 6a_1) - \left(\frac{1}{4} - a_1\right)(-1 + 8a_1 + 4a_1^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{16a_1^3}(1 - 2a_1)^2(1 - 8a_1) < 0. \tag{31}$$

Relațiile (28), (29), (30) se păstrează*) așa că pentru $\frac{1}{4} - a_1 \leqq a_2 < \overline{a}_2(a_1)$ rădăcinile $\overline{m}$ și $\overline{\overline{m}}$ sînt pozitive, iar (18), (15) și (31) dau $\overline{m}_1 < \overline{\overline{m}}_1 \leqq 2\sqrt{m_2}$ (egalitate cînd $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$). Aceste două proprietăți se păstrează și în cazurile 5°—10°.**) Tabelele 1, 2 și 3 se înlocuiesc deci respectiv cu tabelele 9, 10 și 11, în sensul că dacă $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, se are tabelele 10 și 11 (în care $f_1'(2\sqrt{m_2}) = f_2'(2\sqrt{m_2}) = 0$), iar dacă $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, se are tabelele 9 și 11. Dacă $a_1 = \frac{1}{6}$, în tabelul 10 $\overline{m}_1 = 0$, fiindcă $a_2 = \frac{1}{4} - a_1 = \frac{a_1}{2}$.

---

*) Cu deosebirea că (29) ia acum forma $\overline{\overline{a}}_2(a_1) < 2a_1^2 \frac{1 + 2a_1}{-1 + 8a_1 + 4a_1^2}$ și rezultă din relațiile $\frac{2a_1^2(1 + 2a_1)}{-1 + 8a_1 + 4a_1^2} - \frac{\overline{a}_2 + \overline{\overline{a}}_2}{2} = \frac{64a_1^4}{(-1 + 8a_1 + 4a_1^2)(-1 + 12a_1 - 4a_1^2)} > 0$ și $P_2\left(\frac{2a_1^2(1 + 2a_1)}{-1 + 8a_1 + 4a_1^2}\right) = -32\frac{a_1^5(1 - 2a_1)^2}{(-1 + 8a_1 + 4a_1^2)^2} < 0$ date de (11).

**) Cu deosebire că în cazul 6°, se are $m_1 = 0$, iar în cazurile 6°—10° relația $\overline{m} + m > 0$ se deduce astfel : $\overline{m} + \overline{\overline{m}} \geqq \frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1 + 2a_1) + \frac{a_1}{2}(1 - 8a_1 - 4a_1^2)\right] = \frac{1}{4a_1^2}(1 - 2a_1)^2 \geqq 0,$

Tabelul 9

m_1	0		$\overline{m}_1$		$\overline{\overline{m}}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	$f_1(\overline{m}_1)$	$\nearrow$	$f_1(\overline{\overline{m}}_1)$	$\searrow$	0

Tabelul 10

m_1	0		$\overline{m}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$-$	0	$+$	0
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	$f_1(\overline{m}_1)$	$\nearrow$	0

Tabelul 11

m_1	$2\sqrt{m_2}$		∞
$f_2'(m_1)$		$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\nearrow$	∞

Relațiile (7*a*) și (18) dau

$$f_1(\overline{m}_1) = f_{12}(a_2) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4 - \overline{m}}}{a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 - \overline{m}}{\overline{m}}}. \tag{23}$$

Dacă se consideră deci pe $f_1(\overline{m}_1)$ din (32) ca o funcție de a_2 și de $\overline{m}$, deci $f_1(\overline{m}_1) = f_{13}(a_2, \overline{m})$, atunci (21) se înlocuiește cu relația

$$f_{12}'(a_2) = \frac{\partial f_{13}(a_2, \overline{m})}{\partial a_2} = \frac{\sqrt{4 - \overline{m}}}{\sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\,(a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}})^2} > 0, \tag{33}$$

care dă tabelul 12 în care

$$f_{14}(a_1) = f_{12}\left(\frac{1}{4} - a_1\right) = -\frac{(1 - 2a_1)\sqrt{-1 + 8a_1}}{4a_1(1 - 4a_1)} + \operatorname{arctg}\frac{1 - 2a_1}{1 - 6a_1}\sqrt{-1 + 8a_1},$$

așa că

$$f_{14}'(a_1) = -\frac{(1 - 2a_1)(-1 + 8a_1)}{4a_1^2(1 - 4a_1)^2}\sqrt{-1 + 8a_1} < 0,$$

deci $f_{14}(a_1) < f_{14}\left(\frac{1}{8}\right) = 0$, iar

$$f_{15}(a_1) = f_{12}(\overline{\overline{a}}_2) = -\frac{1}{4a_1}\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}}}{1 - \sqrt{2a_1}},$$

așa că

$$f_{15}'(a_1) = \frac{1 - 6a_1 + 16a_1^2 - 2(1 - 4a_1)\sqrt{2a_1}}{4a_1^2(-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1})\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}}} > 0,$$

deci $f_{15}(a_1) > f_{15}\left(\frac{1}{8}\right) = 0$, în care caz tabelul 12 prezintă rădăcina $\bar{\bar{A}}_2 = \bar{\bar{A}}_2(a_1)$ *). Relațiile (22) — (26) se înlocuiesc respectiv cu relațiile

$$f_{12}(a_2) = f_{16}(a_1, a_2), \quad \text{deci} \quad f_{16}(a_1, \bar{\bar{A}}_2(a_1)) \equiv 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{A}}_2'(a_1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}}\right|_{a_2=\bar{\bar{A}}_2(a_1)} \\ &f_{12}(a_2) = f_{16}(a_1, a_2) = f_{17}(a_1) = f_{18}(a_1, \bar{m}) \\ &\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a_1\sqrt{\bar{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\bar{m}}}\sqrt{\frac{\bar{m}(4 - \bar{m})}{4a_2 + a_1^2\bar{m}}} > 0 \\ &\left.\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}\right|_{a_2=\bar{\bar{A}}_2(a_1)} = f_{12}'(\bar{\bar{A}}_2) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Tabelul 12

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\bar{\bar{A}}_2$		$\bar{\bar{a}}_2$
$f_{12}(a_2)$	$f_{14}(a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{15}(a_1)$

5°. $\frac{1}{6} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}$. În acest caz se are $\frac{1}{4} - a_1 < \frac{a_1}{2}$, așa că relațiile (10) nu mai au loc de la sine pentru orice $a_2 \geqq \frac{1}{4} - a_1$.

Se deduce din (9)

$$P_1\left(2a_1\,\frac{a_1 - 2a_2}{a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)}\right) = 2a_1^2\,\frac{(1 - 2a_1)^2(a_1^2 + a_2)(2a_2 - a_1)}{\left[a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right]^2}, \tag{35}$$

așa că dacă $a_2 \leqq \frac{a_1}{2}$, se are $\bar{m} \leqq 2a_1\,\frac{a_1 - 2a_2}{a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)} < \bar{m}$, deci în (10) singură a doua relație este verificată (întrucît în cazul $a_2 = \frac{a_1}{2}$ se are $\bar{m}_1 = 0$).

*) Funcțiile $\bar{A}_2(a_1)$ din tabelele 4 și 7 și $\bar{\bar{A}}_2(a_1)$ din tabelul 12 s-au notat în mod diferit pentru că sînt funcții diferite, fiind respectiv rădăcinile funcțiilor obținute considerînd expresiile $f_2(\bar{m}_1)$ din (19), respectiv $f_1(\bar{m}_1)$ din (32) ca funcții de a_2.

Tabelul 13

m_1	0		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$+$	0
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\nearrow$	0

Dacă $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, se are deci tabelele 13 și 11 (cu $f_2'(2\sqrt{m_2}) = 0$), iar dacă $\frac{1}{4} - a_1 < a_2 \leqq \frac{a_1}{2}$, tabelele 14 și 11 $\left(\text{cu } f_1'(0) = 0 \text{ în cazul } a_2 = \frac{a_1}{2}\right)$.

Tabelul 14

m_1	0		$\bar{\bar{m}}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$+$	0	$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\nearrow$	$f_1(\bar{\bar{m}}_1)$	$\searrow$	0

Ori (7a) dă

$$f_1(0) = f_{19}(a_2) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \geqq 0 \text{ pentru } a_2 \geqq \frac{1}{\pi_2}, \tag{36}$$

iar în cazul nostru $a_2 \leqq \frac{a_1}{2} < \frac{1}{\pi^2}$. Așadar $\alpha(a_1) \geqq \frac{a_1}{2}$. Relația (11) dă $P_2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \left(\frac{a_1}{2}(1 - 2a_1)\right)^2 > 0$, așa că $\frac{a_1}{2} < \bar{\bar{a}}_2$.

Pentru $\frac{a_1}{2} < a_2 \leqq \bar{\bar{a}}_2$ se are deci tabelele 9 și 11, iar în locul tabelului 12, tabelul 15. Relațiile (34) se păstrează și în acest caz, și dau $\bar{\bar{A}}_2'(a_1) < 0$, deci tabelul 16.

Tabelul 15

a_2	$\frac{a_1}{2}$		$\bar{\bar{A}}_2$		$\bar{\bar{a}}_2$
$f_{12}(a_2)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2a_1}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{15}(a_1)$

Tabelul 16

a_1	$\frac{1}{8} + \varepsilon$		$\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon$
$\bar{\bar{A}}_2(a_1)$	$\bar{\bar{A}}_2\left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right)$	$\searrow$	$\bar{\bar{A}}_2\left(\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon\right)$

Dat fiind că (13) dă $\bar{\bar{a}}_2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$, se deduce din tabelele 7 și 12 că în tabelele 8 și 16

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \bar{A}_2\left(\frac{1}{8} - \varepsilon\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \bar{\bar{A}}_2\left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right) = \frac{1}{8}. \tag{37}$$

Relația asociată relației (21) pentru funcția $f_{16}(a_1, a_2)$ din (34) este — conform lui (33) —

$$\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2} = f'_{12}(a_2) = \frac{\sqrt{4 - m}}{\sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\,(a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}})^2} > 0.$$

Se deduce deci din (32) și (34) $f_{16}\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right) = 0$ și din expresia de mai sus a lui $\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}$,

$$\left.\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}\right|_{a_1 = \frac{2}{\pi^2},\, a_2 = \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\pi^3}{4} \neq 0,$$

așa că, conform teoremei funcțiilor implicite se are în tabelul 16

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \bar{A}_2\left(\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\pi^2}. \tag{38}$$

6°. $a_1 = \frac{2}{\pi^2}$. În acest caz pentru $a_2 < \frac{a_1}{2}$ se are tot tabelele 13 și 11, respectiv 14 și 11, în care $f_1(0) < 0$, pentru că în (36) $a_2 < \frac{a_1}{2} = \frac{1}{\pi^2}$. Pentru $a_2 = \frac{a_1}{2}$ se are însă tabelele nr. 14 (cu $f_1(0) = f'_1(0) = 0$, conform lui (36) și (8)), și 11, așa că $\alpha\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi^2}$. Este ușor de constatat că perechea $\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$ astfel determinată este perechea minimă absolut în raport cu a_2, pentru că conform lui (36) și (7*a*) dacă $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}$, atunci $a_2 \geqq \frac{1}{\pi^2}$, iar dacă $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$, atunci $f_1(0) = 0$ și pentru ca $f_1(m_1) \geqq 0$ este necesar ca $f'_1(0) \geqq 0$, deci în (8)

$$f_3(0) = \frac{4}{\pi} m_2 \sqrt{m_2}\left(\frac{2}{\pi^2} - a_1\right) \leqq 0,$$

așa dar $a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}$.

S-a regăsit astfel rezultatul lui Z. Opial.

7°. $\frac{2}{\pi^2} < a_1 < \frac{1}{2}$. Pentru $a_2 < \frac{a_1}{2}$, se are tot tabelele 13 și 11, respectiv 14 și 11, precum și tabelele 17 și 18, după cum $a_1 < \frac{1}{4}$ sau $a_1 \geqq \frac{1}{4}$.

Tabelul 17

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{a_1}{2}$
$f_{19}(a_2)$	$f_{19}\left(\frac{1}{4} - a_1\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{19}\left(\frac{a_1}{2}\right)$

Tabelul 18

a_2	0		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{a_1}{2}$
$f_{19}(a_2)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{19}\left(\frac{a_1}{2}\right)$

8°. $a_1 = \frac{1}{2}$. Relația (8) dă

$$f_3(m_1) = \frac{1}{4}\,[m_1^2 + 2(4a_2 - 1)m_2]\,[-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 16a_2m_2}].$$

Dacă $a_2 < \frac{1}{4}$, se are tabelul 14 (în care $\overline{m}_1$ este înlocuit cu $\sqrt{2(1 - 4a_2)m_2}$), precum și tabelele 11 și 18.

9°. $\frac{1}{2} < a_1 \leqq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. Dacă $a_1 < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ și $a_2 < \frac{a_1}{2}$, se deduce din (35) și din faptul că pentru $a_2 < \frac{a_1}{2}$ se are $a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1) > 0$, că în (10) singură relația întîia este verificată. Se are deci tabelele nr. 14 (cu $\overline{m}_1$ în loc de $\overline{m}_1$), nr. 11 și 18. Dacă $a_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, se ajunge la aceași concluzie, dacă se ține seamă că în (11)

$$R = 4a_1^2(1 - 2a_1)^2\,[a_1^2 - (2a_1 - 1)a_2] > 0, \text{ pentru } a_2 < \frac{a_1}{2}.$$

10°. $a_1 > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. În acest caz (13) dă $\bar{a}_1 > 0$, $\bar{\bar{a}}_2 > 0$, iar (11)

$$P_2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \left(\frac{a_1}{2}(1 - 2a_1)\right)^2 > 0 \text{ și } \frac{a_1}{2} - \frac{\bar{a}_2 + \bar{\bar{a}}_2}{2} = \frac{a_1}{2}\,\frac{1 - 8a_1 - 4a_1^2}{1 - 12a_1 + 4a_1^2} < 0,$$

așa că $\frac{a_1}{2} < \bar{a}_2$. Pentru $a_2 < \frac{a_1}{2}$ se are deci în (11) $R > 0$, deci aceeași concluzie ca în cazul 9°.

Așa dar, $\alpha(a_1)$ este:

În cazurile 1° *și* 2°, $\bar{A}_1(a_1)$ — *rădăcina lui* $f_4(a_2)$ *dat de* (19) *și* (17) (*tabelele* 1, 3, 4 și 7).
În cazul 3°, $\frac{1}{8}$.
În cazurile 4° *și* 5°, $\bar{A}_2(a_1)$ — *rădăcina lui* $f_{12}(a_2)$ *dat de* (32) *și* (17) (*tabelele* 9, 11, 12, și 15)
În cazurile 6° — 10°, $\frac{1}{\pi^2}$ (*tabelele* 14, 11, 17, și 18) (39)

Tabelele 6, 8 și 16 și relațiile (37), (38) și (39) se pot rezuma în tabelul 19. De altfel, faptul că pentru $a_1 < \frac{2}{\pi^2}$ se are $\alpha(a_1) > \frac{1}{\pi^2}$, era evident pentru că în cazurile 1° și 2° în tabelul 1 și în cazurile 4° și 5° în tabelul 9 se are $f_1(0) > 0$, deci conform lui (36), $\alpha(a_1) > \frac{1}{\pi^2}$.

Tabelul 19

a_1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$\alpha(a_1)$	$\infty \searrow$	$\frac{1}{8} \searrow$	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{\pi^2}$

Teorema este deci demonstrată.

3. Se va determina acum ca aplicație a teoremei stabilite perechea minimă în raport cu cîteva funcții simple în sensul definiției 3.

TEOREMA 2. 1°. *Perechea minimă în raport cu funcția* $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ *este perechea* $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

2°. *Perechea minimă în raport cu funcția* $f(a_1, a_2) = a_1 a_2$ *este tot perechea*, $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

Demonstrație. Dacă funcția $f(a_1, a_2)$ este o funcție crescătoare în raport cu a_2, evident că perechea minimă respectivă se află printre perechile minime relativ în raport cu a_2. Dacă se înseamnă deci

$$f_{20}(a_1) = f(a_1, \alpha(a_1)), \tag{40}$$

perechea respectivă este deci perechea $(\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1))$ pentru care conform lui (39)

$$f_{20}(\bar{a}_1) = \min_{a_1 \geqq 0} f_{20}(a_1) = \min\left[\inf_{0<a_1<\frac{1}{8}} f(a_1, \bar{A}_2(a_1)),\right.$$

$$\left. f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right), \inf_{\frac{1}{8}<a_1<\frac{2}{\pi^2}} f(a_1, \bar{A}_2(a_1)), \inf_{a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right)\right]. \tag{41}$$

1°. Dacă $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, atunci în (40) $f_{20}(a_1)$ are forma $f_{21}(a_1) = a_1 + \alpha(a_1)$.

Ori, (23), (25) și (21), respectiv (34) și (33) dau

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_2'(a_1) &= -\frac{1}{2}\left(a_1\bar{m} + \sqrt{4a_2\bar{m} + a_1^2\bar{m}^2}\right)\Big|_{a_2=\bar{A}_2(a_1)} \\ \bar{\bar{A}}_2'(a_1) &= -\frac{1}{2}\left(a_1\bar{\bar{m}} + \sqrt{4a_2\bar{\bar{m}} + a_1^2\bar{\bar{m}}^2}\right)\Big|_{a_2=\bar{\bar{A}}_2(a_1)} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Așadar, dacă

$$f_{22}(a_1) = f(a_1, \bar{A}_2(a_1)) = a_1 + \bar{A}_2(a_1),$$

$$f_{23}(a_1) = f(a_1, \bar{\bar{A}}_2(a_1)) = a_1 + \bar{\bar{A}}_2(a_1),$$

se are

$$\left.\begin{aligned} f_{22}'(a_1) &= 1 - \frac{1}{2}\left(a_1\bar{m} + \sqrt{4a_2\bar{\bar{m}} + a_1^2\bar{\bar{m}}^2}\right)\Big|_{a_2=\bar{A}_2(a_1)} \\ f_{23}'(a_1) &= 1 - \frac{1}{2}\left(a_1\bar{m} + \sqrt{4a_2\bar{m} + a_1^2\bar{m}^2}\right)\Big|_{a_2=\bar{\bar{A}}_2(a_1)} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Dacă s-ar avea pentru un $a_1 = a_1^0 : f_{22}'(a_1^0) = 0$, s-ar deduce din această relație și din relația (19) $f_4(\bar{A}_2(a_1)) = 0$, relația $f_{24}(\bar{\bar{m}}^*) = 0$*), unde

$$f_{24}(m) = \frac{1}{4}\sqrt{m(m-4)} - \ln\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-4}}{2}.$$

Ori această relație nu poate avea loc, pentru că

$$f_{24}'(m) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m-4}{m}} > 0,$$

deci pentru $m = \bar{\bar{m}}^* > 4$ (conform lui (15) și (16)), $f_{24}(\bar{\bar{m}}^*) > f_{24}(4) = 0$. Funcția $\bar{A}_2(a_1)$ din tabelul 4 este o funcție continuă în intervalul $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, pentru că dacă se ia un $a_1^0 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ oarecare, se deduce din (26) cu $a_1 = a_1^0$ și din teorema funcțiilor implicite că $A_2(a_1)$ este continuă pentru valoarea $a_1 = a_1^0$.

Se deduce de aici și din (17) că $f_{22}'(a_1)$ este continuă în intervalul $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ și cum nu se anulează, păstrează un semn constant. Ori (17) și (17) dau $\lim\limits_{a_1 \to 0} a_1\bar{\bar{m}}\Big|_{a_2=\bar{A}_2(a_1)} = \infty$, deci conform lui (43), in intervalul $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $f_{22}'(a_1) < 0$, în care caz (37), arată că

$$\inf_{0<a_1<\frac{1}{8}} f(a_1, \bar{A}_2(a_1)) = \frac{1}{4}. \tag{44}$$

Dacă s-ar avea pentru un $a_1 = a_1^0$, $f_{23}'(a_1^0) = 0$, s-ar deduce din această relație și din relația (32) $f_{12}(\bar{\bar{A}}_2(a_1)) = 0$, relația $f_{25}(\bar{m}^*) = 0$**),

$$f_{25}(m) = -\frac{1}{4}\sqrt{m(4-m)} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4-m}{m}}.$$

Relația aceasta iarăș nu poate avea loc, pentru că

$$f_{25}'(m) = -\sqrt{\frac{4-m}{m}} < 0,$$

---

*) S-a însemnat prin $\bar{\bar{m}}^*$ valoarea obținută făcînd în expresia (17) a lui $\bar{\bar{m}}$: $a_2 = \bar{A}_2(a_1)$.

**) S-a însemnat prin $\bar{m}^*$ valoarea obținută făcînd în expresia (17) a lui $\bar{m}$: $a_2 = \bar{\bar{A}}_2(a_1)$.

deci pentru $0 < \overline{m}^* < 4$ (conform lui (15) și (31))

$$f_{25}(\overline{m}^*) > f_{25}(4) = 0.$$

Se deduce la fel ca pentru funcția $\bar{A}_2(a_1)$, că $\bar{\bar{A}}_2(a_1)$ — în baza ultimei relații (34) — este continuă în intervalul $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$, în care caz (17) spune că $f'_{23}(a_1)$ este continuă în acest interval și cum nu se anulează, păstrează un semn constant. Ori, (37) și (38) dau

$$\lim_{\substack{a_1 \to \frac{1}{8} \\ a_1 > \frac{1}{8}}} f_{23}(a_1) = \frac{1}{4} < \lim_{a_1 \to \frac{2}{\pi^2},\ a_1 < \frac{2}{\pi^2}} f_{23}(a_1) = \frac{3}{\pi^2},$$

așa că $f_{23}(a_1)$ crește în intervalul $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$, deci

$$\inf_{\frac{1}{8} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}} f(a_1, \bar{\bar{A}}(a_1)) = \frac{1}{4}. \tag{45}$$

Dacă $f_{26}(a_1) = a_1 + \frac{1}{\pi^2}$, evident că

$$\inf_{a_1 \geq \frac{2}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right) = \min_{a_1 \geq \frac{2}{\pi^2}} f_{26}(a_1) = \frac{3}{\pi^2} > \frac{1}{4}. \tag{46}$$

Se deduce deci din (44), (45), (46) că în (41) $\bar{a}_1 = \alpha(a_1) = \frac{1}{8}$; ceea ce dovedește punctul 1° al teoremei.

2°. Dacă $f(a_1, a_2) = a_1 a_2$, iar $f_{27}(a_1) = f(a_1, \bar{A}_2(a_1)) = a_1 \bar{A}_2(a_1)$, relația (42) dă

$$f'_{27}(a_1) = A_2(a_1) - \frac{a_1}{2}\left(a_1\overline{m} + \sqrt{4a_2\overline{m} + a_1^2\overline{m}^2}\right)\Big|_{a_2 = A_2(a_1)} \tag{47}$$

Relația (47) $f'_{27}(a_1) = 0$ dă $\bar{A}_2 = 2\,\overline{\overline{m}}^*\, a_1^{2*}$. Dacă se înlocuiește această expresie a lui $\bar{A}_2$ în relația (19), $f_4(\bar{A}_2) = 0$, se are

$$a_1 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\overline{\overline{m}}^* - 4}{\overline{\overline{m}}^*}}\,\frac{1}{\ln\dfrac{\sqrt{\overline{\overline{m}}^*} + \sqrt{\overline{\overline{m}}^* - 4}}{2}}. \tag{48}$$

Ori, (11) și (17) dau cu valoarea de mai sus a lui $a_2 = \bar{A}_2$:

$$[12\overline{\overline{m}}^* a_1 - (\overline{\overline{m}}^* + 2)]\,(3\overline{\overline{m}}^* a_1 + \overline{\overline{m}}^* - 1) = 0.$$

*) S-a însemnat prin $\overline{\overline{m}}^*$ valoarea obținută făcînd în expresia (17) $a_2 = \bar{A}_2(a_1)$.

Se deduce de aici și din (48), $f_{28}(\overline{\overline{m}}^*) = 0$ sau $f_{29}(\overline{\overline{m}}^*) = 0$, unde

$$f_{28}(m) = -\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{m(m-4)}}{m+2} + \ln\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-4}}{2},$$

$$f_{29}(m) = \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{m(m-4)}}{m-1} + \ln\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-4}}{2}.$$

Deoarece $\overline{\overline{m}}^* > 4$ — cum s-a mai amintit și în demonstrația punctului 1° — relația $f_{29}(\overline{\overline{m}}^*) = 0$ nu poate avea loc, iar întrucît $f'_{28}(m) = \frac{m-4}{2(m+2)^2}\sqrt{\frac{m-4}{m}} > 0$, se are $f_{28}(\overline{\overline{m}}^*) > f_{28}(4) = 0$, așa că în (47) $f'_{27}(a_1) \neq 0$ pentru orice $a_1 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

Se constată ca pentru $f'_{22}(a_1)$ de la punctul 1° că $f'_{27}(a_1)$ este continuă și deci păstrează un semn constant în intervalul $\left(0, \frac{1}{8}\right)$.

Ori (17) și (47) dau

$$f'_{27}(a_1) < A_2 - \sqrt{a_1^2\overline{m}A_2}\,\Big|_{a_2 = \bar{A}_2} < \bar{A}_2 - \sqrt{\frac{K\bar{A}_2^2}{4a_1}} = \bar{A}_2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{a_1}}\right),$$

pentru $a_1 > 0$ destul de mic încît să se aibă $1 - 8a_1 - 4a_1^2 > K$ (fixat între 0 și 1); cum $\lim\limits_{a_1 \to 0}\sqrt{\frac{K}{a_1}} = \infty$, se deduce că $f'_{27}(a_1) < 0$, în care caz (37) dă

$$\inf_{a < a_1 < \frac{1}{8}} f(a_1, \bar{A}_2(a_1)) = \frac{1}{64}. \tag{49}$$

Se va însemna acum $f_{30}(a_1) = f(a_1) = f(a_1, \bar{\bar{A}}_2(a_1)) = a_1\,\bar{\bar{A}}_2(a_1)$, așa că (42) dă

$$f'_{30}(a_1) = \bar{\bar{A}}_2(a_1) - \frac{a_1}{2}\left(a_1\overline{m} + \sqrt{4a_2\overline{m} + a_1^2\overline{m}^2}\right)\Big|_{a_2 = \bar{\bar{A}}_2(a_1)}. \tag{50}$$

Relația (50) $f'_{30}(a_1) = 0$ dă $\bar{\bar{A}}_2 = 2\overline{m}^* a_1^{2*}$). Dacă se înlocuiește această expresie a lui $\bar{\bar{A}}_2$ în relația (32), $f_{12}(\bar{\bar{A}}_2) = 0$, se are

$$a_1 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{4 - \overline{m}^*}{\overline{m}^*}}\,\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{4 - \overline{m}^*}{\overline{m}^*}}}. \tag{51}$$

*) S-a însemnat prin $\overline{m}^*$ valoarea obținută făcînd în expresia (17), $a_2 = \bar{\bar{A}}_2(a_1)$.

Ori, (11) și (17) dau cu valoarea de mai sus a lui $a_2 = \bar{\bar{A}}_2$:

$$(12\overline{m}^* a_1 - (\overline{m}^* + 2))\ (3\overline{m}^* a_1 + \overline{m}^* - 1) = 0.$$

Se deduce de aici și din (51) $f_{31}(\overline{m}^*) = 0$, sau sau $f_{32}(\overline{m}^*) = 0$, unde

$$\left.\begin{aligned} f_{31}(m) &= -\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{m(4-m)}}{m+2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4-m}{m}} \\ \text{și}\qquad & \\ f_{32}(m) &= \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{m(4-m)}}{m-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4-m}{m}} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

așa că

$$f_{31}'(m) = -\frac{4-m}{2(2+m)^2}\sqrt{\frac{4-m}{m}} < 0$$

și

$$f_{32}'(m) = -\frac{4m^2 - 5m + 10}{8(m-1)^2\sqrt{m(4-m)}} < 0.$$

Ori, așa cum s-a mai amintit la punctul 1°, $\overline{m}^* < 4$, așa că pentru $0 \leq \overline{m}^* < 4$ se are $f_{31}(\overline{m}^*) > f_{31}(4) = 0$, deci relația $f_{31}(\overline{m}^*) = 0$ nu poate avea loc.

Tabelul 20

m	0	m_0	1	4
$f_{32}(m)$	$\frac{\pi}{2} \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty\ +\infty \searrow$	0

Tabelul 20 prezintă rădăcina m_0 a lui $f_{32}(m)$, însă cum $f_{32}\left(\frac{\pi^2}{6+\pi^2}\right) = -\frac{\pi}{16}\sqrt{24+3\pi^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{24+3\pi^2}{\pi^2}} < 0$*), acel tabel dă $m_0 < \frac{\pi^2}{6+\pi^2}$. Dacă se însemnă cu a_1^0 valoarea lui a_1 dată de (51), cînd $\overline{m}^* = m_0$, se deduce deci din (52) $a_1^0 = \frac{1-\overline{m}_0}{3\overline{m}_0} > \frac{2}{\pi^2}$. Ori (51) și (53) spun că singura rădăcină a lui $f_{30}'(a_1)$ ar putea fi a_1^0, așa că $f_{30}'(a_1) \neq 0$ pentru orice $a_1 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$.

---

*) Pentru că $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{24+3\pi^2}{\pi^2}} < \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{16}\sqrt{24+3\pi^2}$.

Se constată ca pentru expresia $f_{23}'(a_1)$ de la punctul 1°, că $f_{33}'(a_1)$ din (50) este continuă și deci păstrează un semn constant în acest interval.

Ori, (37) și (38) dau

$$\lim_{a_1 \to \frac{1}{8},\ a_1 > \frac{1}{8}} f_{30}(a_1) = \frac{1}{64} < \lim_{a_1 \to \frac{2}{\pi^2},\ a_1 < \frac{2}{\pi^2}} f_{30}(a_1) = \frac{2}{\pi^4},$$

așa că $f_{30}(a_1)$ crește în intervalul $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi_2}\right)$, în care caz

$$\inf_{\frac{1}{8} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}} f(a_1, \bar{A}_2(a_1)) = \frac{1}{64}. \tag{54}$$

Dacă $f_{33}(a_1) = \frac{a_1}{\pi^2}$, evident că

$$\inf_{a_1 \geq \frac{2}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right) = \min_{a_1 \geq \frac{2}{\pi^2}} f_{33}(a_1) = \frac{2}{\pi^4} > \frac{1}{64}. \tag{55}$$

Se deduce deci din (49), (54), (55) că în (41) $\overline{a}_1 = \alpha(\overline{a}_1) = \frac{1}{8}$, ceea ce dovedește punctul 2° al teoremei.

TEOREMA 3. *Perechea minimă în raport cu funcția*

$$f(a_1, a_2) = a_1^m + a_2^m$$

(*m număr natural*) *este perechea* $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

Demonstrație. Dacă se înseamnă $d = a_2 - a_1$, $p = a_1 a_2$, se deduce $a_1 = \frac{1}{2}(-d + \sqrt{d^2 + 4p})$, $a_2 = \frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 + 4p})$, așa că

$$f(a_1, a_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2n-1}} \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{m} C_{2n}^{2\sigma} d^{2\sigma}(d^2 + 4p)^{n-\sigma} & \text{pentru } m = 2n \text{ (par)} \\ \dfrac{\sqrt{d^2+4p}}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{n} C_{2n+1}^{2\sigma} d^{2\sigma}(d^2 + 4p)^{n-\sigma} & \text{pentru } m = 2n+1 \text{ (impar).} \end{cases}$$

Conform teoremei 2, perechea $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ este perechea minimă în raport cu funcția p (și evident și în raport cu funcția d^2), așa că întrucît $f(a_1, a_2)$ considerată ca o funcție de d^2 și de p este crescătoare în raport cu fiecare din aceste variabile nenegative, își va atinge minimul pentru perechea care realizează minimul lor, adică pentru perechea $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, ceea ce dovedește teorema.

Evident că teorema aceasta cuprinde ca un caz particular ($m = 1$) punctul 1° al teoremei 2.

4. Se vor face cîteva observații referitoare la teorema 1 și la demonstrația ei.

1°. Se va deduce pe altă cale relația (38) și anume se va însemna în tabelul 15

$$a_1 = \frac{2}{\pi^2} - \varepsilon, \quad \bar{\bar{A}}_2 = \frac{1}{\pi^2} + \varphi$$

cu $\varepsilon > 0$ și $\mu = \varphi(\varepsilon) > 0$.

În acest caz (17) dă

$$\left.\begin{aligned}
\overline{m} = \overline{m}(\varepsilon) = \frac{1}{4\left(\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon\right)^3} & \left\{\frac{1}{\pi^2}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)^2 - \frac{32}{\pi^4}\varepsilon + 2\left(1 + \frac{10}{\pi^2}\right)\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \right. \\
& \left. + \varphi\left[1 - \frac{16}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^4} + 8\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)\varepsilon - 4\varepsilon^2\right] - \left(1 - \frac{4}{\pi^2} + 2\varepsilon\right)\sqrt{P_2},\right\} \\
P_2 = \frac{1}{\pi^4}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)^2 & - \frac{4}{\pi^4}\left(1 + \frac{12}{\pi^2}\right)\varepsilon + \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \frac{13}{\pi^2}\right)\varepsilon^2 - \frac{24}{\pi^2}\varepsilon^3 + \\
+ 16\varepsilon^4 + 2 & \left[\frac{1}{\pi^2}\left(1 - \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^4}\right) + \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right)\varepsilon + 2\left(1 - \frac{10}{\pi^2}\right)\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3\right]\varphi + \\
& + \left[1 - \frac{24}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^4} + 4\left(3 - \frac{4}{\pi^2}\right)\varepsilon + 4\varepsilon^2\right]\varphi^2.
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Ori, în tabelul 15, $\bar{\bar{A}}_2(a_1) < \bar{\bar{a}}_2(a_1) < M(M\text{fix})$, așa că $\varphi < M = \frac{1}{\pi^2}$ pentru $0 < \varepsilon < \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{8}$, în care caz $\lim\limits_{\varepsilon\to0} \varepsilon\,\varphi(\varepsilon) = 0$, așa că (56) dă

$$\overline{m}_0 = \lim_{\varepsilon\to0} \overline{m}(\varepsilon) = \frac{1}{32}\left[(\pi^2 - 4)^2 + \pi^2(\pi^4 - 16\pi^2 - 16)\varphi_0 - \right. \quad (57)$$

$$\left. - (\pi^2 - 4)\sqrt{(\pi^2 - 4)^2 + 2\pi^2(\pi^4 - 16\pi^2 + 16)\varphi_0 + \pi^4(\pi^4 - 24\pi^2 + 16)\varphi_0^2}\right],$$

unde $\varphi_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\varphi(\varepsilon)$. Ori, $\bar{\bar{A}}_2(a_1)$ este o funcție continuă de a_1 în intervalul $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$, așa cum s-a menționat în demonstrația teoremei 2, deci și $\varphi(\varepsilon)$ este o funcție continuă de ε în intervalul $\left(0, \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{8}\right)$, așa că dacă se face în (32) $a_1 = \frac{2}{\pi^2} - \varepsilon$, $\bar{\bar{A}}_2 = \frac{1}{\pi^2} + \varphi(\varepsilon)$ și apoi $\varepsilon \to 0$, se obține ecuația

$$f_{34}(\varphi_0) = \frac{\sqrt{4 - \overline{m}_0}}{4\left(\frac{1}{\pi^2} + \varphi_0\right)}\left(\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\overline{m}_0} - \sqrt{\frac{1}{\pi^4}\overline{m}_0 + \frac{1}{\pi^2} + \varphi_0}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 - \overline{m}_0}{\overline{m}_0}} = 0.$$

Se constată cu ajutorul lui (57) că $\lim\limits_{\varphi_0\to0} f_{34}(\varphi_0) = 0$, așa că $\varphi_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\varphi(\varepsilon) = 0$, de unde se deduce relația (38) în chestiune.

2°. Funcțiile $f_4(a_2)$ și $f_{12}(a_2)$ date de (17), (19) și (32) au fost definite respectiv pentru $a_1 < \frac{1}{8}$ și $a_1 > \frac{1}{8}$. Dacă se face în aceste expresii $a_1 = \frac{1}{8}$, se obțin funcțiile

$$-4\frac{\sqrt{1 - 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}}{\sqrt{5 - 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}} + \sqrt{5 + 248a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}} +$$

$$+ \ln\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{5 - 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}\right)\right]$$

și

$$\frac{-4\sqrt{-1 + 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}}{\sqrt{5 - 8a_2 - 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}} + \sqrt{5 + 248a_2 - 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-1 + 8a_2 + 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}{5 - 8a_2 - 3\sqrt{(1 - 8a_2)(1 + 56a_2)}}},$$

care se anulează pentru $a_2 = \frac{1}{8}$.

3°. Se va dovedi că în tabelul 19, $\alpha\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{4}$. În acest scop se va deduce din (19) și (17) pentru $a_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, $f_4\left(\frac{1}{4}\right) = x_1 - x_2$, cu

$$x_1 = \ln\left[\sqrt{\frac{1}{2}(9 + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})}\right],$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{5}{2} + 6\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} - \sqrt{-1 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}.$$

Dacă se ia pentru $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ respectiv valorile 1, 414, 2,236,3,162, se are $x_1 > \ln(\sqrt{15,258} + \sqrt{14,258}) > \ln(3,90 + 3,77) = \ln 7,67 > 2,3 \log_{10} 7,67$.

Dacă se ia în expresia lui x_2 în întîia rădăcină suprapusă pentru $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, respectiv valorile 1,42, 2, 24, 3,17, iar în a doua rădăcină suprapusă valorile adoptate în estimarea lui x_1, se are $x_2 < 4,56 - 2,53 = 2,03$, așa că $\frac{x_1 - x_2}{2,3} > \log_{10} 7,67 - \frac{2,03}{2,3} > 0,884 - 0,883 > 0$.

Aşadar $f_4\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, în care caz tabelul 4 dă în tabelul 19, $\alpha\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) = \bar{A}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) < \frac{1}{4}$.

5. Se va observa în încheiere că tabelul 19 spune că pentru orice $a_1 = \bar{a}_1 \leqq \frac{2}{\pi^2}$, perechea $(\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1))$ minimă relativ în raport cu a_2 este şi minimă relativ în raport cu a_1, pentru că perechea $(a_1, \alpha(\bar{a}_1))$ cu $a_1 < \bar{a}_1$ nu mai aparţine mulţimii $\mathscr{M}$, dat fiind că $\alpha(\bar{a}_1) < \alpha(a_1)$.

Aşadar perechea minimă relativ în raport cu a_1 pentru un a_2 dat, este perechea $(\beta(a_2), a_2)$, unde $\beta(a_2)$ este funcţia inversă funcţiei $\alpha(a_1)$, adică rădăcina ecuaţiei în necunoscuta $a_1 : a_2 = \alpha(a_1)$; conform aceluiaşi tabel 19, această rădăcină este determinată în mod unic pentru orice $a_2 \geqq \frac{1}{\pi^2}$, şi variaţia ei este dată de tabelul 21, iar conform relaţiilor $\bar{A}_2'(a_1) < 0$ şi $\bar{\bar{A}}_2'(a_1) < 0$ *), funcţia $\beta(a_2)$ este derivabilă cu $\beta'(a_2) = \frac{1}{\alpha'(a_1)} = \frac{1}{\alpha'(\beta(a_2))} < 0$.

Tabelul 21

a_2	$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{1}{8}$		∞
$\beta(a_2)$	$\frac{2}{\pi^2}$	$\searrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

Aşadar s-a demonstrat cu aceasta

TEOREMA 4. *Perechea minimă relativ în raport cu a_2 este $(\beta(a_2), a_2)$ unde funcţia $\beta(a_2)$ se defineşte astfel: Dacă $\frac{1}{\pi^2} \leqq a_2 < \frac{1}{8}$, atunci $\beta(a_2)$ este rădăcina ecuaţiei $f_{35}(a_1) = 0$, unde funcţia $f_{35}(a_1)$ este expresia $f_{12}(a_2)$ din enunţul teoremei 1, privită ca funcţie de a_1* **).

Dacă $a_2 = \frac{1}{8}$, atunci $\beta(a_2) = \frac{1}{8}$. Dacă $a_2 > \frac{1}{8}$, atunci $\beta(a_2)$ este rădăcina ecuaţiei $f_{36}(a_1) = 0$, unde $f_{36}(a_1)$ este expresia $f_4(a_2)$ din enunţul teoremei 1. Funcţia $\beta(a_2)$ este descrescătoare şi $\lim\limits_{a_2 \to \infty} \beta(a_2) = 0$.

Întrucît în tabelul 21, $\lim\limits_{a_2 \to \infty} \beta(a_2) = 0$, se confirmă din nou faptul că în cazul lui a_1 nu există o pereche minimă absolut în raport cu această variabilă.

*) Scrise respectiv după relaţiile (26) şi (36).

**) Pentru că dacă $\frac{1}{\pi^2} \leqslant a_2 < \frac{1}{8}$ şi $a_2 = \alpha(a_1)$, tabelul 16 dă $\alpha(a_1) = \bar{\bar{A}}_2(a_1)$, deci $a_2 \equiv \bar{\bar{A}}_2(\beta(a_2))$; aşadar (34) dă $f_{35}(\beta(a_2)) = f_{16}[\beta(a_2), \bar{\bar{A}}_2(\beta(a_2))] \equiv 0$, întrucît $f_{16}(a_1, \bar{\bar{A}}_2(a_1)) \equiv 0$.

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЕ ЛЯ ВАЛЕ ПУСЕНА В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке определяются минимальные элементы (в смысле определений из первого параграфа) множества $\mathscr{M}$ которое определяется следующим образом

Рассмотрим множество уравнений $(\mathscr{E})$ вида

$$(E): \quad y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$$

где $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$

пробегают множество функций непрерывных в заданном интервале $[0, l]$. Относительно заданного уравнения (E) из $\mathscr{E}$ обозначается через $\mathscr{H}_E$ множество положительных чисел h, обладающих тем свойством, что существует по меньшей мере один нетождественно нулевой интеграл уравнения (E), который обращается в нуль при $x = 0$ и $x = h$. Ещё обозначается

$$m_i = \max_{x \in [0,h]} |p_i(x)| \quad (i = 1, 2).$$

Множество $\mathscr{M}$ является множеством пар положительных чисел a_1, a_2, обладающих тем свойством, что соотношение $1 \leq a_1 m_1 h + a_2 m_2 h$ верно для любых $h \in \mathscr{H}_E$ и любого уравнения (E) из $\mathscr{E}$.

В случае определения 3 рассматриваются для функции $f(a_1, a_2)$ три простых частных вида.

SUR L'INÉGALITÉ DE DE LA VALLÉE POUSSIN DANS LE CAS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

RÉSUMÉ

Dans cette note on détermine les éléments minimes — dans le sens des définitions données au § 1 — de l'ensemble $\mathscr{M}$ que l'on définit de la façon suivante :

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des équations (E) de la forme

$$(E): \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

où $p_i(x)$ $(i = 1,2)$ parcourent l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[0,l]$ donné. Concernant une équation donnée (E) de $\mathscr{E}$ on désigne par $\mathscr{H}_E$ l'ensemble des nombres positifs, qui possèdent la propriété qu'il existe au moins une intégrale non identiquement nulle de l'équation (E), qui s'annule pour $x = 0$ et $x = h$. On pose également

$$m_i = \max_{x \in [0,h]} |p_i(x)| \quad (i = 1, 2).$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ est l'ensemble des paires de nombres positifs (a_1, a_2) qui ont la propriété que la relation

$$1 \leq a_1 m_1 h + a_2 m_2 h^2$$

a lieu pour n'importe quel $h \in H_E$ et pour toute équation (E) de $\mathcal{E}$.

Dans la cas de la définition **3**, on considère pour la fonction $f\,(a_1, a_2)$ trois formes simples particulières.

BIBLIOGRAPHIE

1. Hartman Ph., Wintner A., *On an oscillation criterion of De la Vallée-Poussin.* Quarterly of Applied Mathematics, **13**, 330–332 (1955).
2. Opial Z., *Sur une inégalité de C. de la Vallée-Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Ann. Polonici Mathematici, **VI**, 87–91 (1959).
3. Vallée Poussin, Ch. de la, *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Journal de Math. pures et appliquées, **X**, 125–144 (1929).

Primit la 1. II. 1963.