

## ASUPRA INTERFERENȚEI ȘI PROFILULUI DE RACORD LA MELCII PRELUCRAȚI CU FREZE CONICE\*

DR

E. GERGELY, D. MAROS și E. MUNTEANU

(Cluj)

*Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj*

Interferența nu este un fenomen caracteristic numai roților dințate. Ea apare și la prelucrarea melcilor, cînd adîncimea de pătrundere a sculei depășește o anumită limită.

Pentru a o putea seiza și calcula la prelucrarea cu freza conică, se va analiza mai întîi cazul simplu, cînd generarea are loc cu cremalierea imaginară (fig. 1).

Flancul I al acestei cremaliere se presupune materializat prin rabotare de muchia așchieitoare  $mm$  a unui cuțit sau prin frezare sau rectificare de față așchieitoare a unei freze, respectiv pietre abrazive. În acest caz, melcul obținut este evolventic, adică se poate asimila cu o roată dințată evolventică cu dantura pronunțat înclinață.

Limita interferenței coincide cu acel punct  $M$  de pe dreapta caracteristică  $K$ , care este situat la cea mai mică distanță de axa  $oy$  a melcului. În acest punct caracteristica este tangentă la cilindrul de bază.

Pentru evitarea interferenței, traectoria la rabotare a ultimului punct către axa  $oy$  a muchiei  $mm$  trebuie să intersecteze caracteristica deasupra punctului  $M$  (de exemplu traectoria  $\Delta_{III}$ ). Cînd aceasta trece chiar prin  $M$  se realizează cazul limită (traectoria  $\Delta_H$ ) iar cînd trece sub  $M$  are loc interferența (traectoria  $\Delta_I$ ).

Se știe că o roată dințată cu dantură înclinată se studiază în secțiunea normală pe axă, adică în cazul dat, în secțiunea cu planul  $Q$ . Angrenajul plan corespunzător acestei secțiuni este reprezentat în fig. 2.

Considerind cremalierea fixă, în mișcarea elicoidală indicată a piesei legate de planul  $Q$ , generatoarea rectilinie  $g$  se deplasează în spire dreapta, iar punctul generator  $O$ , adică intersecția caracteristicei  $K$  cu planul  $Q$

\*) Această lucrare se publică și în limba germană în revista „Mathematica”, 3 (26) (1961).

descrie în planul  $Q$  evolventa în sensul indicat. Pînă în  $M_Q$  unde punctul generator ajunge în punctul de înapoiere al evolventei (reprezentată punctat în figura 2) înfășurarea efectivă poate avea loc numai dacă muchia așchieatoare mătură față interioară a flancului cremalierei, adică cuțitul este așezat în interiorul cremalierei, în zona hașurată simplu. Mai departe, reprezentat din nou punctat în figură, punctul generator trece pe a doua

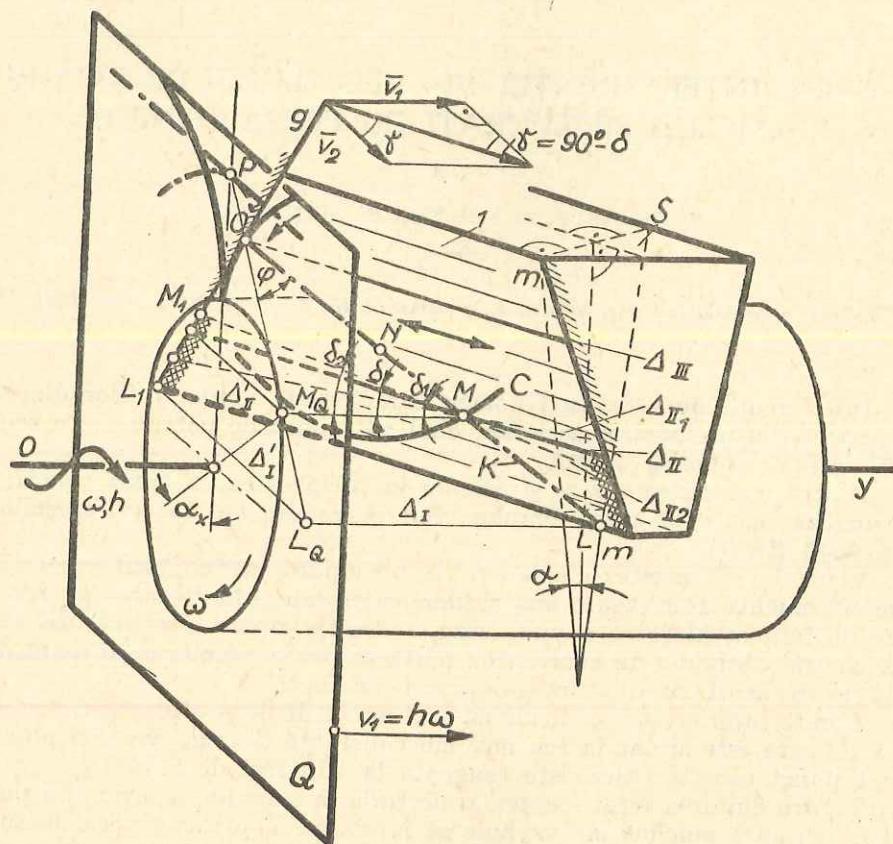


Fig. 1

ramură a evolventei (reprezentată de asemenea punctat în figura 2) a cărei înfășurare efectivă ar avea loc numai în cazul cînd muchia așchieitoare ar mătura fața exterioară a flancului cremalierei, adică cuțitul ar fi așezat în exteriorul cremalierei — în zona hașurată dublu. Muchia așchieitoare mătûrind însă o singură față a cremalierei, mai precis fața interioară a ei, a doua ramură a evolventei nu poate fi efectiv generată. În schimb prima ramură devine intersectată de porțiunea muchiei situată sub punctul  $M_1$ , provocîndu-se astfel o subtăiere.

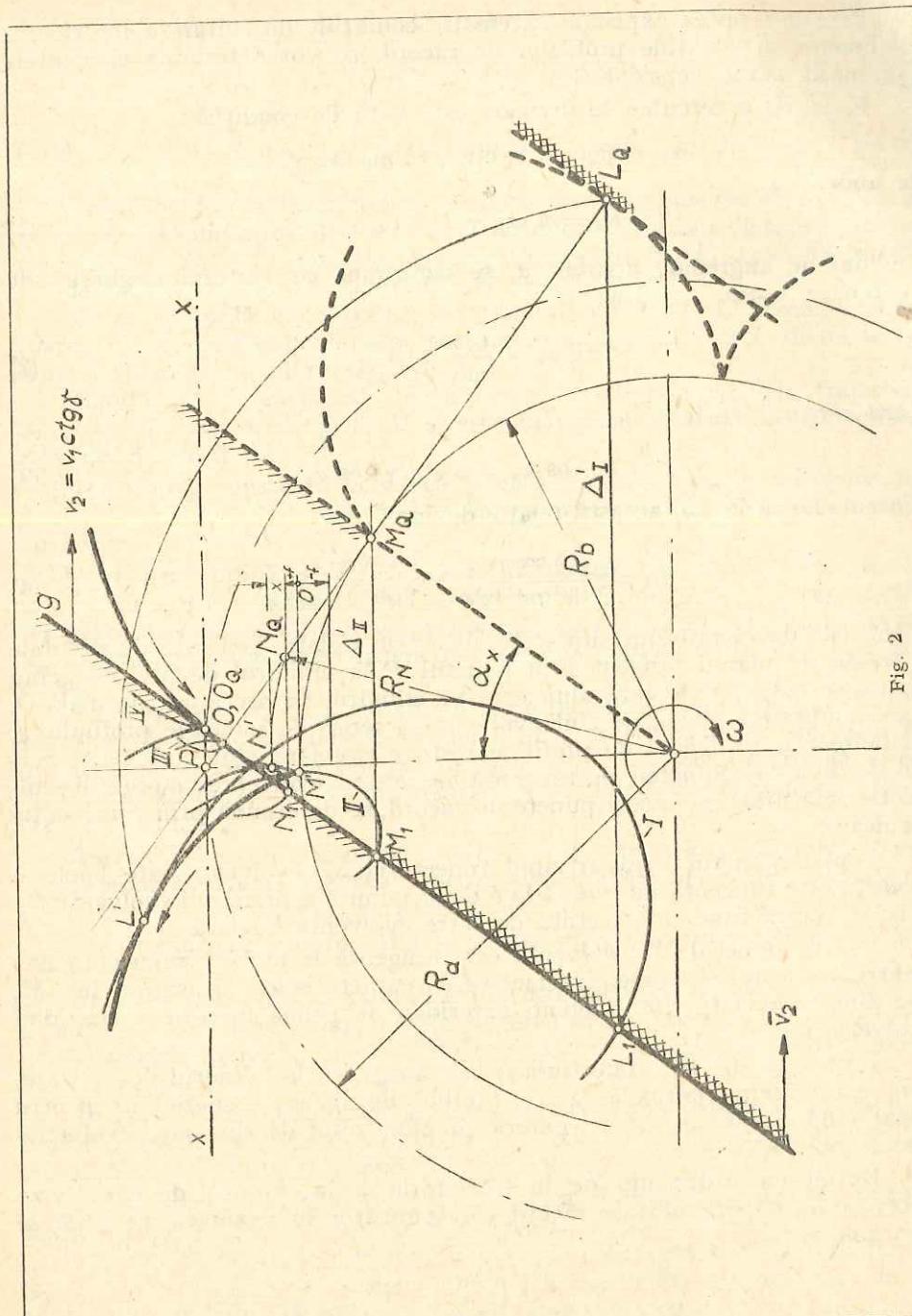


Fig. 2

Pentru a putea exprima matematic condițiile de evitare a interferenței precum și ecuațiile profilelor de racord, se vor determina elementele angrenării plane considerate.

Raza  $R_d$  a cercului de divizare este dată de condiția

$$v_2 = R_d \omega = v_1 \operatorname{ctg} \gamma = h \omega \operatorname{ctg} \gamma,$$

de unde

$$R_d = h \operatorname{ctg} \gamma = h \operatorname{tg} \delta. \quad (1)$$

Unghiul de angrenare aparent  $\alpha_x$  se determină cu ajutorul unghiului de angrenare normal  $\alpha$  din:

$$\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \delta}. \quad (2)$$

Raza cercului de bază

$$R_b = R_d \cos \alpha_x = h \operatorname{ctg} \gamma \cos \alpha_x. \quad (3)$$

Tinând seama de (2), această relație devine

$$R_b = \frac{h \cos \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{h \sin \delta}{\sqrt{\cos^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (4)$$

Flancurile de racord sunt suprafețe elicoidale riglate, generate de dreptele  $\Delta$  legate de planul tangent prin punctul  $P$  la cilindrul de divizare, cind planul se rostogolește fără alunecare pe cilindru. În secțiunea normală  $Q$ , aceste suprafețe elicoidale sunt evolvente descrise de punctele profilului  $g$ , cind dreapta  $xx$  legată de profil se rostogolește fără alunecare peste cercul de divizare. Punctele de tangență ale acestor evolvente cu profilul evolventic înfășurat, așa zisele puncte de racord, se determină prin construcția Reuleaux.

Pentru punctul  $L_1$  aparținând traectoriei  $\Delta_I$ , evolventa este buclată. Aceasta este tangentă interioară la a doua ramură a profilului evolventic — prima ramură fiind intersectată de către evolventa buclată.

Pentru punctul  $M_1$  evolventa este tangentă la ambele ramuri în  $M'$ . Pentru traectoriile care intersectează caracteristica deasupra lui  $M$ , evolventele buclate sunt tangente-exteroare la prima ramură a profilului evolventic.

Pentru cazul cind traectoria  $\Delta$  este tangentă la cilindrul de divizare, evolventa devine normală, adică profilul de racord dispără, iar pentru cazul cind  $\Delta$  este situat în exteriorul cilindrului de divizare, evolventa devine scurtată.

Notind cu  $f$  distanța de la traectoria  $\Delta$  la cilindrul de bază, raza vectorială  $R_N$  a punctului de racord corespunzător în secțiunea normală se exprimă astfel:

$$R_N = \sqrt{(R_b \mp f)^2 + \left( \frac{R_b}{\cos \alpha_x} - R_b \pm f \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_x}. \quad (5)$$

Adâncimea radială a profilului de racord va fi:

$$x = \sqrt{(R_b \mp f)^2 + \left( \frac{R_b}{\cos \alpha_x} - R_b \pm f \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_x} - (R_b \pm f). \quad (6)$$

Cind  $f = (R_b - R_b \cos \alpha_x)$ , adică tocmai la limita interferenței, din relația (6) se deduce că  $x = f$ .

Pentru evitarea interferenței, traectoria  $\Delta$  trebuie să fie situată fie în exteriorul cilindrului de bază, fie în interiorul său, la o distanță cel mult egală cu  $f = R_b - R_b \cos \alpha_x$  de acesta. Cunosind  $R_d$ ,  $R_b$ , ecuațiile profilelor de racord și  $f$  se pot determina cu ușurință [4].

Ce se întâmplă dacă traectoria punctului extrem al muchiei aşchieatoare nu este perpendiculară pe secțiunea normală  $S$  a cremalierei imaginare date ca în cazul precedent?

Limita interferenței este și în acest caz determinată de traectoria  $\Delta_{II_1}$  sau  $\Delta_{II_2}$ , care trece prin  $M$  și este mai puțin sau mai mult înclinată față de  $K$ , decît  $\Delta_{II}$ .

Deosebirea constă în aceea că pentru  $\Delta_{II_1}$  se obține o adâncime mai mare, iar pentru  $\Delta_{II_2}$  una mai mică pentru profilul de racord corespunzător.

Aceste noi profile se generează cu alte cercuri de divizare de raze  $R_{d_1}$  sau  $R_{d_2}$  în secțiune normală. Ele se determină tinând seama că traectoriile  $\Delta_{II_1}$  și  $\Delta_{II_2}$  pot fi considerate și ca normale pe o altă secțiune  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , a aceleiași cremaliere, căreia îi corespund unghiuri de vîrf mai mici decît  $\alpha$ .

În aceste cazuri, în loc de unghiul de înclinare  $\delta$  apar unghiurile  $\delta_1 > \delta$  sau  $\delta_2 < \delta$ . Știind că nici  $R$  și nici  $h$  nu se schimbă în aceste variante, din relația (4), cunoscindu-se  $\alpha = \alpha_1$  sau  $\alpha = \alpha_2$ , se pot determina  $\delta_1$  sau  $\delta_2$ . Cunoscind pe  $\delta_1$  sau  $\delta_2$ , din relația (2) se calculează  $\alpha_{x_1}$  sau  $\alpha_{x_2}$ , și din (1),  $R_{d_1}$  sau  $R_{d_2}$ .

În figura 3 s-au determinat aceste valori și pe cale pur grafică și s-au trasat noile evolvente buclate descrise de punctele  $M'_1$  și  $M''_1$ . Se observă că adâncimile de racord verifică inegalitățile  $x_1 > x > x_2$ .

Cele de mai sus rămân valabile pentru orice alt punct ales pe caracteristica  $K$ .

În orice punct de pe profilul evolventic înfășurat se poate atașa, prin urmare, prin alegerea convenabilă a cercului de divizare și a unghiului de angrenare aparent, un profil de racord, care să determine o adâncime de racord prescrisă în prealabil.

În cazul cind prelucrarea se face cu o sculă abrazivă în formă de disc, limita interferenței este determinată de poziția sculei, cind marginea circulară  $C$  a sculei trece tocmai prin  $M$  (fig. 1).

Dacă cercul intersectează caracteristica  $K$  deasupra lui  $M$ , interferența este evitată; în caz contrar aceasta apare.

În funcție de poziția centrului cercurilor de rază dată care intersectează caracteristica în același punct, se pot obține diferite adâncimi de racord. Cu cît distanța de la cercul  $C$  la axa  $oy$  este mai mică, cu atât adânci-

mea de racord măsurată de la punctul de racord va fi mai mare. Profilul de racord nu va mai fi o evolventă buclată, ci o curbă determinată ca loc geometric al punctelor de intersecție ale cercului  $C$  cu planul  $Q$ , cînd acesta împreună cu semifabricatul execută mișcarea elicoidală de parametru  $h$ .

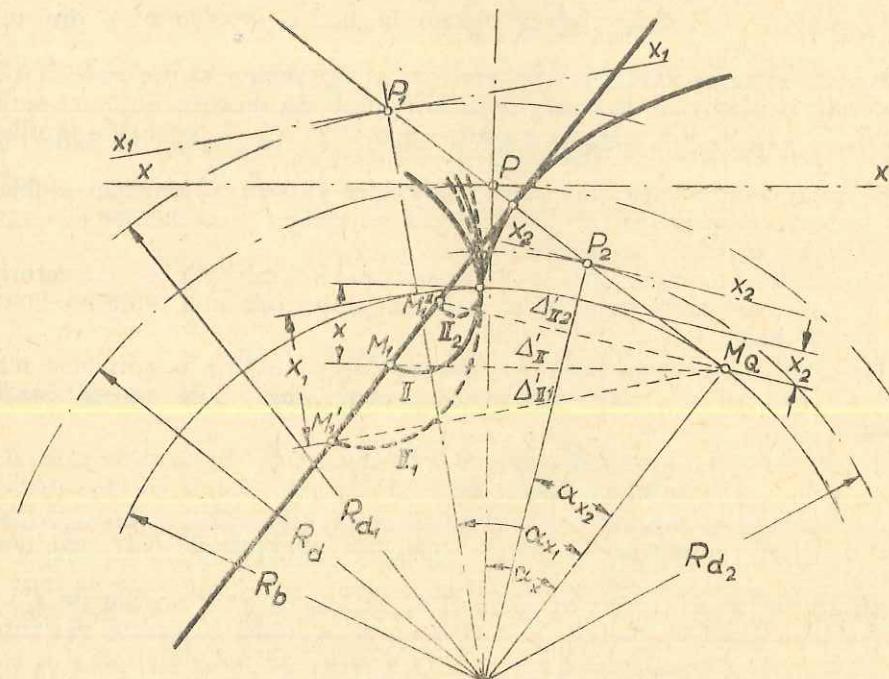


Fig. 3

La prelucrarea cu freza conică (fig. 4), fenomenele sînt asemănătoare. Caracteristica  $K$  nu mai este însă o dreaptă, ci o curbă situată pe suprafața conică imaginări, materializată de muchiile așchiectoare ale sculei. Caracteristica se apropie din spire vîrful  $S$  al conului de axa  $oy$  a semifabricatului, ajunge în  $M$  la o distanță minimă de aceasta, se depărtează apoi din nou de ea. Se poate arăta [1] că punctul  $M$  descrie tocmai muchia elicoidală de înăpere a suprafeței înfășurate de con.

Cilindrul tangent în  $M$  la caracteristica  $K$  se poate denumi prin analogie cu cazul precedent, cilindru de bază. Limita interferenței se determină în mod asemănător tot prin punctul  $M$ .

Pentru evitarea interferenței și în acest caz, traiectoria ultimului punct al muchiei așchiectoare — de data aceasta circulară și perpendiculară pe axa conului — trebuie să intersecteze curba caracteristică de asupra lui  $M$ , adică în zona cuprinsă între vîrful  $S$  al conului imaginar și punctul  $M$  (de exemplu traiectoria  $\Delta_{III}$ ). Cînd traiectoria trece prin  $M$ , se obține cazul limită (traiectoria  $\Delta_{II}$ ), iar cînd intersecția are loc după punctul  $M$  apare interferență (traiectoria  $\Delta_I$ ).

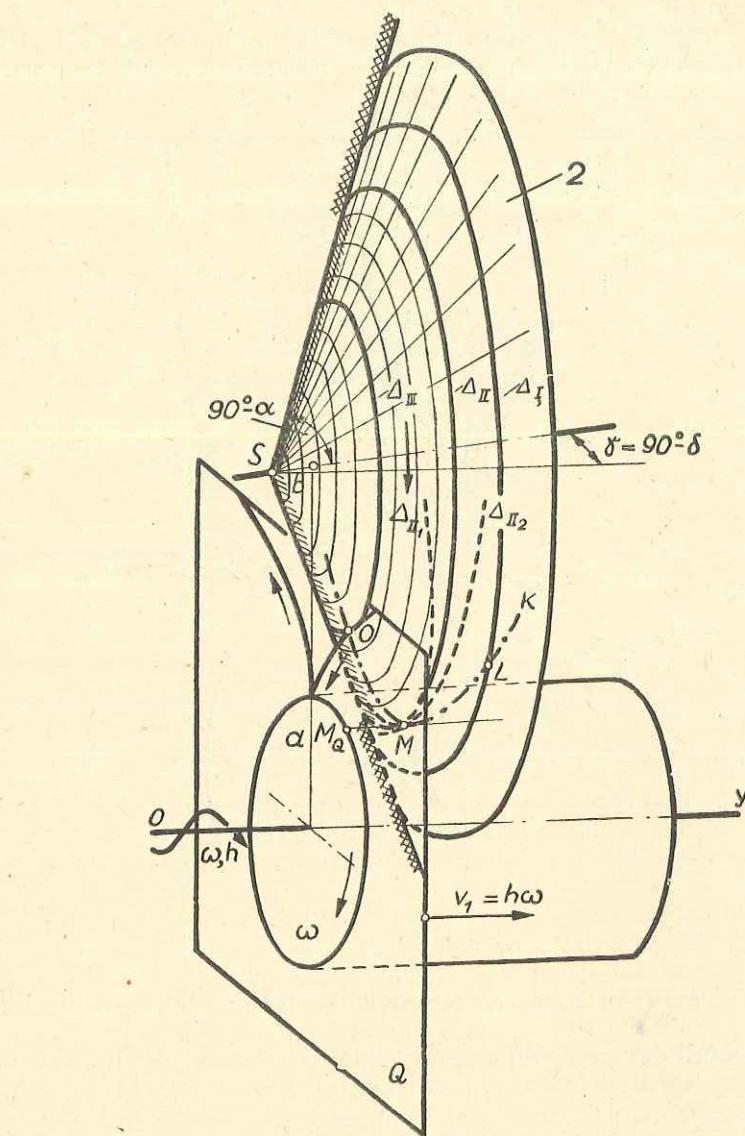


Fig. 4

Și în acest caz profilul din secțiunea normală se poate considera ca fiind însășurat de intersecția eliptică ori parabolică cu planul  $Q$  a conului fix imaginari, cînd planul execută, legat fiind de semifabricat, o mișcare elicoidală de parametru  $h$  (fig. 5).

Dacă se consideră fixate de dreapta  $d$  direcția axei orizontale  $AA'$  a elipsei sau parabolei în poziția paralelă cu  $d$ , precum și vîrful  $A$  al acestor

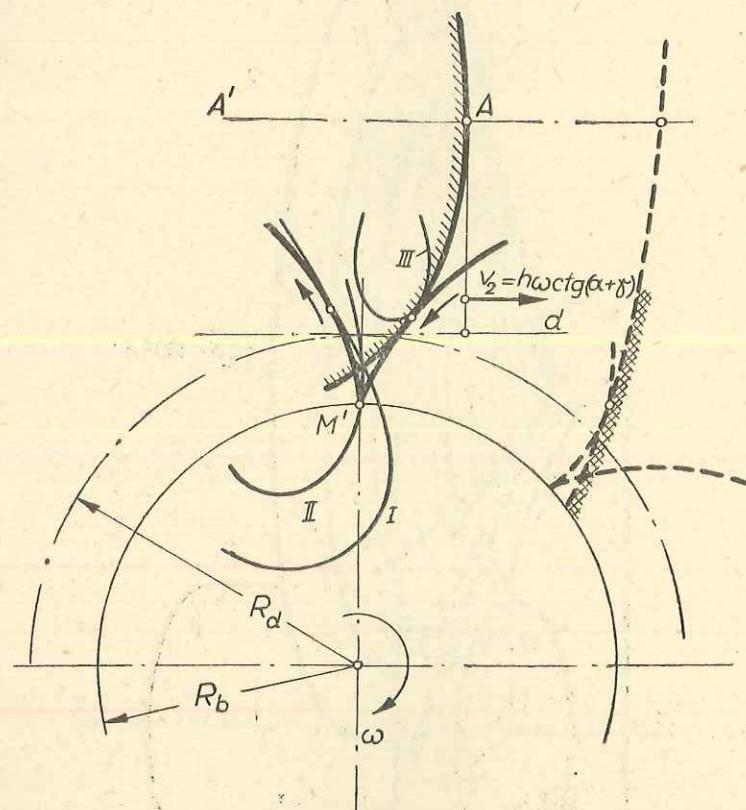


Fig. 5

conice, se pot defini și în acest caz cele două centroide ale mișcării relative generatoare.

Raza cercului de rostogolire corespunzător cercului de divizare din cazul precedent, va fi determinată de relația

$$v_2 = h\omega \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) = R_d \omega,$$

de unde

$$R_d = h \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma). \quad (7)$$

Profilele din secțiunea normală se vor putea considera deci ca fiind generate prin rostogolire de o elipsă sau parabolă deformabilă după o

lege dată. Mișcarea relativă, în raport cu planul  $Q$ , a semidreptei  $AA'$  este definită printr-o centroidă rectilinie  $d$  și una circulară de rază  $R_d$ .

La mișcarea elicoidală indicată, conica generatoare se deplasează spre dreapta, iar punctul generator  $O$ , adică intersecția caracteristicii cu planul  $Q$ , înscrie în planul  $Q$  profilul în sensul indicat.

Și în acest caz se pot trage aceleași concluzii ca și în cazul precedent.

Pînă în punctul  $M$  însășurarea efectivă poate avea loc numai dacă muchiile aşchieitoare mătură față interioară a conului imaginari, adică freza conică este în interiorul acestuia (în zona hașurată simplu în figurile 4 și 5). Mai departe, urmînd generarea celei de a doua ramuri a profilului (punctat în figura 5), însășurarea sa efectivă nu se poate face de către față interioară a conului, adică numai în cazul cînd freza conică ar fi situată în exteriorul conului imaginari (în zona hașurată dublu).

Dacă freza conică este situată și în această porțiune în interiorul conului imaginari, ca în majoritatea cazurilor practice, ramura a două nu se însășoară efectiv, în schimb se intersectează prima, producîndu-se subțierea acesteia.

Profilul de racord se va determina ca trajectoria relativă în planul  $Q$  a intersecției cercurilor  $\Delta_I$ ,  $\Delta_{II}$  sau  $\Delta_{III}$  cu planul  $Q$ , cînd acesta execută mișcarea elicoidală generatoare.

Trebuie remarcat că cercul  $\Delta_{III}$  determină un profil de racord tangent exterior la prima ramură a profilului însășurat de con, cercul  $\Delta_{II}$  un profil de racord tangent comun la ambele ramuri însășurate, iar cercul  $\Delta_I$  un profil de racord tangent interior la a doua ramură, întocmai ca la melci evolventici.

Și în acest caz există un cerc, care dă un racord punctiform.

Dacă pe conul imaginari se aleg mai multe cuive  $\Delta_{II}$ ,  $\Delta_{III}$ , care trec prin  $M$  sau printr-un alt punct al cuivei characteristic, se vor obține racorduri de diferite adîncimi ca și în cazul melciilor evolventici. În ipoteza că aceste curbe sunt închise și reprezintă muchiile limitrofe ale unei freze conice, natura și adîncimea profilului de racord vor fi determinate de cercul însășurat de acestea la rotația frezei în jurul axei sale. Dacă acest cerc, perpendicular pe axă, intersectează caracteristica sub punctul  $M$ , apare interferență, chiar dacă curba aleasă a intersectat caracteristica în zona lipsită de interferență.

Pentru studiul cantitativ al celor de mai sus, se va urma calea fixată în lucrarea [2], adică reprezentarea în secțiunea axială. Desigur că toate concluziile de natură calitativă privind limitarea interferenței și modul de tangență dintre profilul însășurat și profilele de racord din secțiunea normală, rămîn valabile și în secțiunea axială. Singura deosebire constă în aceea că ramura dreaptă din secțiunea normală devine stîngă în cea axială și invers.

La determinarea punctului de înapoiere din secțiunea axială metoda clasică s-a dovedit necorespunzătoare, conducînd la ecuații foarte complicate, a căror rezolvare prezintă dificultăți de calcul. Din acest motiv s-a urmat calea reprezentării profilului axial prin puncte, expusă în lucrarea [2]. Coordonatele calculate numeric sunt cuprinse în coloanele 1 și 4 din tabela 1 în cazul unui exemplu concret din acea lucrare.

Tabela 1\*\*)

$u_{mm}$	<i>Pasul 0</i>	<i>Pasul 1</i>	<i>Pasul 2</i>	<i>Pasul 3</i>
	$Z_{mm} =$			
29	27,293783			
29,5		27,148720	27,148720	27,148720
29,625				27,130805
29,75			27,120011	27,120011
29,875				27,116489
30	27,120328	27,120328	27,120328	27,120328
30,25				
30,5		27,207413		
31	27,406678			
$\Delta z_{mm}$	0,0286350	0,087085	0,028709	0,003839

valoarea funcției, care corespunde jumătății sale, satisface inegalitățile (8). În jumătățind din nou acest interval se va obține un nou interval mai mic, care iarăși satisface inegalitățile (8). Se va considera că o valoare  $z$ , care corespunde mijlocului unui interval, aproximează cu exces în limita toleranței  $\eta$  minimul funcției  $z = z(u)$ , dacă este satisfăcută condiția

$$\Delta z \leq \eta, \quad (9)$$

unde

$$\Delta z = \max \{z'_k - z_k; z''_k - z_k\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

iar  $\eta$  este toleranța prescrisă.

\* Acest algoritm a fost propus de F. Rado.

\*\* La întocmirea acestei tabele au contribuit L. Negrescu, A. Németh, T. Rus.

Problema se reduce în ultima analiză la determinarea minimului pentru funcția  $z = z(u)$ . Știind că acest minim există, iată care este algoritmul de calcul propus.\*) La întocmirea tabelei 1 se va putea determina întotdeauna un interval  $I_k = [u'_k, u''_k]$ , astfel ca valoarea funcției pe jumătatea intervalului să fie mai mică decât valorile oricărei extremități; în exemplul dat,  $u'_k = 29$  și  $u''_k = 31$ .

Dacă se notează cu  $u''_k$  jumătatea intervalului și cu  $z'_k = z(u'_k)$ ,  $z''_k = z(u''_k)$ ,  $z'''_k = z(u'''_k)$  valorile corespunzătoare ale funcției, atunci vor fi satisfăcute inegalitățile

$$\begin{aligned} z''_k &< z'_k \\ z''_k &< z'''_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Se notează cu  $I_k^s$  și  $I_k^d$  noile intervale  $[u'_k, u''_k]$ , respectiv  $[u''_k, u'''_k]$ . În jumătățind și aceste intervale, se va obține în continuare unul din cele trei cazuri arătate în figura 6.

Unul din noile intervale considerate  $I_k^s$  sau  $I_k^d$ , sau intervalul ale cărui extremități sunt cele două puncte obținute prin înjumătățire, este un interval pentru care

valoarea funcției, care corespunde jumătății sale, satisface inegalitățile (8). În jumătățind din nou acest interval se va obține un nou interval mai mic, care iarăși satisface inegalitățile (8). Se va considera că o valoare  $z$ , care corespunde mijlocului unui interval, aproximează cu exces în limita toleranței  $\eta$  minimul funcției  $z = z(u)$ , dacă este satisfăcută condiția

$$\Delta z \leq \eta, \quad (9)$$

Indicele  $k$  reprezintă ordinul aproximăției și în același timp ne arată al cărora pas de înjumătățire al intervalor de mai sus se execută. Astfel, pentru exemplul calculat, cu rezultatele centralizate în tabela 1, la al

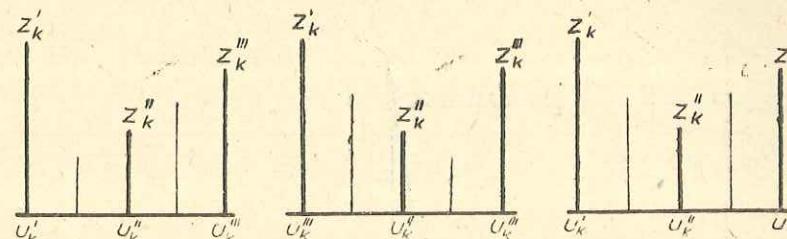


Fig. 6

treilea pas de înjumătățire se obține pentru  $u = 29,875$ ,  $z = 27,116489$ , care aproximează cu exces minimul funcției  $z(u)$  în interiorul toleranței  $\eta = 0,004$  dată în prealabil.

În figura 7 se reprezintă la scara 10.000 : 1 o porțiune a profilelor din jurul punctului lor de înapoiere. Coordonatele punctelor corespunzătoare diverselor valori ale parametrului  $u$  sunt date în tabela 1.

Suprafața elicoidală de racord de la rădăcina flancului înfășurat de cerc este generată, după cum s-a arătat mai sus, de muchia circulară a bazei conului situată la cota  $u$  de vîrful său.

Pentru a determina ecuația profilului de racord, adică ecuația acestei suprafețe în secțiunea axială, se va porni de la coordonatele punctului curent de pe muchia bazei (fig. 8). Față de sistemul mobil de axe  $X Y Z$ , acestea sunt (a se vedea lucrarea [2] formula (42)):

$$\begin{aligned} X &= b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma), \\ Y &= -b \cos \gamma + (u \cos \gamma - u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \sin \gamma), \\ Z &= a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v. \end{aligned} \quad (11)$$

Aplinind formulele de transformare

$$\begin{aligned} x &= Z \cos \varphi - X \sin \varphi, \\ y &= Z \sin \varphi + X \cos \varphi, \\ z &= Y + h \varphi, \end{aligned}$$

se obțin mai jos ecuațiile muchiei circulare față de sistemul fix de axe de coordonate  $x y z$ .

$$\begin{aligned} x &= (a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v) \sin \varphi + [b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma)] \cos \varphi, \\ y &= [-b \cos \gamma + (u \cos \gamma - u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \sin \gamma)] + h \varphi, \\ z &= (a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v) \cos \varphi - [b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma)] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

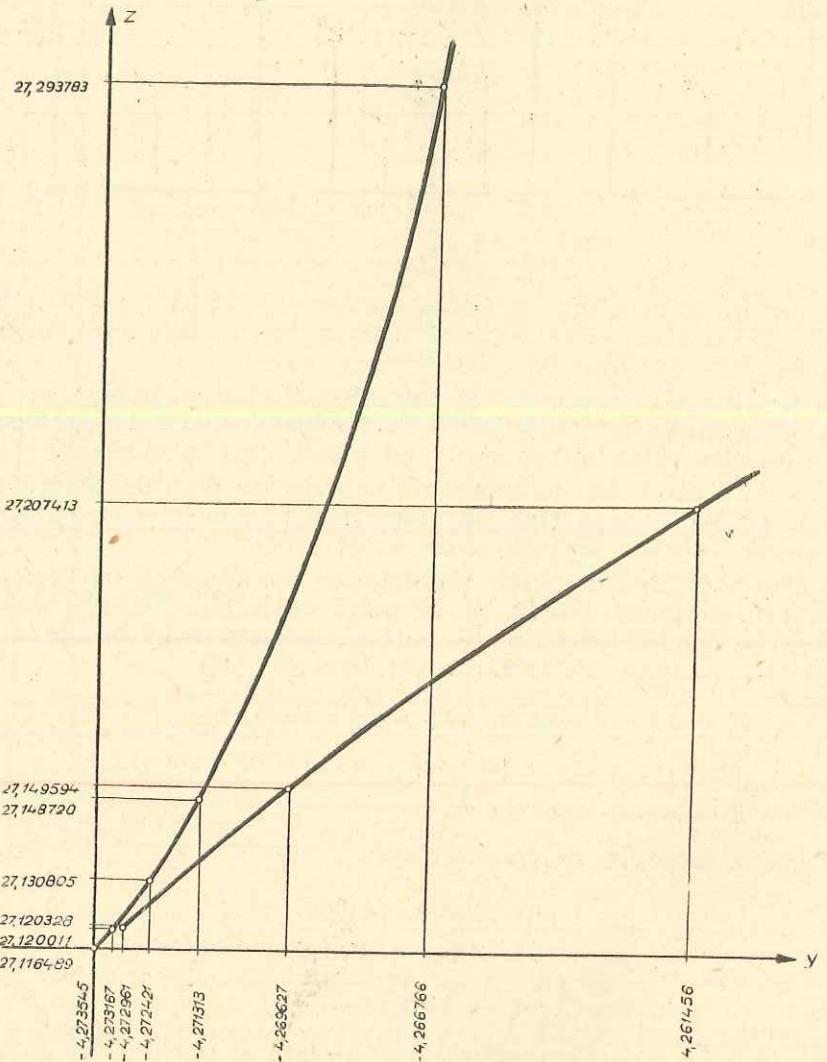


Fig. 7

Pentru  $x = 0$  se determină punctele de intersecție  $A$  și  $B$  ale acestei muchii cu planul axial, adică puncte ale profilului de racord.

Egalind astfel prima din ecuațiile sistemului (13) cu zero, se obține

$$\tan \varphi = \frac{u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma - (b - u) \sin \gamma}{a - u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos v}$$

Cu ajutorul acestei formule, considerînd pe  $v$  ca parametru variabil, pentru fiecare valoare dată acestuia se poate calcula valoarea corespunzătoare a lui  $\varphi$ .

Inlocuind aceste valori în ecuațiile (13), se pot determina prin puncte coordonatele profilului de racord în secțiunea axială.

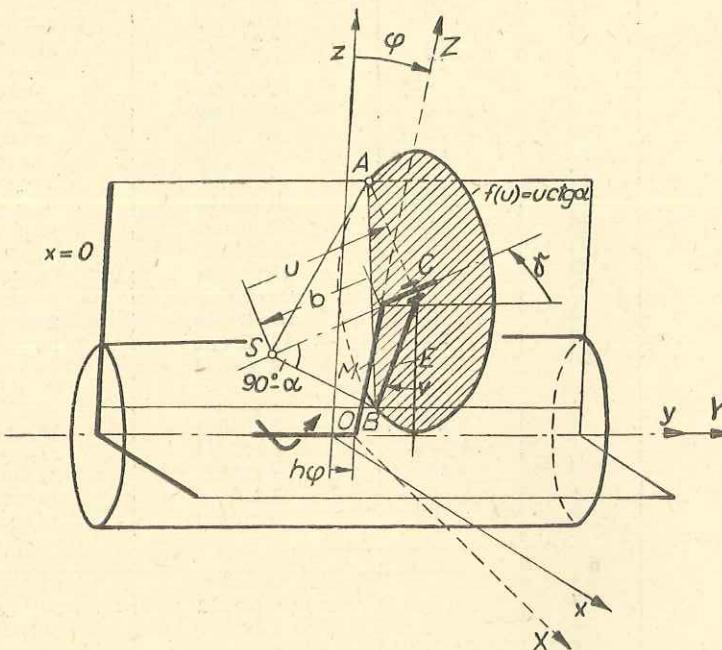


Fig. 8

Să pornește de la acel  $v$ , care se calculează cu ajutorul formulelor (40), (41) stabilite în lucrarea [2] și care corespunde punctului de tangență al profilului de racord cu profilul înfășurat de con. De la această valoare în stînga și dreapta se aleg valori discrete corespunzătoare, procedînd apoi după indicațiile de mai sus.

În tabela 2 și figura 9 s-au indicat valorile astfel calculate în funcție de  $v$  pentru  $u = 21,848276$ ,  $u = 25$ ,  $u = 29,875 = u^*$  și pentru  $u = 36$ .

Valorile lui  $v$  corespunzătoare punctelor de tangență sunt subliniate în tabelă.

Profilul de racord este întotdeauna tangent la profilul înfășurat de con. Pentru  $u < u^*$ , adică în punctele de pe profilul efectiv înfășurat de con, tangența este exterioară (profilul III).

Tabela 2\*)

Profilul I	Nr. punctului	$v^\circ$	$v_{mm}$	$z_{mm}$
$u = 36_{mm}$	1	-28°	2,116347	40,379758
	2	-23	0,405337	37,280781
	3	-24°1'52"	-1,251405	34,305130
	4	-20	-4,803345	27,941400
	5	-18	-6,545732	24,864012
	6	-16	-8,275704	21,757202
	7	-12	-11,620494	15,546528
	8	-8	-14,447340	9,348780
	9	-4	-15,782533	3,233505
	10	-3	-8,596156	1,890290
	11	-2°30'	-1,942308	1,359859
	12	-2	9,733758	1,240468
	13	-1°30'	20,775180	1,354060
	14	-0°30'	29,689093	2,655803
	15	0	31,212760	3,373010
	16	4	31,888091	9,469936
	17	8	29,009733	15,633369
	18	12	25,626330	21,934181
	19	20	18,521532	34,185662
	20	30	9,809302	49,546519
Profilul II $u = 29,875 \text{ mm}$	1	-20	-3,000063	33,029855
	2	-14°22'5"	-4,273545	27,116489
	3	-10	-4,123789	22,531225
	4	-5	-2,200817	19,176583
	5	0	1,410179	17,924839
Profilul III $u = 25 \text{ mm}$	1		-5,155280	37,990994
	2		-5,438122	34,842398
	3		-5,198173	32,369219
	4		-4,557460	31,360843
	5		-3,845156	31,782069
	6		-3,397547	33,569066
Profilul IV $u = 21,848276 \text{ mm}$	1	-20	-6,246639	48,606233
	2	-15	-7,023862	45,338959
	3	-10	-7,529135	42,740924
	4	-5	-7,775259	41,014236
	5	1°49'42"	-7,842780	40,028268
	6	5	-7,846912	40,230362
	7	10	-7,932370	41,349696
	8	15	-8,208755	43,373358
	9	20	-8,735029	46,175081

\*) La întocmirea acestei tabele au contribuit L. Negrescu, A. Németh, T. Rus.

În punctul de înapoiere al profilului înfășurat de con, profilul de racord este tangent la ambele ramuri ale acestuia. La prima ramură este tangent exterior, iar la a doua ramură este tangent interior (profilul II).

Pentru o valoare a lui  $u$  mai mare decât cea corespunzătoare punctului de înapoiere, tangența este interioară, având loc pe ramura imaginată

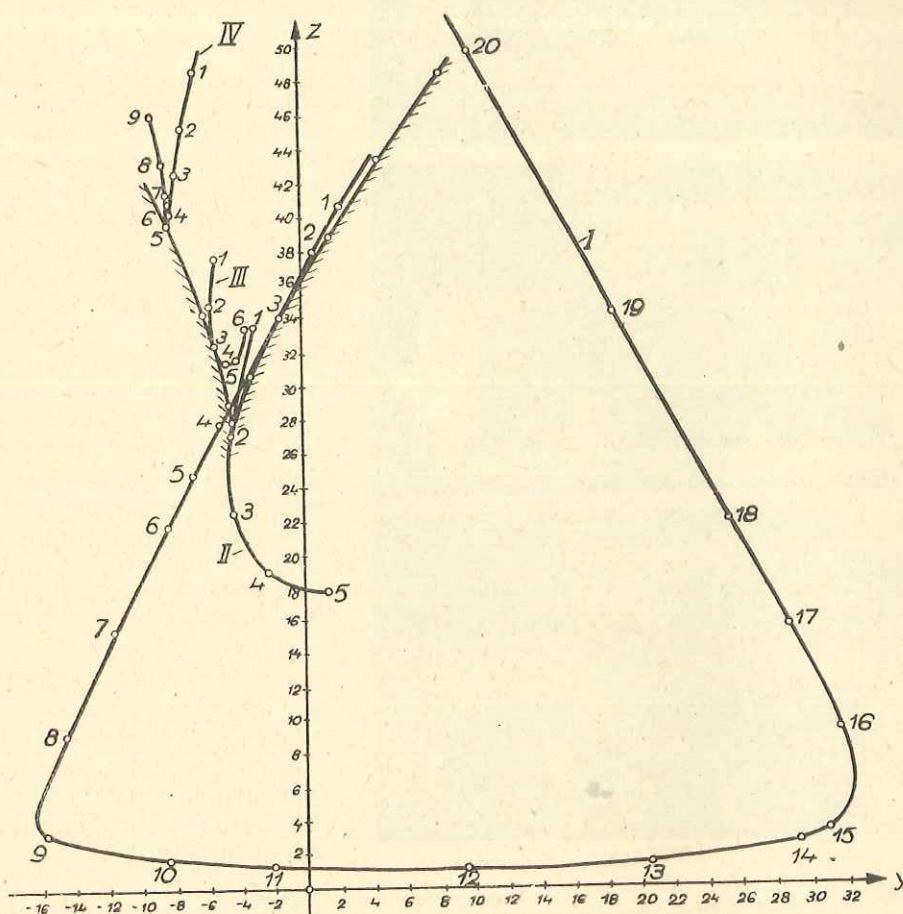


Fig. 9

a profilului înfășurat de con (profilul I). În acest caz profilul de racord intersecează ramura efectiv înfășurată de con a profilului, producînd o subtăiere a acestuia. În figura 10 s-au reprezentat fazele prelucrării în acest caz pe un model de gips.

Una dintre problemele importante din punct de vedere practic este determinarea acelei valori a cotei  $u$ , pentru care profilul de racord prezintă un punct de înapoiere și care se atașează la profilul înfășurat de con în acest

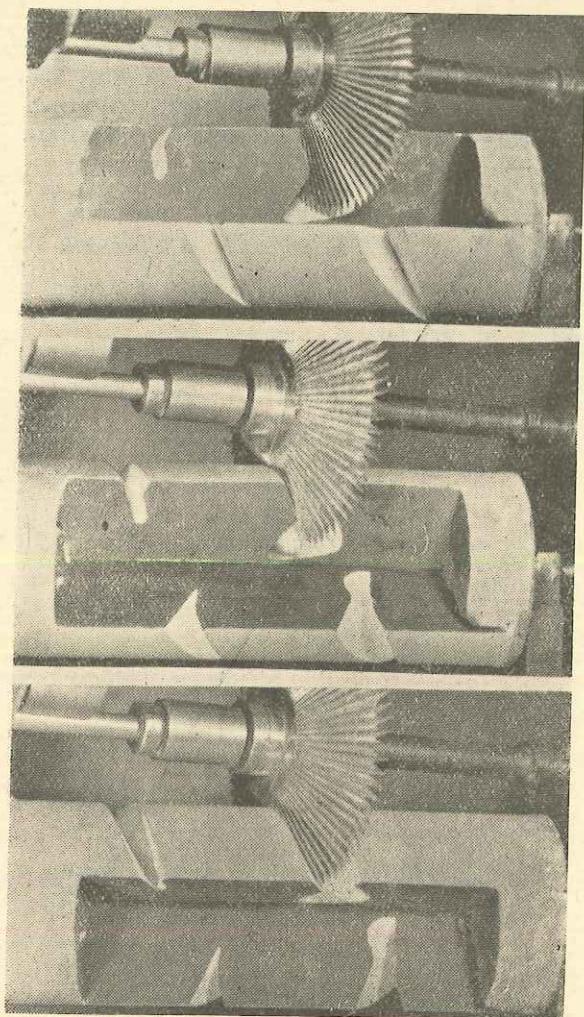


Fig. 10

$$u = \psi(v) = \frac{b \sin \gamma \cos \gamma \cos v - a \sin v}{\sin \gamma \cos \gamma \cos v + (\operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \gamma - \operatorname{ctg} \alpha) \sin v \cdot \cos v} \quad (16)$$

care ne dă valoarea corespunzătoare a lui  $u$ , cînd punctul de pe cilindrul tangent este fixat prin unghiul  $v$ .

În figura 11 s-a intersectat cilindrul tangent cu planul de bază al conului situat la cota  $u$  de vîrful său și s-a reprezentat în două proiecții tangenta  $T$  în punctul de contact.

Pentru determinarea valorii reale  $\beta$  a unghiului, pe care-l închide tangenta  $T$  cu axa cilindrului, s-a folosit metoda rabaterii pe un plan paralel cu planul orizontal de proiecție.

punct singular. În acest caz flancul înfășurat de con se leagă direct printr-o muchie ascuțită de cilindrul interior al melcului, ca în cazul asemănător al melcului evolventic.

Deoarece muchia circulară generatoare nu este altceva de cît curba caracteristică a suprafeței elicoidale de racord, în rezolvarea acestei probleme se va porni de la cele stabilite mai sus pentru curba caracteristică. Se determină, prin urmare, în ce condiții tangenta la cerc în punctul său de contact cu cilindrul avînd ca axă  $oy$ , coincide cu tangenta la elicea descrisă de acest punct pe cilindru.

Raza  $r$  a cilindrului tangent la cercul situat la cota  $u$  de vîrful conului corespunde valorii minime a funcției

$$r = \min_{(2)} (\sqrt{X^2 + Z^2}), \quad (15)$$

unde  $X$  și  $Y$  sunt date de formulele (11). Derivând parțial în raport cu  $v$  și egalând derivata cu zero se obține relația

Tinând seamă de figura 11 și având în vedere că  $AB' = AB_1$ , se poate scrie

$$AB' \cos v \cdot \sin \gamma = AB' \cos \beta. \quad (17)$$

De aici se deduce

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 v \cdot \sin^2 \gamma}}{\cos v \cdot \sin \gamma}.$$

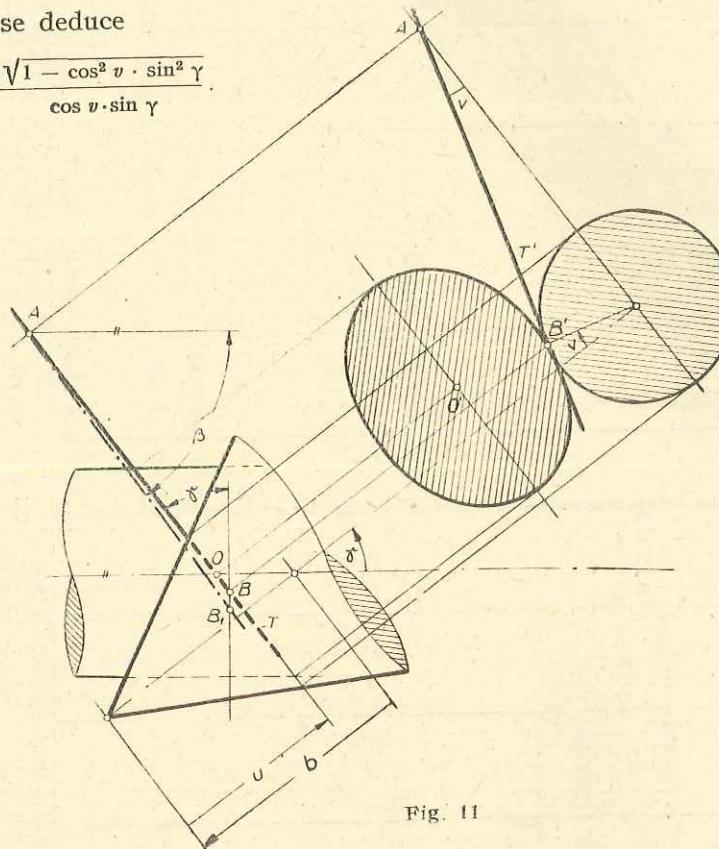


Fig. 11

Unghiul de înfăşurare  $\beta'$  al elicei descrise de punctul de contact pe cilindru se va putea exprima prin

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{m:n}{(v)} \frac{(\sqrt{X^2 + Z^2})}{h}. \quad (19)$$

Egalind cele două unghiuri se obține

$$\frac{1 - \cos^2 v \sin^2 \gamma}{\cos^2 v \sin^2 \gamma} = \min_{(v)} \frac{(X^2 + Z^2)}{h^2}. \quad (20)$$

Înlocuind pe  $X$  și  $Z$  cu valorile lor din (11) și ținând seama că între  $u$  și  $v$  există relația (14), se poate ajunge la relația

$$f(u, v) = f(u, \psi(u)) = \frac{(a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v)^2 + [b \sin \gamma - u(\sin \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma \sin v)]^2}{h^2} - \frac{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 v}{\sin^2 \gamma \cos^2 v} = 0.$$

*Tabela 3\*)*

1262116 2491792 5,039,368 18,026,603 8,8/03/1 11/11/11 1262116

Pentru aflarea unei rădăcini reale a acestei ecuații, care interesează din punct de vedere practic, va trebui întîi să se determine un domeniu cât mai restrâns pentru  $v$  în care este cuprins punctul de înapoiere. Pentru aceasta, se poate imagina un mecanism format din manivela cotită  $M$  și din elementul  $E$  articulat în  $C$ , perpendicular pe cot (fig. 8). La rotirea manivelei  $M$ , care concomitent execută și o translatăie de-a lungul axei  $oy$  asigurată printr-o cuplă elicoidală, vîrful elementului  $E$  ce se sprijină pe planul  $x = 0$  inscrie profilul de racord corespunzător. Variind lungimea elementului  $E$ , în funcție de diferențele poziției ale articulației  $C$  pe cotul manivelei, se pot obține o serie de curbe de racord.

Pentru curba de racord ce se termină aproximativ în vîrf, se delimitizează domeniul pentru  $v$ .

În cazul exemplului considerat,

$$0 < v < 10 \quad (v \text{ exprimé en grade})$$

Determinînd pe  $\mu = \psi(v)$  din (16) pentru  $v = 0$  și  $v = 10$  și introducînd aceste valori în (21), se obțin pentru  $f(u, v)$  valorile  $-2,929070$  și  $+57,501088$ . Procedînd încă o dată prin înjumătătiri, se poate ajunge la o aproximare dorită pentru  $u$  în limitele prescrise în prealabil. În tabela 3, după al noulea pas s-a ajuns la o aproximare

$$21,808631 \text{ mm} < u < 21,887922 \text{ mm}$$

adică la un cîmp de toleranță  $\Delta u = 0,079291$  mm.

În tabela 2 s-au dat și coordonatele corespunzătoare acestui caz, iar profilul respectiv s-a notat cu IV în figura 9.

Calculul laborios pentru determinarea coordonatelor punctelor profilului înfășurată de suprafața conică și a punctului de înălțime, este indicat să fie executat de mașină electronică cifrică.

Schema programului pentru algoritmul corespunzător este dată în figura 12.

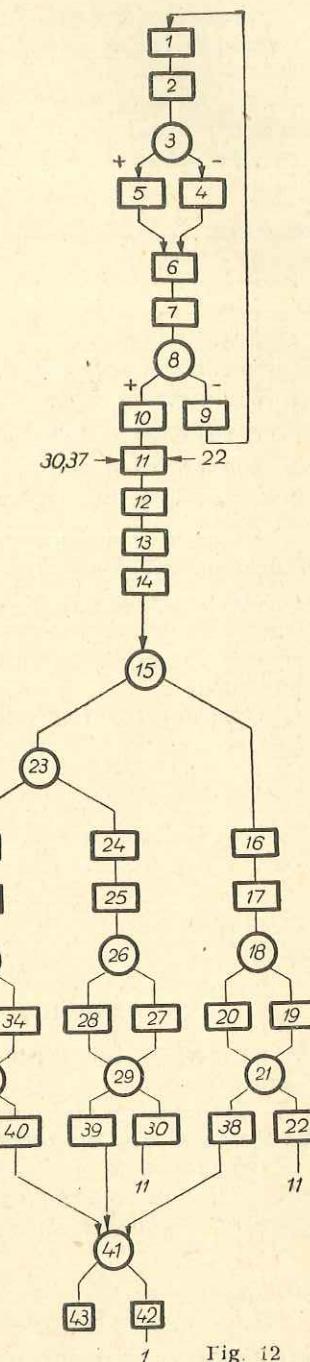


Fig. 12

Pe baza acestei scheme s-a întocmit programul respectiv pentru mașina de calcul CIFA-2. Programul conține 200 cuvinte ale mașinii, atât pentru instrucțiuni cât și pentru datele inițiale. Blocurile din această schemă le vom numi în cele ce urmează operatori [3], semnificația lor fiind următoarea:

*Operatorul 1* realizează calculul expresiilor

$$C_k = a_1 u_k - b_1,$$

respectiv

$$F_k = \frac{C_k B + A \sqrt{A^2 - B^2 + C_k^2}}{A^2 + C_k^2}$$

și urmează operatorul 2. Aici  $A, B$ , ca și  $a_1, b_1$ , sunt constante date ca și în [2], formula (49).

*Operatorul 2* calculează valoarea  $\sqrt{1 - F_k^2}$  și urmează operatorul 3.

*Operatorul 3* compară pe  $F_k$  cu  $F_{k-1}$ . Dacă  $F_k > F_{k-1}$ , urmează operatorul 4; dacă nu, operatorul 5.

*Operatorul 4*. În cele ce urmează se consideră valoarea  $+\sqrt{1 - F_k^2}$ . Urmează operatorul 6.

*Operatorul 5*. În cele ce urmează se consideră valoarea  $-\sqrt{1 - F_k^2}$ . Urmează operatorul 6.

*Operatorul 6*. Se înlocuiește conținutul celulei  $F_{k-1}$  cu  $F_k$ . Urmează operatorul 7.

*Operatorul 7* realizează calculul expresiilor

$$E_k = (b - u_k) \sin \gamma - \sqrt{1 - F_k^2} \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma,$$

$$G_k = a - u_k F_k \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\theta_k = \frac{-E_k}{\sqrt{E_k^2 + G_k^2}}$$

$$z_k = G_k \sqrt{1 - \theta_k^2} - \theta_k E_k,$$

$$y_k = h \arcsin \theta_k + (u - b) \cos \gamma - u_k \sqrt{1 - F_k^2} \operatorname{ctg} \alpha \sin \gamma.$$

De asemenea, tot acest operator tipărește valorile  $z_k, y_k, u_k$ . Urmează operatorul 8.

*Operatorul 8* compară pe  $z_k$  cu  $z_{k-1}$ . Dacă  $z_k < z_{k-1}$ , urmează operatorul 9; dacă nu, operatorul 10.

*Operatorul 9*. În acest caz nu avem realizată o valoare  $u_k''$  pentru care valoarea funcției să fie mai mică decât cele două extremități. Acest operator efectuează următoarele înlocuiri de celule:

$$z_{k-1} \rightarrow z_{k-2}; \quad u_{k-1} \rightarrow u_{k-2};$$

$$z_k \rightarrow z_{k-1}; \quad u_k \rightarrow u_{k-1}.$$

Se calculează în continuare  $u_{k+1} = u_k + 1$  și se continuă cu operatorul 10.

*Operatorul 10*. În acest caz s-au determinat extremitățile intervalului  $I_k$ , care sunt  $u_{k-2}$  și  $u_k$ . Acest operator realizează transformările

$$u_{k-2} \rightarrow u'_k; \quad z_{k-2} \rightarrow z'_k;$$

$$u_{k-1} \rightarrow u''_k; \quad z_{k-1} \rightarrow z''_k;$$

$$u_k \rightarrow u'''_k; \quad z_k \rightarrow z'''_k.$$

Urmează operatorul 11.

*Operatorul 11* realizează calculul expresiei  $u_{k+1}^s = \frac{u'_k + u''_k}{2}$  și urmează operatorul 12.

*Operatorul 12* face ca operatorul 7 să predea comanda operatorului 13. Realizează transformarea  $u_{k+1}^s \rightarrow u_k$ . Urmează operatorul 13.

*Operatorul 13* realizează calculul  $u_{k+1}^d = \frac{u'_k + u'''_k}{2}$  și urmează operatorul 14.

*Operatorul 14* face ca operatorul 7 să predea comanda operatorului 15. Realizează transformarea  $u_{k+1}^d \rightarrow u_k$ . Urmează operatorul 15.

*Operatorul 15* compară pe  $z_{k+1}^s$  cu  $z_k^s$ . Dacă  $z_k^s > z_{k+1}^s$ , suntem în cazul 1 și urmează operatorul 16. Dacă nu, suntem în cazurile 2 sau 3 și urmează operatorul 23.

*Operatorul 16* calculează diferențele  $d_1 = z_k - z_{k+1}^s$  și  $d_2 = z_k^s - z_{k+1}^s$ .

*Operatorul 17* calculează diferența  $d = d_1 - d_2$ . Urmează operatorul 18.

*Operatorul 18* determină dacă  $d_1 > d_2$  și în acest caz urmează operatorul 19, iar în caz contrar operatorul 20.

*Operatorul 19*. În acest caz  $r = d_1$  și se realizează calculul  $r_1 = r - \Delta z$ . Urmează operatorul 20.

*Operatorul 20*. În acest caz  $r = d_2$  și se realizează calculul  $r_1 = r - \Delta z$ . Urmează operatorul 21.

*Operatorul 21* analizează semnul lui  $r_1$ . Dacă  $r_1 > 0$ , vom avea  $r > \Delta z$  și urmează operatorul 22. În acest caz calculul nu s-a terminat. Dacă nu, urmează operatorul 38.

*Operatorul 22* realizează transformările

$$z'_k \rightarrow z'_{k+1}; \quad u'_k \rightarrow u'_{k+1};$$

$$z_{k+1}^s \rightarrow z''_{k+1}; \quad u_{k+1}^s \rightarrow u''_{k+1};$$

$$z''_k \rightarrow z'''_{k+1}; \quad u''_k \rightarrow u'''_{k+1}.$$

*Operatorul 23*. Acest operator compară pe  $z_k^s$  cu  $z_{k+1}^d$ . Dacă  $z_k^s < z_{k+1}^d$ , urmează operatorul 24; dacă nu, operatorul 31.

*Operatorul 24*. Acest operator lucrează în cazul 2. El calculează diferențele  $d_1 = z_k^s - z_{k+1}^d$  și  $d_2 = z_k^s - z_{k+1}^d$ . Urmează operatorul 25.

*Operatorul 25* calculează diferența  $d = d_1 - d_2$ . Urmează operatorul 26.

*Operatorul 26* analizează semnul lui  $d$ . Dacă  $d > 0$ , rezultă că  $d_1 > d_2$  și urmează operatorul 27; dacă nu, operatorul 28.

*Operatorul 27.* În acest caz  $r = d_1$  și se calculează  $r_1 = r - \Delta z$ . Urmează operatorul 29.

*Operatorul 28* calculează  $r - \Delta z = r_1$  și urmează operatorul 29.

*Operatorul 29.* Dacă  $r_1 > 0$ , înseamnă că  $r > \Delta z$  și calculul nu s-a terminat, urmează operatorul 30; dacă nu, operatorul 39.

*Operatorul 30* realizează transformările

$$\begin{array}{lll} z''_k \rightarrow z'_k; & z''_{k+1} \rightarrow z''_{k+1}; & z'''_k \rightarrow z'''_{k+1}; \\ u''_k \rightarrow u'_k; & u''_{k+1} \rightarrow u''_{k+1} & u'''_k \rightarrow u'''_{k+1}. \end{array}$$

Urmează operatorul 31.

*Operatorul 31.* Sîntem în cazul 3 și acest operator realizează calculul diferențelor  $d_1 = z''_{k+1} - z''_k$  și  $d_2 = z''_{k+1} - z''_k$ . Urmează operatorul 32.

*Operatorul 32* calculează diferența  $d = d_1 - d_2$ . Urmează operatorul 33.

*Operatorul 33,* analizînd semnul lui  $d$ , determină dacă  $d_1 > d_2$  și urmează operatorul 34; sau dacă  $d_1 < d_2$ , urmează operatorul 35.

*Operatorul 34.* În acest caz  $r = d_1$ . Se calculează  $r_1 = r - \Delta z$  și urmează operatorul 36.

*Operatorul 35.* În acest caz  $r = d_2$  și se calculează  $r_1 = r - \Delta z$ . Urmează operatorul 36.

*Operatorul 36* analizează semnul lui  $r_1$ . Dacă  $r_1 > 0$ , înseamnă că  $r > \Delta z$  și se repetă calculul. Urmează operatorul 37. Dacă nu, operatorul 40.

*Operatorul 37.* Aceasta realizează transformările asupra interferenței și a profilului de racord la melciile prelucrați

$$\begin{array}{lll} z''_{k+1} \rightarrow z'_{k+1}; & z'_k \rightarrow z''_{k+1}; & z''_{k+1} \rightarrow z'''_{k+1}; \\ u''_{k+1} \rightarrow u'_{k+1}; & u''_k \rightarrow u''_{k+1}; & u''_{k+1} \rightarrow u'''_{k+1}. \end{array}$$

Urmează operatorul 11.

*Operatorul 38* realizează transformarea  $u''_{k+1} \rightarrow u_k$ . Urmează operatorul 41.

*Operatorul 39* realizează transformarea  $u''_{k+1} \rightarrow u_k$ . Urmează operatorul 41.

*Operatorul 40* realizează transformarea  $u''_k \rightarrow u_k$ . Urmează operatorul 41.

*Operatorul 41* compara pe  $u_k$  cu  $u_{max}$ . Dacă  $u_k < u_{max}$  urmează operatorul 42; dacă nu, urmează operatorul 43.

*Operatorul 42* calculează  $u_{k+1} = u_k + 1$ . Transformă operatorul 7 astfel ca să predea conducerea calculului operatorului 41. Urmează operatorul 1.

*Operatorul 43.* Oprește calculul.

În mod asemănător se poate da schema de program și pentru celelalte calcule prezentate în această lucrare.

## ОБ ПОДРЕЗАНИЕ И ПЕРЕХОДНОЙ ГАЛТЕЛИ ДЛЯ ЧЕРВЯКОВ, ОБРАБОТАННЫХ КОНИЧЕСКИМИ ФРЕЗАМИ

### РЕЗЮМЕ

После изложения критериев избежания подрезания и после установления уравнений профиля галтели для эвольвентных червяков, исследуются те же проблемы для червяков, обработанных коническими фрезами.

Дается алгоритм вычисления грани возвращения над геликоидальной поверхностью, образованной резцом и излагается соответствующая программа для вычислений на цифровой счетной электронной машине CIFA-2. Определяются также уравнения для вычисления по точкам профиля галтели в аксиальном сечении и указывается приближенный метод для практически важного случая, когда галтели вырождается в точку.

### SUR L'INTERFÉRENCE ET LE PROFIL DE RACCORD DES VIS SANS FIN OBTENUES AVEC DES FRAISES CONIQUES

### RÉSUMÉ

Après avoir présenté les critériums permettant d'éviter l'interférence et avoir établi les équations du profil de raccord des vis sans fin en hélice coïde développable, les auteurs étudient les mêmes problèmes pour les vis sans fin obtenues avec des fraises coniques.

Ils indiquent l'algorithme de calcul de l'arête de retour à la face hélicoïdale engendrée par l'outil, et ils présentent aussi un programme pour le calcul avec la machine à calculer électronique, CIFA-2. Ils établissent également les équations permettant de calculer par des points du profil de raccord en section axiale, tout en indiquant une méthode d'approximation du cas pratiquement important d'un profil de raccord devenu punctiforme.

### BIBLIOGRAFIE

1. Bauersfeld W., Ein Beitrag zur Theorie der Schneckengetriebe und zur Normung der Schnecken. VDI, Forschungsheft, 427, 1–28 (1949/50).
2. Gergely E., Maros D., Asupra abaterilor dintre flancurile melcilor prelucrate de scule cu profile rectilinii. Studii și cercetări de matematică (Cluj), XI, fasciculă anexă, 81–100 (1960).
3. Leapunov A. A., Despre schemele logice de programare (traducere din limba rusă). Probleme de cibernetică, Bibl. Analelor Rom.-Sov., seria tehnică, 69–70, 265–306 (1959).
4. Maros D., Cîteva probleme legate de standardizarea melcilor cilindrici, Standardizarea, 2, 68–71 (1960).

Primit la 8. XII. 1960.