ASUPRA EVALUĂRII SOLUŢIILOR PROBLEMELOR DE CONTUR PENTRU UNELE TIPURI DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE

DE

D. MANGERON

(Iaşi)

1. Într-o serie de lucrări anterioare [1]—[4], bazate pe o nouă clasă de *probleme de contur de tip neeliptic* de ordin superior, formulate şi rezolvate în parte de autor şi continuate apoi cu succes şi de alţi cercetători [5]—[10], autorul a studiat, singur sau în colaborare cu L. E. Krivoşein [11]—[13], un vast şir de probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu derivate parţiale sau cu „derivate totale", care constituie scheme matematice a numeroaselor fenomene de fizică şi tehnică modernă, cum sînt, de exemplu, unele fenomene nucleare sau de transport de substanţă [14]—[15].

În cele ce urmează se dau evaluări aposteriorice şi apriorice pentru soluţiile problemelor de contur

$$[D^i u(x, y)]_{x=a} = \varphi_i(y)\,; \qquad [D^i u(x, y)]_{y=0} = \psi^i(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{1}$$

şi

$$u(A)\,|_{FR} = \mu_0(x, y)\,; \qquad D^i u(A)\,|_{FR_1} = \mu_i(x, y) \tag{2}$$

$$FR_1 \equiv \begin{cases} x = a, & c \leqslant y \leqslant d \\ y = c, & a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

pentru ecuaţii cu derivate parţiale integro-diferenţiale

$$D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f(A) + \lambda \iint_R \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB \tag{3}$$

şi

$$D^k u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f(A) + \lambda \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K^*_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB, \tag{4}$$

în care $Du(A) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ este derivata totală în sensul lui M. P i c o n e [16], [17]

$$\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j}u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j};$$

$$f(A) \equiv f(x, y), \quad K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta),$$

$$\varphi_i(y), \ \psi_i(x), \ r_{ij}(A) = r_{ij}(x, y), \ \mu_0(x, y), \ \mu_i(x, y)$$

sînt funcţii continue cunoscute pentru toate valorile variabilelor $(x, \xi) \in [a, b]$, $(y, \eta) \in [c, d]$; $R = [a, b] \times [c, d]$ este un dreptunghi, $u(A) \equiv u(x, y)$ este funcţia necunoscută, λ este un parametru, k un număr întreg şi pozitiv. Cel puţin una din funcţiile $K_{ij}(A, B)$ nu este identic nulă dacă

$$\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in T = \{a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \eta \leqslant y \leqslant d\},$$

sau $\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in R - T$. Funcţiile $K^*_{ij}(A, B)$ sînt presupuse de asemenea cunoscute şi definite în T.

2. Căutînd soluţia problemei de contur (2), (3) sub forma

$$u(A) = \pi(A) + \lambda \iint_R M(A, B) v(B) dB, \tag{5}$$

în care $v(A)$ este noua funcţie necunoscută, determinată prin relaţia

$$v(A) = \iint_R \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}, \tag{6}$$

$\pi(A)$ este o funcţie cunoscută ce satisface condiţiile pe contur neomogene (2), şi funcţia $M(A, B)$, notată astfel în urma lucrărilor autorului [18], [19], de către M. S a l v a d o r i [20], este definită după cum urmează

$$M(x, y, \xi, \eta) \equiv$$

$$\begin{cases} \dfrac{[(x-a)(b-\xi)(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{[(b-a)(d-c)]^{k-1}(k-1)!^2}, & x \leqslant \xi,\ y \leqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}} - (x-\zeta)^{k-1}\right\} \dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}(k-1)!}, & x \geqslant \xi,\ \eta \geqslant y, \\ \left\{\dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}} (y-\eta)^{k-1}\right\} \dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}(k-1)!}, & x \leqslant \xi,\ y \geqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \left\{\dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}} - \dfrac{(y-\eta)^{k-1}}{1}\right\}, & x \geqslant \xi,\ y \geqslant \eta, \end{cases} \tag{7}$$

se obţine, substituind (5) în relaţia (6),

$$v(A) = \omega(A) + \lambda \iint E(A, B) v(B) dB, \tag{8}$$

în care $\omega(A)$ şi $E(A, B)$ sînt funcţii cunoscute pentru toţi $(A, B) \in R$.

a) Dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$E(A, B) \geqslant 0, \quad \omega(A) > 0, \quad \lambda > 0 \tag{9}$$

şi

$$l_1 = 1 - \max_Q \iint \lambda\, E(A, B)\, dB > 0, \tag{10}$$

în care $Q = \{0 < \lambda < \lambda_1;\ R\}$, atunci în domeniul Q are loc evaluarea

$$|D^p u(A)| \leqslant |D^p w_i(A)| + \lambda \iint_R |D^p_A[M(A, B)] \cdot [U_i(B) - u_i(B)]| dB, \tag{11}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, k-2),$$

$w_i(A)$ fiind egal fie cu $u_i(A)$, sau cu $U_i(A)$, în care

$$\underset{\to\infty}{\mathrm{m}}\, u_i(A) = \pi(A) + \lambda \iint_R M(A, B)[v_0(B) - \sum_0^\infty \alpha_p(B, \lambda)] dB = u(A), \tag{12}$$

$$\lim_{i\to\infty} U_i(A) = \pi(A) + \lambda \iint_R M(A, B)[w_0(B) - \sum_0^\infty \beta_p(B, \lambda)] dB = u(A), \tag{13}$$

$v_0(A)$ şi $w_0(A)$ sînt funcţiuni cunoscute alese astfel ca să fie îndeplinite inegalităţile

$$v_0(A) - \lambda \iint_R E(A, B)\, v_0(B)\, dB - w(A) \equiv \alpha_0(A, \lambda) \leqslant 0, \tag{14}$$

$$w_0(A) - \lambda \iint_R E(A, B)\, w_0(B)\, dB - w(A) \equiv \beta_0(A, \lambda) \geqslant 0 \tag{15}$$

prin care se asigură limitările

$$v_0(A) \leqslant v(A) \leqslant w_0(A), \qquad A \in R, \tag{16}$$

ar $\alpha_p(A, \lambda)$ şi $\beta_p(A, \lambda)$ sînt deviaţii de ordin p ce se obţin ca urmare a subtituirii funcţiilor

$$v_p(A) = v_0(A) - \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(A, \lambda) \tag{17}$$

şi

$$w_p(A) = w_0(A) - \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i(A, \lambda), \tag{18}$$

respectiv în ecuaţia (8).

Observație. Rezultatul obținut, punînd în evidență valabilitatea inegalităților

$$v_i(A) \leqslant v(A) \leqslant w_i(A) \quad (A \in R,\ i = 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

și asigurînd, pe baza condițiilor (10), convergența absolută și uniformă a succesiunilor

$$\{v_i(A)\}_0^\infty \quad \text{și} \quad \{w_i(A)\}_0^\infty$$

către funcția $v(A)$, poate fi studiat mai în detaliu și din punct de vedere al restului, în ordinea de idei a vastei lucrări recente asupra restului în unele formule de aproximare ale analizei, elaborată de T. Popoviciu [21].

b) Fie în

$$E_1(A, B) \equiv E(A, B) - E_2(A, B), \tag{20}$$

în care $|E_2(A, B)| \leqslant \varepsilon$ pentru toți $(A, B) \in R$, este astfel încît s-a putut determina nucleul rezolvant $\Omega(A, B, \lambda)$ corespunzător nucleului $E_1(A, B)$ și relativ la ecuația analogă ecuației (8). În acest caz considerăm drept funcții apropiate de funcțiile $v(A)$ și $u(A)$, respectiv, funcțiile

$$\bar{v}(A) = \omega(A) + \lambda \iint_R \Omega(A, B, \lambda)\omega(B)dB \equiv J(A, \lambda), \tag{21}$$

$$\bar{u}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_R M(A, B)J(B, \lambda)dB. \tag{22}$$

Decalajul dintre membrii din dreapta ai ecuațiilor (5) și (22) poate fi evaluat în modul următor :

$$v(A) - \bar{v}(A) = \lambda \iint_R [E(A, B)v(B) - E_1(A, B)\bar{v}(B)]dB =$$

$$= \lambda \iint_R \{E_1(A, B)[v(B) - \bar{v}(B)] + E_2(A, B)v(B)\}dB. \tag{23}$$

De aici se găsește

$$v(A) - \bar{v}(A) = \lambda \iint_R E_2(A, B)v(B)dB + \lambda^2 \iint_R \Omega(A, B, \lambda)dB.$$

$$\cdot \iint_R E_2(B, C)v(C)dC \equiv \lambda \iint_R E_3(A, B, \lambda)v(B)dB. \tag{24}$$

Prin urmare, dacă $E_2(A, B)$ este aleasă în așa fel ca să aibă loc inegalitatea

$$l_4 = 1 - \max_Q \iint_R |\lambda E_3(A, B, \lambda)| dB > 0, \tag{25}$$

atunci din (24) se obține

$$\max_R |v(A)| \leqslant \max_R |\bar{v}(A)| : l_4 = \tau. \tag{26}$$

Prin urmare, sînt valabile următoarele evaluări aposteriorice

$$|v(A) - \bar{v}(A)| \leqslant \tau \iint_R |\lambda E_3(A, B, \lambda)| dB \equiv \tau d(A, \lambda), \tag{27}$$

$$|u(A) - \bar{u}(A)| \leqslant \iint_R |\lambda M(A, B)| d(B, \lambda)\tau dB, \tag{28}$$

$$|D^p u(A)| \leqslant D^p \bar{u}(A)| + \tau \iint_R |\lambda D_A^p M(A, B)| d(B, \lambda) dB \tag{29}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, k-2;\ (A, \lambda \in Q),$$

similare cu evaluarea (18) pentru derivatele totale de diferite ordine $D^p u(A)$ $(p = 0, 1, \ldots, k-2)$ în sensul lui Picone.

3. Să deducem, în cele ce urmează, evaluări apriorice ale soluției problemei (1), (4). În acest scop problema de contur (1), (4) se reduce la un sistem de ecuații integrale de tip Volterra [22]. Soluția problemei căutate se construiește sub forma

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B)v(B)dB, \tag{30}$$

în care $\Phi(A)$ și $N(A, B)$ se determină prin condițiile

$$D^k\Phi(A) = f(A),\ [D^i\Phi(A)]_{x=a} = \varphi_i(y),\ \ [D^i\Phi(A)]_{y=0} = \psi_i(x), \tag{31}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

$$N(A, B) \equiv [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} : (k-1)!^2, \tag{32}$$

iar funcția $v(A)$ (noua funcție necunoscută) este dată prin relația

$$v(A) \equiv \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}^*(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \cdot \tag{33}$$

Înlocuind în membrul din dreapta din (33), funcțiile $u(A)$ și $u(B)$ pe baza formulei (30), se obține ecuația integrală

$$v(A) - \lambda \iint_T K(A,\, B) v(B)\, dB = F(A,\, \lambda), \tag{34}$$

în care $K(A,\, B)$, $F(A,\, \lambda)$ sînt funcții continue cunoscute, iar $v(A)$ este funcția necunoscută și $a \leqslant x,\ \xi \leqslant b;\ c \leqslant y,\ \eta \leqslant d$.

Din (34) rezultă

$$w(A) - \mu \iint_T |\, K(A,\, B)\,|\, w(B) dB \leqslant |\, F(A)\,|, \tag{35}$$

în care $w(A) \equiv |\, v(A)|$, $\mu = |\, \lambda\,|$. Integrînd (35) în raport cu primul argument între limitele a și x, se obține

$$\begin{aligned} \int_a^x w(t,\, y) dt &\leqslant \int_a^x |\, F(t,\, y)\,|\, dt + \mu \int_a^x dt\, |\, K(t,\, y,\, B)\,|\, wB) dB \equiv \\ &\equiv \Psi(A,\, \lambda) + \mu \iint_T Z(A,\, B) w(B) dB \leqslant k_1 c_1(x) + \mu k_2 c_2(x) \iint_T w(B) dB, \end{aligned} \tag{36}$$

în care k_1 și k_2 sînt constante cunoscute, $c_1(x)$ și $c_2(x)$ sînt funcții cunoscute și $a \leqslant x,\ \xi \leqslant b;\ c \leqslant y,\ \eta \leqslant d;\ c_i(x) > 0\ \ (i = 1,\, 2)$.

Din (36) avem

$$\frac{d_y \left[k_1 c_1(x) + \mu k_2 c_2(x) \iint_T w(B)\, dB \right]}{k_1 c_1(x) + \mu k_2 c_2(x) \iint_T w(B)\, dB} \leqslant k_2 \mu c_2(x). \tag{37}$$

De aici se deduce

$$\ln \left[k_1 c_1(x) + \mu k_2 c_2(x) \iint_T w(B)\, dB \right] \leqslant \ln\, [k_1 c_1(x)] + k_2 \mu c_2(x)(y - b). \tag{38}$$

Prin urmare, avem pentru toți $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$:

$$\int_a^x w(t,\, y) dt \leqslant k_1 c_1(x) \exp [k_2 \mu c_2(x)(y - b)]. \tag{39}$$

Folosind inegalitatea (39), se obține următoarea evaluare aprioric ă a soluției problemei considerate

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{i+j} \Phi}{\partial x^i \partial y^j} \right| + \\ + \mu k_1 (k - 1) \iint_T \frac{\partial^{i+j} N(A,\, B)}{\partial x^i \partial y^j} c_1(\xi) \cdot \exp [k_2 \mu c_2(\xi)(\eta - b)] dB, \\ (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d;\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant k - 1. \end{gathered} \tag{40}$$

Observații. Evaluarea integralei $\int_c^y w(x,\, t) dt$ poate fi făcută urmînd aceeași cale ca și cea folosită pentru evaluarea integralei aflată în membrul din stînga al ecuației (36). Fie

$$\int_c^y w(x,\, t) dt \leqslant r_1 \sigma_1(y) \exp\, [r_2 \mu \sigma_2(y)(x - a)], \tag{41}$$

$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$$

în care $\sigma_1(y) > 0,\ \sigma_2(y) > 0;\ r_i > 0\ \ (i = 1,\, 2)$ sînt mărimi cunoscute. Atunci, folosind inegalitatea (41), se obține

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{i+j} \Phi(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| + \\ + \mu r_1 (k - 1) \iint_T \frac{\partial^{i+j} N(A,B)}{\partial x^i \partial y^j} \sigma_1(\eta)\ \exp\, [r_2 \mu \sigma_2(\eta)(\xi - a)] d\xi\, d\eta \\ (a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d;\ i,\, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, k-1). \end{gathered} \tag{42}$$

Ținînd seama de inegalitățile (40) și (42), se poate stabili următoarea evaluare apriorică

$$\left| \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{i+j} \Phi(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| + \mu (k - 1) \Delta_{ij}(A,\, \mu), \tag{43}$$

în care

$$\begin{gathered} \Delta_{ij}(A,\, \mu) \equiv \inf_Q \left\{ k_1 \iint_T \frac{\partial^{i+j} N(A,B)}{\partial x^i \partial y^j} c_1(\xi)\ \exp\, [k_2 \mu c_2(\xi)\, (\eta - b)] dB\,; \right. \\ \left. r_1 \iint_T \frac{\partial^{i+j} N(A,\, B)}{\partial x^i \partial y^j}\ \sigma_1(\eta)\ \exp\, [r_2 \mu \sigma_2(\eta)\, (\xi - a)]\, dB \right\}, \\ Q = \{a \leqslant x \leqslant b;\ x \leqslant y \leqslant d;\ 0 < \mu \leqslant \mu_1\}. \end{gathered} \tag{44}$$

Evaluări mai simple, dar în schimb mai puțin precise, se obțin dacă în locul funcțiilor $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\sigma_1(y)$, $\sigma_2(y)$ se introduc pentru toți $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, marginile lor superioare. Astfel, de exemplu, dacă ne folosim de inegalitatea

$$\int_a^x w(t,\, y) dt \leqslant K_1 + \mu K_2 \iint_T w(B)\, dB, \tag{45}$$

$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d),$$

în care $K_1 > 0$ și $K_2 > 0$ sînt constante cunoscute, atunci

$$\int_a^x w(t,\, y) dt \leqslant K_4 \exp\, [\mu K_2 (y - b)], \tag{46}$$

K_4 fiind de asemenea o mărime cunoscută. Folosind inegalitatea (46), se obține următoarea evaluare

$$|u(A)| \leqslant |\Phi(A)| + \mu(k-1)K_4 \iint\limits_T N(A, B) \exp\,[\mu K_2(\eta - b)]dB \qquad (47)$$

$$(A, \mu) \in Q.$$

În mod analog se construiește evaluarea

$$|u(A)| \leqslant |\Phi(A)| + \mu(k-1)P_1 \iint\limits_T N(A, B) \exp\,[\mu P_2(\xi - a)]dB, \qquad (48)$$

$$(P_1 > 0,\ P_2 > 0\ ;\ (A, \lambda) \in Q)$$

și, analog cu construcția evaluărilor pentru $\dfrac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}$ din (43), se obțin și evaluări corespunzătoare acestui caz mai puțin restrictiv.

4. Rezultatele obținute relative la construcția evaluărilor apriorice pot fi generalizate la ecuații integrale și integro-diferențiale relative la domenii „hiperdreptunghiulare", adică corespunzătoare la un număr de dimensiuni mai mare decît 2.

Într-una din notele următoare vom adînci unele laturi ale metodelor de rezolvare a problemelor de contur pentru o nouă clasă de ecuații integro-diferențiale liniare ținînd seama de unele rezultate cu totul recente obținute de L. E. Krivoșein-Ia. V. Bîkov [23] și S. Vasilache [24], precum și de datele obținute într-un vast studiu al autorului în colaborare cu L. E. Krivoșein, înserat în „Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova" [25.]

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ОТНОСЯЩИХСЯ К НЕКОТОРЫМ КЛАССАМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В ряде предыдущих работ [1] — [4], основанных на новом классе граничных задач неэллиптического типа высшего порядка, формулированных и частично решенных автором и встреченных с интересом другими исследователями [5] — [10], автор исследовал сам же или в сотрудничестве с Л. Е. Кривошеиным [11] — [13], обширную серию граничных задач для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными или же с „полными производными" представляющими определённый интерес и для некоторых практических проблем [14] — [15].

В настоящей заметке устанавливается некоторое количество апостериорных и априорных оценок решений граничных задач (1), (2) для интегро-дифференциальных уравнений (3) и (4), где $Du(A) \equiv \equiv \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ — полная в смысле Пиконе производная первого порядка [16], [17].

$$\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j}u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(\xi,\eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j};$$

$$f(A) \equiv f(x, y), \quad K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta),$$

$$\varphi_i(y),\ \psi_i(x),\ r_{ij}(A) \equiv r_{ij}(x, y),\ \mu_0(x, y),\ \mu_i(x, y)$$

— известные непрерывные функции для всех значений переменных $(x, \xi) \in [a, b]$, $(y, \eta) \in [c, d]$; $R = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольник, $u(A) \equiv u(x, y)$ — искомая, функция, λ — параметр и k целое положительное число.

Точкой отправления исследуемой задачи служит предварительное представление решения задачи (2), (3) в виде (5), причем новая искомая функция выражена в виде (6), известная функция $\pi(A)$ удовлетворяет условиям (2), а функция $M(A,B)$ определена (7).

Искомые оценки представлены установленными формулами (11), (27) — (29), (40) и др.

Статья заканчивается указаниями на некоторые обобщения полученных результатов, [19], [23], которые излагаются в ряде других заметок самого автора или же в сотрудничестве с Л. Е. Кривошеиным.

SUR L'ÉVALUATION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES À LA FRONTIÈRE RELATIFS À CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉSUMÉ

Dans une série de travaux antérieurs qui prennent leur point de départ dans l'étude d'une nouvelle classe de problèmes à la frontière de type non-elliptique d'ordre supérieur [1]—[4]; [11]—[13], l'auteur, seul ou bien en collaboration avec le professeur L. E. Krivochéine, a établi toute une suite de résultats relatifs aux problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles aux dérivées partielles ou aux dérivées totales. Tous ces problèmes, bien posés au sens de M. J. Hadamard et déjà partiellement résolus, tout en constituant des schémas mathématiques de nombreux phénomènes physiques ou de la science de l'ingénieur, tels certains phénomènes nucléaires ou bien de transfert des masses, sont poursuivis maintenant avec succès aussi par d'autres chercheurs [5]—[10]; [14], [15].

On établit dans cette note nombre d'évaluations apostérioriques et aprioriques relatives aux solutions des problèmes à la frontière (1) et (2) pour les équations intégro-différentielles aux dérivées partielles (3) et (4), où $Du(A) \equiv \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$ est la dérivée totale dans le sens de M. Picone [16], [17],

$$\frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j},$$

$$f(A) \equiv f(x, y), \quad K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta),$$

$$\varphi_i(y), \quad \psi_i(x), \quad r_{ij}(A) \equiv r_{ij}(x, y), \quad \mu_0(x, y), \quad \mu_i(x, y)$$

sont des fonctions connues continues pour toutes les valeurs des variables $(x, \xi) \in [a, b]$, $(y, \eta) \in [c, d]$; $R = [a, b] \times [c, d]$ est un rectangle, $u(A) \equiv \equiv u(x, y)$ est la fonction inconnue, λ est un paramètre et k est un nombre naturel arbitraire.

Le point de départ du problème posé et résolu consiste dans la recherche de la solution du problème (2), (3) sous la forme (5), où la nouvelle fonction inconnue est donnée sous la forme (6), tandis que la fonction connue $\pi(A)$ satisfait aux conditions (2) et la fonction $M(A, B)$ est définie par (7). L'évaluation cherchée s'exprime par (11), ou bien par (27)—(29), (40) et d'autres encore. L'article s'achève par nombre d'indication concernant quelques autres travaux dans le même ordre d'idées, rédigés soit par l'auteur seul soit en collaboration avec le professeur L. E. Krivochéine.

BIBLIOGRAFIE

1. D. M a n g e r o n, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière*. Intern. Congr. of Mathematicians, Stockholm, 1962, Programme, p. 62.

2. — *New classes of functions related to the equ-tions with „total derivatives"*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, N. S., *4* (**8**), *3 — 4*, 73 — 74 (1958).

3. — *Sur les problèmes de Dirichlet pour les équations aux dérivées totales*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, N. S. , **3** (**7**), *3 — 4*, 49 — 52 (1957).

4. — *Sur une classe de problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. R. Acad. Sci. Paris, **204**, 94 — 96, 544 — 546, 1022 — 1024 (1937).

5. G. S t a m p a c c h i a, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate partiali del tipo iperbolico*. Giornale di Matematiche, **78**, 81 — 96 (1964 — 48).

6. F. M a n a r e s i, *Un problema di autovalori*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXIII, 343 — 351 (1954).

7. E. D e G i o r g i, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alle equazioni a derivate parziali*. Scritti Matematici offerti a Mauro Picone, Bologna, Azzoguidi, 1955, p. 781 — 787.

8. L. P o l i, P. D e l e r u e, *Le calcul symbolique à deux variables*. Gauthier-Villars-Paris, 1954, p. 49 — 50.

9. Ю. М. Б е р е з а н с к и й, *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов*. Доклады А.Н. СССР, **122**, *6*, 959—962 (1958).

10. А. Д. М ы ш к и с, *О задаче Коши*. Успехи матем. наук, 1948.

11. Д. М а н ж е р о н, Л. Е. К р и в о ш е и н, *Некоторые методы решения граничных задач для одного нового класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. 1. Неоднородные задачи Гурса*. Mathematica, Cluj, **5** (**28**), (1963).

12. D. M a n g e r o n, L. E. K r i v o s e i n, *Approximation par les polynomes de Bernstein des solutions de certains problème à la frontière pour les équations intégro-différentielles d'ordre supérieur*. C. R. Acad. Sci. Paris, **254**, 3642—3626 (1962).

13. D. M a n g e r o n, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*. C. R. Acad. Sci. Paris, **255**, 2894—2896 (1962).

14. В. С. В л а д и м и р о в, *Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц*. Изв. А.Н. СССР, Сер. матем., **21**, *5*, 681—710 (1957).

15. G. F. K o h l m a y r, *Die Greensche Funktion zum Integrodifferentialoperator der stationären Neutronentransporttheorie*. Acta Phys. Austriaca, **13**, *2—3*, 300—314 (1960).

16. M. P i c o n e, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Sect. (Math., Phys., Chimie), XXVI, *1*, 183—232 (1940).

17. D. M a n g e r o n, *Problèmes des spectres pour les équations différentielles réductibiles*. Bull. Inst. Polytechn. Jassy, IV, 441—445 (1949).

18. — *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart' ordine con le caracteristiche reali doppie*. Accademia Naz. dei Lincei. Rend. Cl. Sci, fis., mat. e nat., **6**, *18*, 505—510 (1932).

19. — *Sopra un problema al contorno per un'equazione non lineare a derivate parziali con caratteristiche reali multiple*. Rend. Accad. Sci. fis., mat. e nat. Napoli, II, 4, 1 — 11 (1932).

20. M. S a l v a d o r i, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa , V, *2*, 51—72 (1936).

21. T. P o p o v i c i u, *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), X, *2*, 337—389 (1959).

22. V. V o l t e r r a, *Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali*. Opere Matematiche, IV, Accademia Nazz. del Lincei, Roma, 1960, p. 1—4.

23. Л. Е. К р и в о ш е и н, *Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциалных уравнений*. Акад. Наук Кирг. ССР, Фрунзе, 1962.

24. С. В а с и л а к е, *О новых краевых задачах для некоторых интегро-дифференциальных уравнений*. Rev. math. pures et appl., Bucarest, (5), *2*, 251 — 274(1960).

25. D. M a n g e r o n, L. E. K r i v o s e i n, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*, sub tipar în *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*.

Primit la 4. II. 1963.