ASUPRA INEGALITĂŢII LUI DE LA VALLÉE POUSSIN ÎN CAZUL ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA

DE

DUMITRU RIPIANU

(Cluj)

1. În această notă se aduce o completare la nota cu acelaşi titlu [1], cuprinsă în următoarea observaţie:

Dacă se înseamnă

$$f_4(a_2) = F_1(a_1, a_2), \quad f_{12}(a_2) = F_2(a_1, a_2),$$

unde $f_4\ (a_2)$ şi $f_{12}(a_2)$ sînt funcţiile prezentate în enunţul teoremei 1 din [1]*), şi cu (C_1) şi (C_2) arcele de curbă de ecuaţie respectiv $F_1(a_1, a_2) = 0$, $F_2(a_1, a_2) = 0$ dintr-un plan P raportat la axele perpendiculare Oa_1a_2, arce cuprinse respectiv între dreptele de ecuaţie $a_1 = 0$ şi $a_1 = \frac{1}{8}$, respectiv $a_1 = \frac{1}{8}$ şi $a_1 = \frac{2}{\pi^2}$, atunci (C_1) şi (C_2) admit, de exemplu, următoarele reprezentări parametrice de formă foarte simplă.

$$(C_1) \quad \begin{cases} a_1 = F_3(s) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-s}{\ln s} \cdot \dfrac{2(1-s) + (1+s)\ln s}{1 - s^2 + (1+s^2)\ln s} \\[2ex] a_2 = F_4(s) = -\dfrac{(1-s)^2}{4s\ln^2 s} \cdot \dfrac{1 - s^2 + 2s\ln s}{1 - s^2 + (1+s^2)\ln s} \\[2ex] \qquad s \in (0, 1)\,; \quad a_1 \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right) \end{cases} \tag{1}$$

*) Pentru definiţii şi notaţii se pot consulta notele [1] şi [2].

$$
(C_2)\quad \begin{cases} a_1 = F_5(s) = \dfrac{2(1-\cos s) - s\sin s}{2s(\sin s - s\cos s)} \\[2ex] a_2 = F_6(s) = \dfrac{(1-\cos s)(s-\sin s)}{2s^2(\sin s - s\cos s)} \\[2ex] s \in (0,\ \pi)\ ;\ a_1 \in \left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{2}{\pi^2}\right). \end{cases} \tag{1}
$$

Perechile de numere pozitive (a_1, a_2) care aparţin mulţimii $\mathcal{M}$ determină în planul P, un domeniu D, evident cuprins în cadranul I al axelor şi deschis în spre infinit, pentru că dacă perechea $(a_1, a_2) \in \mathcal{M}$, atunci perechea $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ cu $\bar{a}_1 \geqq a_1$, $\bar{a}_2 \geqq a_2$ aparţine mulţimii $\mathcal{M}$. Se va însemna cu (C) frontiera domeniului D.

Teorema 1 din [1] spune că ecuaţia curbei (C) este $a_2 = \alpha(a_1)$ şi că $f_4[\alpha(a_1)] = F_1[a_1, \alpha(a_1)] = f_{12}[\alpha(a_1)] = F_2[a_1, \alpha(a_1)] = 0$. Aşadar, această ecuaţie are respectiv formele $F_1(a_1, a_2) = 0$ pentru $a_1 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F_2(a_1, a_2) = 0$ pentru $a_1 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$ şi $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$ pentru $a_1 \in \left(\frac{2}{\pi^2}, \infty\right)$. Curba (C) trece prin punctele $M_1\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ şi $M_2\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$ (fig. 1).

Se deduce deci de aici şi din (1) că curba (C) admite reprezentările parametrice (1) pentru $a_1 \in \left(0, \frac{2}{\pi^2}\right)$ şi constă din paralela de ecuaţie $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$ la Oa_1 pentru $a_2 \geqq \frac{2}{\pi^2}$. (2)

În nota [2], în care se studiază o problemă analoagă cu cea din [1], s-a obţinut pentru frontiera (C) relativ la problema respectivă ecuaţiile parametrice $a_1 = 2F_3(s)$, $a_2 = 4F_4(s)$, unde $s \in (0, 1)$ cînd $a_1 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ şi $a_1 = 2F_5(s)$, $a_2 = 4F_6(s)$, unde $s \in (0, \pi)$ cînd $a_1 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ (formulele (39) şi (40) din [2]). Se deduce deci din tabelele 20 şi 21 din acea notă, tabelele 1 şi 2 de mai jos şi forma frontierei (C) din fig. 1, unde domeniul D este marcat prin puncte.

Tabelul 1

s	0		1
$\frac{da_1}{ds} = F_3'(s)$		+	
$a_1(s) = F_3(s)$	0	↗	$\frac{1}{8}$
$\frac{da_2}{ds} = F_4'(s)$		−	
$a_2(s) = F_4(s)$	∞	↘	$\frac{1}{8}$
$\frac{da_2}{da_1}$			−1
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

Tabelul 2

s	0		1
$\frac{da_1}{ds} = F_5'(s)$		+	
$a_1(s) = F_5(s)$	$\frac{1}{8}$	↗	$\frac{2}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{ds} = F_6'(s)$		−	
$a_2(s) = F_6(s)$	$\frac{1}{8}$	↘	$\frac{1}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{da_1}$	−1		0
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

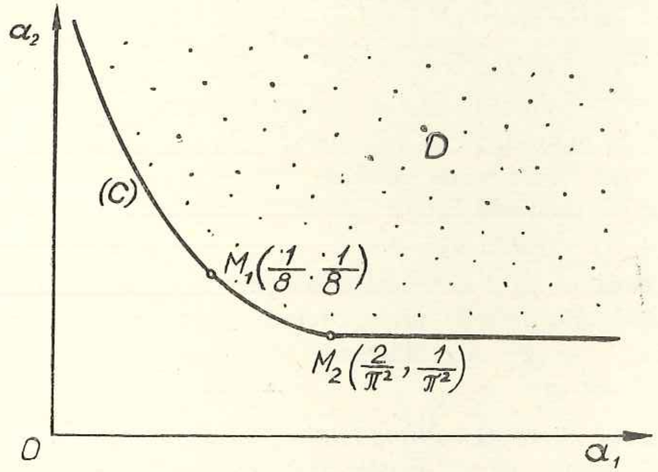

Fig. 1

Totodată, cu tabelele 1 şi 2 şi cu (2) s-a demonstrat

TEOREMA 1. *Perechea minimă relativ în raport cu* a_2 (pentru problema din [1] *este perechea* $(F_3(s), F_4(s))$ *din* (1) *unde s parcurge intervalul* $(0, 1)$ *cînd* a_1 *parcurge intervalul* $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, *perechea* $(F_5(s), F_6(s))$ *din* (1) *unde s parcurge intervalul* $(0, \pi)$ *cînd* a_1 *parcurge intervalul* $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$ *şi perechea* $\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right)$ *cînd* a_1 *parcurge intervalul* $\left(\frac{2}{\pi^2}, \infty\right)$. *Cînd* $a_1 = \frac{1}{8}$, *perechea este* $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

2. Cu ajutorul acestei teoreme se pot da teoremelor din [1] demonstraţii diferite de cele prezentate în acea notă. Astfel, de exemplu, teorema 2 din [1] se demonstrează imediat în felul următor:

Se va însemna $F_7(s) = a_1 + a_2 = F_3(s) + F_4(s)$ cînd $s \in (0, 1)$, $a_1 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, şi $F_8(s) = a_1 + a_2 = F_5(s) + F_6(s)$ cînd $a_1 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$, $s \in (0, \pi)$.

În acest caz, formulele (39)—(42) din [2] dau

$$F_7'(s) = \frac{1 - s^2 + 2s\ln s}{4s \ln s} f_{27}'(s) < 0, \quad F_8'(s) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin s}{s}\right) f_{29}'(s) > 0,$$

aşa că

$$\inf_{s \in (0, 1)} F_7(s) = F_7(1) = F_3(1) + F_4(1),$$
$$\inf_{s \in (0, 1)} F_8(s) = F_8(0) = F_5(0) + F_6(0),$$

deci perechea minimă în raport cu funcţia $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ este perechea $(F_3(1), \ F_4(1)) = (F_5(0), \ F_6(0)) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ (tabelele 1 şi 2), ceea ce demonstrează punctul 1° al teoremei 2 din [1].

Demonstraţia punctului 2° al aceleiaşi teoreme este dată de simpla observaţie că în punctul II al teoremei 5 din [2] s-a demonstrat că produsul $F_3(s) \cdot F_4(s)$ ia valoarea minimă, cînd s parcurge intervalul $[0, 1]$, pentru $s = 1$, iar produsul $F_5(s) \cdot F_6(s)$ ia valoarea minimă, cînd s parcurge intervalul $[0, \pi]$, pentru $s = 0$.

De asemenea, pe fig. 1 se constată că o pereche minimă relativ în raport cu a_2 este totodată o pereche minimă relativ în raport cu a_1, în sensul definiţiei date în [1] şi [2]. Această observaţie demonstrează atît ultima teoremă din [1], cît şi

TEOREMA 2. *Perechea minimă relativ în raport cu* a_1 (pentru problema din [1]) *este perechea* $(F_5(s), F_6(s))$, *unde* s *parcurge intervalul* $(\pi, 0)$ *cînd* a_2 *parcurge intervalul* $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{8}\right)$ *şi perechea* $(F_3(s), F_4(s))$, *unde* s *parcurge intervalul* $(1, 0)$, *cînd* a_2 *parcurge intervalul* $\left(\frac{1}{8}, \infty\right)$. *Cînd* $a_2 = \frac{1}{8}$, *perechea este* $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, *iar cînd* $a_2 = \frac{2}{\pi^2}$, *perechea este* $\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$.

Se va observa în încheiere că cu ajutorul formulelor (1) se pot determina (vezi [2]) perechile minime relativ în raport cu diferite funcţii $f(a_1, a_2)$, crescătoare în raport cu una din variabile.

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЕ ЛЯ ВАЛЕ ПУСЭН В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке устанавливается граница области, определяемой множеством $\mathcal{M}$, определённым в [1], т.е. кривая, описываемая ,,минимальными", элементами этого множества и даётся и явное выражение этих ,,минимальных", элементов в смысле принятых в этой заметке определений.

SUR L'INÉGALITÉ DE DE LA VALLÉE POUSSIN DANS LE CAS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

RÉSUMÉ

Dans cette note, on détermine la frontière du domaine déterminé par l'ensemble $\mathcal{M}$ défini dans [1], c'est-à-dire la courbe déterminée par les éléments ,,minimaux" de cet ensemble, et l'on donne aussi l'expression explicite de ces éléments ,,minimaux" dans le sens des définitionsadoptées dans cette note.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ripianu, *Asupra inegalităţii lui Ch. de la Valée Poussin în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIV, 1, (1963).
2. — *O problemă de minimum în teoria interpolaţiei* (în acest volum).

Primit la 16 V. 1963.