ASUPRA DEZVOLTĂRII IN SERIE INTREAGĂ A INVERSEI UNUI POLINOM

DE

NICOLAE GHIRCOIAŞIU

Comunicare prezentată în şedinţa din 7 iulie 1950 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Ne propunem să dăm cîteva rezultate ce privesc problema determinării condiţiilor necesare şi suficiente pentru ca dezvoltarea în serie întreagă a inversei unui polinom cu coeficienţi reali, să aibă toţi coeficienţii pozitivi.

După cunoştinţa noastră, singura problemă înrudită rezolvată se datoreşte d-lui Paul Lévy (7), care se ocupă cu dezvoltarea în serie întreagă a lui $e^{P(x)}$, $P(x)$ fiind un polinom cu coeficienţi reali. Aşa precum arată autorul în această lucrare, asemenea rezultate îşi au aplicaţia lor în Calculul Probabilităţilor.

Lucrarea de faţă a pornit de la problema Nr. 4698 din Gazeta Matematică Bucureşti, vol. 41 (1935), propusă de Prof. T. Popoviciu şi a cărei rezolvare se găseşte dată ca o aplicaţie la paragraful 8.

În prima parte a acestei lucrări vom da cîteva teoreme generale, care ne vor servi mereu, precum şi o teoremă referitoare la polinoamele cu toate rădăcinile reale. În partea a doua vom da rezultate referitoare la polinoamele de gradul 3 şi 4 cu două rădăcini complexe, iar în ultima parte diverse proprietăţi referitoare la secţiunile seriilor considerate.

În tot cursul lucrării vom presupune că polinoamele considerate au toţi coeficienţii reali şi termenul liber egal cu unu.

I.

1. Începem prin a reaminti o teoremă cunoscută din teoria funcţiilor de variabilă complexă, care va fi fundamentală în toată lucrarea. Aceasta este:

O serie de puteri, cu raza de convergenţă R *şi cu coeficienţi nenegativi, nu se poate prelungi pe raza punctului* R, *dincolo de acesta.* (2).

Rezultă de aici, că unul din punctele singulare ale seriei, cu cel mai mic modul, este R și deci *condiția necesară, dar nu și suficientă, pentru ca o serie de puteri să aibă coeficienții nenegativi, este ca unul din punctele ei singulare cu cel mai mic modul să fie pozitiv.* Vom nota pe viitor această condiție necesară prin *condiția N*. Cum noi avem de a face cu inverse de polinoame, punctele singulare sînt rădăcinile polinomului.

2. Avem apoi teorema

În dezvoltarea în serie întreagă

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\dots(1-a_nx)} = 1 + nq_1x + \cdots + \binom{n+r-1}{r} q_r x^r + \dots$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt reali, avem neegalitățile

$$q_{2r+1}^2 < q_{2r} . q_{2r+2} \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

de unde rezultă $q_{2r} > 0$.

Neegalitatea dintre trei coeficienți consecutivi oarecari este cunoscută, dar numai pentru cazul cînd $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt pozitivi (5), (11). Demonstrația, în cazul nostru, este analogă cu cea din cartea citată și anume, coeficienții q se pot scrie:

$$q_r = (n-1)! \iint \dots \int (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^r \, dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$$

unde $x_n = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$ și domeniul de integrare este definit de $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$. Aplicînd neegalitatea lui Buniakowski (3) — Schwarz (12), pentru integrale multiple, funcțiilor.

$$f = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^{\frac{m-1}{2}}, \; g = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^{\frac{m+1}{2}}$$

rezultă

$$\left\{\iint \dots \int (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)^m dx_1 \dots dx_{n-1}\right\}^2 <$$

$$\iint \dots \int (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)^{m-1} dx_1 \dots dx_n \iint \dots \int (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)^{m+1} dx_1 \dots dx_n$$

care nu este altceva decît relația

$$q_m^2 < q_{m-1} q_{m+1}, \qquad m = 1, 2, \dots$$

Funcțiile f și g trebuie să fie reale; dar $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ poate lua și valori negative, prin urmare, relația de mai sus nu este adevărată decît pentru m impar, în care caz numerele $\frac{m-1}{2}$ și $\frac{m+1}{2}$ sînt întregi și deci avem

$$q_{2r+1}^2 < q_{2r} q_{2r+2}, \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

Pentru $r = 0$, avem $q_1^2 < q_2$ deci $q_2 > 0$, pentru $r = 1$ avem $q_3^2 < q_2 q_4$ deci $q_4 > 0$, ș.a.m.d., rezultă $q_{2r} > 0$, deci că toți coeficienții de rang

par sînt pozitivi. Observăm că acest lucru este adevărat numai cînd numerele a_i sînt presupuse reale.

3. În baza teoremelor de mai sus, rezultă că

Fiind dat un polinom P(x), cu toate rădăcinile reale și cu rădăcina cea mai mică în modul pozitiv, dezvoltarea în serie întreagă

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\dots(1-a_nx)} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots \quad (1)$$

are toți coeficienții pozitivi, începînd de la un rang k suficient de mare.

Să presupunem că $a_1 > 0$ este cel mai mare în modul dintre numerele a_i. Condiția N este atunci îndeplinită, fiindcă $\frac{1}{a_1}$ este rădăcina lui $P(x)$ cu cel mai mic modul, deci dezvoltarea de mai sus poate avea toți coeficienții pozitivi. Coeficientul p_i este funcția simetrică și omogenă de gradul i

$$p_i = \sum a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

suma extinzîndu-se la toate valorile întregi nenegative ale indicilor $i_1, i_2, \dots, i_n$ așa ca $i_1 + i_2 + \dots + i_n = i$. Deci el poate fi considerat ca un polinom de gradul i în raport cu a_1. Avem atunci

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{p_{i-1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{a_1^i + \alpha a_1^{i-1} + \cdots}{a_1^{i-1} + \beta a_1^{i-2} + \cdots} = a_1 > 0.$$

Cum din doi coeficienți consecutivi, unul (cel de rang par) este pozitiv și cum limita de mai sus este pozitivă, rezultă că de la un rang, k, suficient de mare, toți coeficienții dezvoltării (1) vor fi pozitivi.

Această teoremă arată lucrul important, că pentru ca $p_r \geq 0, r = 1, 2, \dots$, sînt necesare și suficiente numai un număr finit k de condiții. În următoarele două paragrafe, vom trata cazurile în care $k = 1$.

4. Avem teorema

Dacă polinomul P(x) cu coeficienți reali și toate rădăcinile reale, este de gradul 2,3 sau 4, condiția N fiind îndeplinită, condiția necesară și suficientă pentru ca seria (1) să aibă toți coeficienții nenegativi, este $p_1 \geq 0$.

Pentru demonstrare, va trebui să analizăm toate cazurile posibile pentru gradul polinomului (2,3 sau 4) cît și referitoare la natura rădăcinilor.

4_1. P(x) *este de gradul* 2. El este atunci de forma

$$P(x) = (1-ax)\,(1-bx)$$

sau

$$P(x) = (1-ax)\,(1+bx)$$

a, b pozitivi și $a \geq b$ (Condiția N). În primul caz coeficienții dezvoltării sînt evident pozitivi. În al doilea caz, singură condiția N asigură pozitivitatea coeficienților, după cum se vede imediat grupînd termenii doi cîte doi în $p_r = a^r - a^{r-1}b + a^{r-2}b^2 - \dots + (-1)^r b^r$.

4_2. P(x) *este de gradul* 3. Deosebim trei cazuri:

α). Toate trei rădăcinile sînt pozitive, $P(x) = (1-ax)\ (1-bx)\ (1-cx)$ coeficienţii dezvoltării (1) sînt evident pozitivi.

β). Două din rădăcini sînt pozitive, $P(x) = (1-ax)\ (1-bx)\ (1+cx)$, a, b, c pozitivi şi $a \geqq c$ (condiţia N). Avem

$$\frac{1}{(1-ax)(1+cx)} = 1 + (a-c)x + (a^2 - ac + c^2)x^2 + \cdots$$
$$+ [a^r - a^{r-1}c + a^{r-2}c^2 + \cdots + (-1)^r c^r]\, x^r + \cdots$$

care are coeficienţi pozitivi în baza lui 4_1. Produsul acestei serii, cu seria cu coeficienţi pozitivi

$$\frac{1}{1-bx} = 1 + bx + b^2x^2 + \cdots$$

va avea coeficienţi pozitivi.

γ). O singură rădăcină este pozitivă, deci $P(x) = (1-ax)\ (1+bx)\ (1+cx)$; a, b, c pozitivi şi $a \geqq c, a \geqq b$ (Condiţia N). Punînd

$$\frac{1}{(1+bx)(1+cx)} = 1 - s_1x + s_2x^2 - \cdots + (-1)^r s_r x^r + \cdots$$

unde $s_r = b^r + b^{r-1}c + \ldots + c^r > O, r = 1, 2, \ldots$, avem

$$\frac{1}{(1-ax)(1+bx)(1+cx)} = 1 + (a-s_1)x + \cdots$$
$$+ [a^r - a^{r-1}s_1 + a^{r-2}s_2 - \cdots + (-1)^r s_r]\, x^r + \cdots$$

Coeficienţii acestei dezvoltări sînt nenegativi, dacă $a - s_1 = a - b - c \geqq O$. În adevăr avem

$$as_{2p} - a_{2p+1} = as_{2p} - s_1s_{2p} + bcs_{2p-1} > s_{2p}(a-s_1) \geqslant 0, \quad p = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

de unde coeficienţii de rang impar sînt nenegativi, căci

$$a^{2n+1} - s_1a^{2n} + s_2a^{2n-1} - \cdots + s_{2n}a - s_{2n+1} > (a-s_1)(a^{2n} + s_2a^{2n-2} + \cdots + s_{2n}) \geqslant 0$$

De asemenea cei de rang par sînt pozitivi, căci

$$a^{2n} - s_1a^{2n-1} + \cdots + s_{2n-2}a^2 - s_{2n-1}a + s_{2n} > (a-s_1)(a^{2n-1} + s_2a^{2n-2} + \cdots + s_{2n-2}a) +$$
$$+ s_{2n} > 0\,.$$

4_3. P(x) *este de gradul* 4. Deosebim patru cazuri:

α). Dacă $P(x)$ are toate rădăcinile pozitive, coeficienţii dezvoltării (1) sînt pozitivi.

β). $P(x)$ are trei rădăcini pozitive, $P(x) = (1-ax)(1-bx)(1-cx)(1+dx)$; a, b, c, d pozitivi şi a cel mai mare (Condiţia N). Demonstraţia este imediată şi se face ca şi la pct. β). de la 4_2.

γ). $P(x)$ are două rădăcini pozitive şi două negative, deci $P(x) = (1-ax)(1-bx)(1+cx)(1+dx)$, a, b, c, d pozitivi şi a cel mai mare. Dacă şi $b \geqq c$, pozitivitatea coeficienţilor din (1) rezultă imediat, deoarece

dezvoltările în serie întreagă a funcţiilor

$$\frac{1}{(1-ax)(1+dx)} \qquad \frac{1}{(1-bx)(1c+x)}$$

au coeficienţii pozitivi sau nuli.

Eliminînd acest caz simplu, notăm

$$a = h + k = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \qquad c = h' + k' = \frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2}$$
$$b = h - k = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \qquad d = h' - k' = \frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2}$$

unde am presupus $c \geqq d$, ceea ce se poate face totdeauna. Observăm că cele patru numere h, k, h', k', sînt pozitive. b fiind mai mic decît c, rezultă $k \geqq k'$. Condiţia $a + b - c - d \geqq O$, despre care vrem să arătăm că este necesară şi suficientă, pentru pozitivitatea coeficienţilor seriei (1), este echivalentă cu $h \geqq h'$. Cu notaţiile de mai sus avem

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{[1-(h+k)x][1-(h-k)x][1+(h'+k')x][1+(h'-k')x]} =$$
$$= \frac{1}{[(1-hx)^2 - k^2x^2][(1+h'x)^2 - k'^2x^2]} =$$
$$= \frac{1}{(1-hx)^2(1+h'x)^2\left[1 - \frac{k^2x^2}{(1-hx)^2}\right]\left[- \frac{k'^2x^2}{(1+h'x)^2}\right]} =$$
$$= \frac{1}{(1-hx)^2(1+h'x)^2}\left[1 + \frac{k^2x^2}{(1-hx)^2} + \frac{k^4x^4}{(1-hx)^4} + \cdots\right]\left[1 + \frac{k'^2x^2}{(1+h'x)^2} + \frac{k'^4x^4}{(1+h'x)^4} + \cdots\right]$$

deci

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1-hx)^2(1+h'x)^2} + \left[\frac{k^2}{(1-hx)^4(1+h'x)^2} + \frac{k'^2}{(1-hx^2)^2(1+h'x)^4}\right]x^2 + \cdots \tag{2}$$
$$+ \left[\frac{k^{2n}}{(1-hx)^{2n+2}(1+h'x)^2} + \frac{k^{2n-2}k'^2}{(1-hx)^{2n}(1+h'x)^4} + \cdots + \frac{k'^{2n}}{(1-hx)^2(1+hx)^{2n+2}}\right]x^{2n} + \cdots$$

Dezvoltînd în serie întreagă fiecare dintre fracţiile raţionale de mai sus, obţinem dezvoltarea dorită. Din formula de mai sus rezultă următoarele:

Termenul liber al dezvoltării este unu.

Coeficientul lui x provine numai din dezvoltarea primului termen

$$\frac{1}{(1-hx)^2(1+h'x)^2}$$

care are coeficienţii pozitivi, dacă $h \geqq h'$ (4_1).

Coeficienţii lui x^2 şi x^3 provin numai din primii doi termeni. Pentru coeficienţii lui x^4 *şi* x^5 intervine şi al treilea termen, ş. a. m. d.

Toți coeficienții puterilor pare ale lui x sînt pozitivi. Aceasta rezultă imediat, deoarece în dezvoltările în serie întreagă ale fracțiilor raționale

$$\frac{1}{(1-hx)^i}, \quad \frac{1}{(1+h'x)^j}$$

coeficienții puterilor pare ale lui x sînt întotdeauna pozitivi (teorema 2).

Toți coeficienții puterilor impare ale lui x sînt de asemenea pozitivi. Să arătăm acest lucru pentru coeficientul lui x^{2p-1}. Acesta va proveni numai din primii $p+1$ termeni din (2) și anume va fi suma coeficienților lui x^{2p-1} proveniți din acești $p+1$ termeni. Dar primul termen dă numai coeficienți pozitivi, după cum am văzut, din al doilea după ce se scoate în factor fracția

$$\frac{1}{(1-hx)^2(1+h'x)^2}$$

a cărei dezvoltare în serie dă numai coeficienți pozitivi, mai rămîne

$$\frac{k^2}{(1-hx)^2}+\frac{k'^2}{(1+h'x)^2}.$$

Dezvoltînd în serie aceste fracții raționale, constatăm că prima este o majorantă a celei de a doua, căci $k>k'$ și cu condiția $h \geqq h'$. În adevăr coeficientul lui x^{2p-1} din suma lor este

$$2ph^{2p-1}k^2-2ph'^{(2p-1)}k'^2=2p\left(h^{2p-1}k^2-h'^{(2p-1)}k'^2\right)>0.$$

În termenul al treilea la mijloc avem o fracție rațională, care dezvoltată în serie, are numai coeficienți pozitivi. Pentru ceilalți doi se procedează ca mai sus, căci după ce se scoate factorul comun de la numitor $(1-hx)^2(1+h'x)^2$, rămîne

$$\frac{k^4}{(1-hx)^4}+\frac{k'^4}{(1+h'x)^4}$$

care dezvoltată în serie are coeficientul lui x^{2p-1}

$$\binom{2p+2}{3}h^{2p-1}k^4-\binom{2p+2}{3}h'^{(2p-1)}k'^4=\binom{2p+2}{3}\left[h^{2p-1}k^4-h'^{(2p-1)}k'^4\right]>0.$$

Procedeul se extinde ușor, grupînd din fiecare termen al dezvoltării (2), fracțiile egal depărtate de extreme și observînd că dezvoltarea în serie a primei fracții este o majorantă a celei de a doua, dacă este îndeplinită condiția $h \geqq h'$. În cazul cînd numărul fracțiilor dintr-un termen din (2) este impar, termenul de la mijloc are o dezvoltare în serie cu coeficienți pozitivi.

Prin urmare am demonstrat și în acest caz că $p_1 \geqq 0$, este condiția necesară și suficientă pentru pozitivitatea coeficienților dezvoltării (1).

δ). $P(x)$ are o singură rădăcină pozitivă, deci avem $P(x)=(1-ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)$, a, b, c, d pozitivi și a cel mai mare. Punînd

$$\frac{1}{(1+bx)(1+cx)(1+dx)}=1-s_1x+s_2x^2-\cdots+(-1)^r s_r x^r+\cdots; \quad s_r>0,$$

avem

$$\frac{1}{P(x)}=1+(a-s_1)x+(a^2-as_1+s_2)x^2+\cdots$$
$$+\left[a^r-a^{r-1}s_1+a^{r-2}s_2-\cdots+(-1)^r s_r\right]x^r+\cdots$$

Coeficienții acestei dezvoltări sînt nenegativi, dacă $a-s_1=a-b-c-d \geqq 0$.

In adevăr avem

$$as_{2p}-s_{2p+1}=as_{2p}-s_1s_{2p}+\sum_{\beta+\gamma=2p+1} b^\beta c^\gamma+2\sum_{\beta+\gamma+\delta=2p+1} b^\beta c^\gamma d^\delta > s_{2p}(a-s_1) \geqslant 0$$

β, γ, δ întregi nenegativi. Ținînd seama de această neegalitate, coeficientul lui x^{2n+1} devine

$$a^{2n+1}-a^{2n}s_1+\cdots+as_{2n}-s_{2n+1}>(a-s_1)(a^{2n}+a^{2n-2}s_2+\cdots+s_{2n}) \geqslant 0$$

iar coeficientul lui x^{2n}

$$a^{2n}-a^{2n-1}s_1+\cdots+a^2s_{2n-2}-as_{2n-1}+s_{2n}>(a-s_1)(a^{2n-1}+a^{2n-2}s_2+\cdots+as_{2n-2})+s_{2n}>0$$

ceea ce probează că toți coeficienții sînt nenegativi, dacă $a-s_1 \geqq 0$.

Cum alte cazuri nu se pot prezenta (ținînd seama de condiția N), teorema enunțată la începutul acestui paragraf este complet demonstrată.

5. Pentru polinoame de grad mai mare decît 4, condiția $p_1 \geqq 0$, în general nu mai este suficientă. Aceasta se vede pe exemplul următor

$$\frac{1}{(1-4x)(1-3x)(1-x)(1+3{,}9x)(1+3{,}95x)}=1+0{,}5x+28{,}4175x^2-5{,}387125x^3+\cdots$$

Există însă categorii de polinoame pentru care condiția de mai sus este și suficientă, precum vom vedea mai jos.

5_1. *Dacă* P(x), *cu toate rădăcinile reale, are o singură rădăcină negativă, condiția* N *singură asigură pozitivitatea coeficienților dezvoltării* (1). Se procedează ca la cazul β). de la 4_2.

5_2. *Dacă* P(x), *cu toate rădăcinile reale, are o singură rădăcină pozitivă, condiția* $p_1 \geqq 0$ *este necesară și suficientă pentru ca toți coeficienții seriei* (1) *să fie nenegativi, dacă este îndeplinită condiția N. Aceasta* este o generalizare a cazului δ). de mai sus.

Fie $P(x)=(1-ax)(1+b_1x)(1+b_2x)\ldots(1+b_mx)$, $a, b_1, b_2, \ldots, b_m$ pozitivi și a cel mai mare. Punînd

$$\frac{1}{(1+b_1x)(1+b_2x)\ldots(1+b_mx)}=1-s_1x+s_2x^2-\cdots+(-1)^r s_r x^r+\cdots;$$

$s_r>0$ pentru $r=1, 2, \ldots$, avem

$$\frac{1}{P(x)}=1+(a-s_1)x+(a^2-a_1s_1+s_2)x^2+\cdots+\left[a^r-a^{r-1}s_1+\cdots+(-1)^r s_r\right]x^r+\cdots$$

însă $s_{2p+1}=s_1 s_{2p}-Q_{2p+1}$, unde

$$Q_{2p+1}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=2p+1} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2}+2\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2p+1} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} b_3^{\alpha_3}+\cdots+(m-1)\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=2p+1} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2}\ldots b_m^{\alpha_m}$$

prin $\sum b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2}\ldots b_m^{\alpha_m}$ înțelegîndu-se că se fac toate combinațiile distincte a celor m numere $b_1, b_2, \ldots, b_m$, luate cîte k, exponenții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ luînd toate valorile întregi pozitive sau nule, așa fel ca $\alpha_1+\alpha+\ldots+\alpha_k=2p+1$. Se observă că Q_{2p+1} nu are nici un termen negativ. Avem atunci

$$as_{2p}-s_{2p+1}=as_{2p}-s_1 s_{2p}+Q_{2p+1}>(a-s_1)\,s_{2p}\geqslant 0,$$

de unde rezultă imediat că toți coeficienții dezvoltării (1) sînt nenegativi dacă $p_1=a-s_1\geq 0$.

Cazul de mai sus intră într-o categorie mai generală și anume cînd avem $P(x)=1-c_1x-c_2x^2-\ldots-c_nx^n$, unde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sînt pozitivi. În adevăr se observă că acest polinom are o singură rădăcină pozitivă, celelalte fiind negative sau complexe, deoarece are o singură variație. Cum toți coeficienții dezvoltării în serie întreagă a lui $P(x)$ sînt pozitivi, rezultă că este îndeplinită în mod sigur condiția N, deci rădăcina pozitivă are cel mai mic modul. Aceasta de altfel se poate demonstra și direct (2). La rîndul său cazul de mai sus este o generalizare a dezvoltării cu coeficienți pozitivi

$$\frac{1}{1-x^q}=1+x^q+x^{2q}+\cdots\quad;\ q \text{ intreg și pozitiv.}$$

5. *Dacă* $P(x)=(1-ax)^m(1+bx)^n$, $a\geq b>0$ *și* m, n *intregi pozitivi condiția necesară și suficientă pentru ca seria*

$$\frac{1}{(1-ax)^m(1+bx)^n}=1+\frac{p_1}{1!}x+\frac{p_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{p_r}{r!}x^r+\cdots \tag{3}$$

să aibe coeficienții nenegativi, este ca $p_1=ma-nb\geq 0$.

Dacă $m\geq n$ demonstrarea este imediată, căci din $a\geq b$ rezultă că dezvoltările în serie ale fracțiilor

$$\frac{1}{(1-ax)^{m-n}}\qquad\frac{1}{(1-ax)^n(1+bx)^n}$$

au coeficienții pozitivi, deci și produsul lor.

Excluzînd acest caz particular, avem

$$\frac{1}{(1-ax)^m}=1+\binom{m}{1}ax+\binom{m+1}{2}a^2x^2+\cdots+\binom{m+r-1}{r}a^rx^r+\cdots$$

$$\frac{1}{(1+bx)^n}=1-\binom{n}{1}bx+\binom{n+1}{2}b^2x^2-\cdots+(-1)^r\binom{n+r-1}{r}b^rx^r+\cdots$$

de unde

$$\frac{p_r}{r!}=\binom{m+r-1}{r}a^r-\binom{m+r-2}{r-1}\binom{n}{1}a^{r-1}b+\cdots+(-1)^q\binom{m+r-q-1}{r-q}\binom{n+q-1}{q}a^{r-q}b^q+$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{m}{1}\binom{n+r-2}{r-1}ab^{r-1}+(-1)^r\binom{n+r-1}{r}b^r.$$

Notînd cu A_i^j numărul aranjărilor a i obiecte luate cîte j și înmulțind relația de mai sus cu $r!$, avem

$$p_r=A_{m+r-1}^r a^r-\binom{r}{1}A_{m+r-1}^{r-1}A_n^1 a^{r-1}b+\cdots+(-1)^q\binom{r}{q}A_{m+r-q-1}^{r-q}A_{n+r-1}^q a^{r-q}b^q+\cdots$$
$$+(-1)^r\binom{r}{r}A_{n+r-1}^r b^r.$$

Ținînd seama de formula fundamentală a combinărilor, putem scrie

$$p_r=A_{m+r-1}^r a^r-\binom{r-1}{1}A_{m+r-2}^{r-2}A_n^1a^{r-1}b+\cdots+(-1)^r\binom{r-1}{q}A_{m+r-q-1}^{r-q}A_{n+q-1}^q a^{r-q}b^q+\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}A_m^1A_{n+r-2}^{r-1}ab^{r-1}+$$
$$-A_{m+r-2}^{r-1}A_n^1a^{r-1}b+\cdots+(-1)^q\binom{r-1}{q-1}A_{m+r-q-1}^{r-q}A^{n+}{}_{q-1}a^{r-q}b^q+\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-2}A_m^1A_{n+r-1}^{r-1}ab^{r-1}+(-1)^r\binom{r-1}{r-1}A_{n+r-1}^r b^r.$$

Dînd factor comun în primul rînd pe ma și în al doilea pe nb, avem

$$p_r=ma\Big[A_{m+r-1}^{r-1}a^{r-1}-\binom{r-1}{1}A_{m+r-2}^{r-2}A_n^1a^{r-2}b+\cdots+(-1)^q\binom{r-1}{q}A_{m+r-q-1}^{r-q-1}A_{n+q-1}^q a^{r-q-1}b^q$$
$$+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}A_{n+r-2}^{r-1}b^{r-1}\Big]-nb\Big[A_{m+r-2}^{r-1}a^{r-1}-\binom{r-1}{1}A_{m+r-3}^{r-2}A_{n+1}^1a^{r-2}b$$
$$+\cdots+(-1)^{q-1}\binom{r-1}{q-1}A_{m+r-q-1}^{r-q}A_{n+q-1}^{q-1}a^{r-q}b^{q-1}+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}A_{n+r-1}^{r-1}b^{r-1}\Big],$$

sau

$$p_r=ma\,\alpha_{r-1}-nb\,\beta_{r-1} \tag{4}$$

unde

$$\frac{1}{(1-ax)^{m+1}(1+bx)^n}=1+\frac{\alpha_1}{1!}x+\frac{\alpha_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha_r}{r!}x^r+\cdots \tag{5}$$

$$\frac{1}{(1-ax)^m(1+bx)^{n+1}}=1+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\beta_r}{r!}x^r+\cdots \tag{6}$$

În condițiile noastre ($p_1=ma-nb\geq 0$ și $a\geq b$) pentru a arăta că $p_r>0$, este suficient de a arăta că $\alpha_{r-1}-\beta_{r-1}>0$. Vom proceda prin inducție completă. Coeficientul

$$p_2=ma\,[(m+1)-nb]-nb\,[ma-(n+1)b]$$

este pozitivă, căci

$$\alpha_1-\beta_1=(m+1)a-nb-ma+(n+1)b=a+b>0.$$

Presupunem că toți coeficienții p sînt pozitivi pînă la p_{r-1} inclusiv și să arătăm că și p este pozitiv. În acest scop observăm că (5) se obține din (3) prin înmulțirea cu

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\cdots$$

de unde avem relația

$$\frac{\alpha_{r-1}}{(r-1)!}=\frac{p_{r-1}}{(r-1)!}+\frac{p_{r-2}}{(r-2)!}a+\cdots+\frac{p_1}{1!}a^{r-2}+a^{r-1}$$

prin urmare α_{r-1} este pozitiv. Dacă $\beta_{r-1}\leqslant 0$, din (4) rezultă imediat $p_r>0$. In caz contrar, deci dacă $\beta_{r-1}>0$, scădem relațiile (5) și (6) și avem

$$\frac{x(a+b)}{(1-ax)^{m+1}(1+bx)^{n+1}}=\frac{\alpha_1-\beta_1}{1!}x+\frac{\alpha_2-\beta_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha_{r-1}-\beta_{r-1}}{(r-1)!}x^{r-1}+\cdots \quad (7)$$

pe de altă parte notînd

$$\frac{1!}{(1-ax)^{m+1}(1+bx)^{n+1}}=1+\frac{\gamma_1}{1!}x+\frac{\gamma_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}x^{r-1}+\cdots \quad (8)$$

rezultă că $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$ sînt pozitivi, deoarece această serie se obține din înmulțirea seriei (3), cu coeficienții pozitivi pînă la p_{r-1} inclusiv, cu seria cu coeficienți pozitivi

$$\frac{1}{(1-ax)(1+bx)}=1+(a-b)x+(a^2-ab+b^2)x^2+\cdots,$$

coeficienții pînă la γ_{r-1} obținîndu-se numai cu ajutorul coeficienților pozitivi $p_1, \ldots, p_{r-1}$. Înmulțind seria (8) cu $x(a+b)$ și comparînd-o cu (7) avem

$$\alpha_{r-1}-\beta_{r-1}=(a+b)\gamma_{r-2}>0.$$

Prin urmare, rezultă că

$$p_r=ma\,\alpha_{r-1}-nb\,\beta_{r-1}>0$$

și teorema este demonstrată.

II.

6. Pînă acum ne-am ocupat de cazul cînd polinomul P(x) avea toate rădăcinile reale și numai întîmplător (la sfîrșitul paragrafului 5_2) am intîlnit un caz în care acest polinom putea să aibă și rădăcini complexe.

In cele ce urmează vom presupune că P(x) are și rădăcini complexe și anume vom trata cazul cînd acest polinom are gradul 3 sau 4, completînd astfel analiza acestor cazuri.

Intîi va trebui să vedem ce se întîmplă cu teoremele din primele paragrafe. Condiția necesară N se va păstra, deci rădăcina cea mai mică în modul trebuie să fie pozitivă (aceasta exclude cazul cînd P(x) este de gradul 2 și are două rădăcini complexe). Teorema de la 2 nu mai este valabilă, prin urmare nici teoremele următoare ei, aceasta înseamnă că nu vom putea arăta că pozitivitatea primilor k coeficienți din (1) reprezintă condițiile necesare și suficiente pentru pozitivitatea tuturor coeficienților seriei, după cum se va vedea mai jos. Figurînd în plan rădăcinile polinomului P(x), vom putea însă să dăm o delimitare a domeniului în care se pot găsi acestea, cea mai mică în modul fiind considerată fixă.

7. Să presupunem că $P(x)$ este de gradul 3 și că are două rădăcini complexe $\frac{1}{\beta}$ și $\frac{1}{\bar\beta}$, deci $P(x)=(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\bar\beta x)$, α pozitiv și $\alpha\geqq|\beta|$ (condiția N). Avem

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\bar\beta x)}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots$$

$$=1+(\alpha+\beta+\bar\beta)x+\cdots+[\alpha^n+\alpha^{n-1}(\beta+\bar\beta)+\cdots+(\beta^n+\beta^{n-1}\bar\beta+\cdots+\bar\beta^n)]x^n+\cdots$$

Insă punînd $\beta=\rho e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<\pi$, avem

$$\beta_n+\beta^{n-1}\bar\beta+\cdots+\bar\beta^n=\frac{\beta^{n+1}-\bar\beta^{n+1}}{\beta-\bar\beta}=\rho^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

deci

$$p_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\rho\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}+\alpha^{n-2}\rho^2\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\cdots+\rho^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Pentru a da acestui coeficient o formă mai strînsă, utilizăm o metodă clasică pentru calculul sumelor trigonometrice (1), (10). Notăm

$$p^n\frac{\sin\theta}{\rho^n}=I=A^n\sin\theta+A^{n-1}\sin\theta+\cdots+\sin(n+1)\theta, \qquad A=\frac{\alpha}{\rho}\geqslant 1$$

$$R=A^n\cos\theta+A^{n-1}\cos 2\theta+\cdots+\cos(n+1)$$

Avem atunci

$$R+iI=\frac{\cos(n+1)\theta-A\cos(n+2)\theta-A^{n+1}+A^{n+2}\cos\theta+i[\sin(n+1)\theta-A\sin(n+2)\theta+A^{n+2}\sin\theta]}{(\cos\theta-A)^2+\sin^2\theta}$$

de unde

$$p_n\frac{\sin\theta}{\rho^n}=I=\frac{A^{n+2}\sin\theta-A\sin(n+2)\theta+\sin(n+1)\theta}{(\cos\theta-A)^2+\sin^2\theta}; \quad n=1, 2, \ldots \quad (9)$$

Coeficienții p_n sînt nenegativi dacă

$$f(A)=A^{n+2}\sin\theta-A\sin(n+2)\theta+\sin(n+1)\theta\geqslant 0. \quad (10)$$

Ținînd seama că $A\geq 1$, vom arăta că ecuația $f(A)=0$ are cel mult o rădăcină mai mare decît unu. Pentru aceasta formăm ecuația derivată

$$f'(A)=(n+2)A^{n+1}\sin\theta-\sin(n+2)\theta=0, \quad (11)$$

care are rădăcinile

$$A=\sqrt[n+1]{\frac{\sin(n+2)\theta}{(n+2)\sin\theta}},$$

dintre care cel mult una este pozitivă. Să arătăm că aceasta, dacă există, este mai mică decît unitatea, deci că avem

$$\Phi(\theta)=(n+2)\sin\theta-\sin(n+2)\theta>0\,. \qquad (12)$$

Observînd că $\Phi(o)=\Phi(\pi)=0$, urmează să mai arătăm că extremele funcției continuie $\Phi(\theta)$ sînt pozitive pentru $o<\theta<\pi$. Avem

$$\Phi'(\theta)=(n+2)[\cos\theta-\cos(n+2)\theta]=2(n+2)\sin\frac{n+3}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta=0$$

cu rădăcinile

$$\theta=\frac{2k\pi}{n+3},\quad \theta=\frac{2k\pi}{n+1},\ k \text{ întreg}$$

Dar

$$\Phi\left(\frac{2k\pi}{n+3}\right)=(n+2)\sin\frac{2k\pi}{n+3}-\sin(n+2)\frac{2k\pi}{n+3}=(n+3)\sin\frac{2k\pi}{n+3}>0,\ \text{căci } 0<\frac{2k\pi}{n+3}<\pi,$$

$$\Phi\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)=(n+1)\sin\frac{2k\pi}{n+1}>0,\ \text{căci}\ 0<\frac{2k\pi}{n+1}<\pi,$$

și proprietatea este demonstrată.

Ecuația (11) avînd cel mult o rădăcină pozitivă (mai mică decît unitatea), ecuația $f(A)=0$ are cel mult o rădăcină mai mare sau egală cu unitatea și pentru orice A, mai mare decît această rădăcină, avem $f(A)>0$, deci și $p_n>0$. Se observă însă că rădăcina pozitivă a ecuației $f(A)=0$ depinde de ρ și θ, modulul și argumentul inversei rădăcini complexe β a lui $P(x)$, presupunînd că α este dat, prin urmare limitarea găsită mai sus este numai pentru un n anumit, nu pentru toți coeficienții p.

Să figurăm grafic numerele α, $\beta=\rho e^{i\theta}$, $\bar\beta=\rho e^{-i\theta}$. Să ducem cercul C cu centrul în origine și raza α. Condiția N ne spune că β și $\bar\beta$ trebuie să se găsească în interiorul acestui cerc. Din cele de mai sus deducem că dacă luăm un arc θ fix, pentru ca $p_n>0$, numărul complex β poate lua orice valoare pe raza definită de θ, de la origine pînă la valoare ρ_0, care corespunde singurei rădăcini supraunitare a ecuației $f(A)=0$. Am văzut însă mai sus că s-ar putea ca să nu existe o asemenea rădăcină. În acest caz β poate parcurge întreaga rază de la origine pînă la cercul C.

Prima întrebare ce ne-o punem este care sînt unghiurile pentru care avem $p_n\geq 0$, $n=1, 2,\ldots$, oricare ar fi $o\leq\rho\leq\alpha$. In baza observațiilor precedente, este suficient pentru aceasta de a găsi arcele θ pentru care $p_n\geq 0$, cînd $\rho_0=\alpha$, deci

$$f(1)=\sin\theta-\sin(n+2)\theta+\sin(n+1)\theta=4\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n+2}{2}\theta\geq 0 \qquad (13)$$

Această neegalitate este îndeplinită, dacă θ este astfel ales încît sinusurile a doi multiplii consecutivi ai lui $\frac{\theta}{2}$ să fie de același semn, unul putînd fi și nul. Aceasta înseamnă că acești multiplii trebuie să conțină arcele $k\pi$,

k întreg, de unde rezultă $\theta=\frac{2\pi}{q}$, q întreg, adică θ trebuie să fie valoarea principală a argumentului rădăcinii de ordinul q a unității. In adevăr, pentru λ întreg, din $\lambda\frac{\theta}{2}=\frac{\lambda\pi}{q}$ se obțin multiplii lui $k\pi$ numai dacă λ este un multiplu al lui q. Pentru aceste valori ale lui θ avem $f(1)\geq 0$, semnul de egalitate avînd loc atunci cînd $n+1$ sau $n+2$ este un multiplu de q. Pentru orice altă valoare a lui θ, ρ nu poate lua toate valorile dintre zero și α.

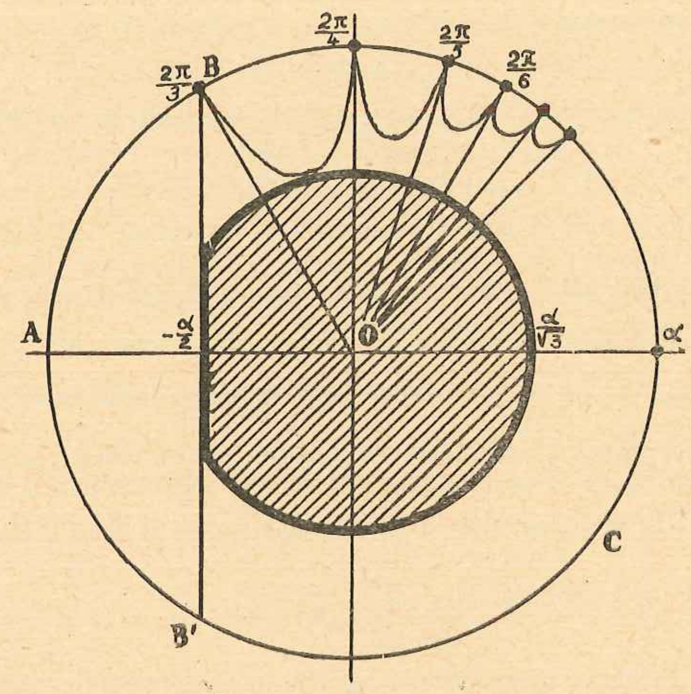

Fig. 1.

Punctele de pe cercul C, corespunzătoare arcelor $\theta=\frac{2\pi}{q}$, precum și cele corespunzătoare multiplilor acestor arce, au rol important în delimitarea domeniului interior cercului C în care poate fi situat β, pentru ca $p_n\geq 0$. In adevăr, condiția $p_1\geq 0$ elimină sectorul din cercul C situat la stînga dreptei BB', unde B corespunde lui $\theta=\frac{2\pi}{3}$, iar B' este simetricul său față de axa reală. Condiția $p_2\geq 0$ elimină din cercul C porțiunea mărginită de cerc și arcul de iperbolă ce trece prin punctele de pe C determinate de arcele $\frac{2\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{4}$. Condiția $p_3\geq 0$ elimină două porțiuni din interiorul cercului C, delimitate de două curbe, prima trecînd prin punctele de pe C pentru care avem $\theta=\frac{2\pi}{4}$ și $\theta=\frac{2\pi}{5}$ iar a două pentru care $\theta=\frac{4\pi}{4}$ și $\theta=\frac{4\pi}{5}$ ș. a. m. d. In definitiv condițiile succesive $p_n \geqq 0$, dau naștere la un domeniu stelat, interior lui C, care este însă complicat. De aceea vom da o delimitate a acestui domeniu și anume vom arăta că avem $p_n \geqq 0$, pentru orice n, în interiorul hașurat al cercului Γ, cu raza $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$.

Pentru aceasta să arătăm că $p_n \geqq 0$, dacă $A > \sqrt{3}, n = 2, 3, \ldots$, Ținînd seama de inegalitatea (12), avem

$$f(A) \geqq [A^{n+2} - (n+2)A - n - 1] \sin\theta \, .$$

Polinomul din paranteză are o singură rădăcină pozitivă, mai mare decît $\sqrt{3}$, căci

$$(\sqrt{3})^{n+2} - (n+2)\sqrt{3} - n - 1 > 0 \, , \quad n=3, 4, \ldots$$

deoarece primul termen este o exponențială, iar ceilalți doi formează un polinom de gradul 1 în n și avem pentru $n=3$, $9\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 4 > 0$, deci egalitatea de mai sus se menține pentru orice $n \geqq 3$. Mai trebuie să arătăm că și $p_2 \geqq 0$ pentru $A > \sqrt{3}$. Dar avem

$$\frac{p_2}{\rho^2} = A^2 + 2A\cos\theta + 4\cos^2\theta - 1 = 4\cos^2\theta + 2A\cos\theta + A^2 - 1$$

însă trinomul în $\cos\theta$, are rădăcini complexe, pentru $A > \sqrt{3}$, prin urmare $p_2 > 0$. Ținînd seama și de $p_1 \geqq 0$, rezultă că toți coeficienții p sînt nenegativi dacă β (ca și $\bar{\beta}$) se află în interiorul hașurat al lui Γ, cu raza $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ (căci din $A = \frac{\alpha}{\rho} > \sqrt{3}$ rezultă $\rho < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$).

8. Ca o aplicație a rezultatelor de mai sus, să rezolvăm problema Nr. 4698 din „Gazeta Matematică", vol. 41 (1935), propusă de prof. T. Popoviciu. Problema este următoarea:

„Se dă șirul de numere reale $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ verificînd relația de recurență

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} \tag{14}$$

„Se consideră într-un plan raportat la două axe dreptunghiulare Ox, Oy, punctele $P_0(u_0, u_1), P_1(u_1, u_2), \ldots, P_n(u_n, u_{n+1}), \ldots$

„Să se determine p și q astfel ca linia poligonală $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ să fie convexă.

Pentru ca linia poligonală $P_0, P_1, \ldots P_n, \ldots$ să fie convexă, trebuie ca toate triunghiurile P_n, P_{n+1}, P_{n+2} să fie la fel orientate și de asemenea la fel orientate trebuie să fie triunghiurile $P_{n-1}\,P_n\,P_0$ și $P_n\,P_0\,P_1$. In primul caz trebuie ca toți determinanții

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & 1 \\ u_{n+1} & u_{n+2} & 1 \\ u_{n+2} & u_{n+3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

să fie de același semn. Înmulțind primele două linii respcetiv cu $-q$ și $-p$ și adunîndu-le la ultima, avem în baza relației (14)

$$\Delta = (1-p-q) \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{vmatrix}.$$

Integrala relației de recurență (14) este

$$u_n = C_1\,\alpha_1^n + C_2\,\alpha_2^n$$

C_1, C_2 fiind două constante arbitrare, ce se determină cu ajutorul condițiilor inițiale, iar α_1, α_2 rădăcinile ecuației caracteristice

$$\alpha^2 - p\,\alpha - q = 0.$$

Așa fiind avem

$$\Delta = (1-p-q)\,C_1C_2\,(\alpha_1-\alpha_2)^2\alpha_1^n\,\alpha_2^n = (1-p-q)\,C_1C_2\,(p^2+4q)\,(-q)^n \, ,$$

de unde se vede imediat, că pentru ca $\triangle$ să aibă un semn constant, trebuie ca $q < 0$.

Să scriem dublul suprafeței triunghiului $P_{n-1}P_n\,P_0$. Avem

$$\delta = \begin{vmatrix} u_{n-1} & u_n & 1 \\ u_n & u_{n+1} & 1 \\ u_0 & u_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1\,\alpha_1^{n-1} + C_2\,\alpha_2^{n-1} & C_1\,\alpha_1^n + C_2\,\alpha_2^n & 1 \\ C_1\,\alpha_1^n + C_2\,\alpha_2^n & C_1\,\alpha_1^n + C_2\,\alpha_2^{n-1} & 1 \\ C_1 + C_2 & C_1\,\alpha_1 + C_2\,\alpha_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= C_1C_2(\alpha_2-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & 1 \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & 1 \end{vmatrix}.$$

Insă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & 1 \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & 1 \end{vmatrix} = V(\alpha_1, \alpha_2, 1)\,(\alpha_1\alpha_2)^{n-2}\,B_{n-2}$$

unde $V(a, b, \ldots, l)$ este determinantul Vandermonde al numerelor $a, b, \ldots, l$ și B_{n-2} este coeficientul lui x^{n-2} din dezvoltarea în serie întreagă

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)(1-x)} = 1 + B_1x + \cdots + B_nx^n + \cdots \, ; \quad a_1 = \frac{1}{\alpha_1} \, , \quad a_2 = \frac{1}{\alpha_2} \cdot$$

Cum $V(\alpha_1, \alpha_2, 1) = (\alpha_2 - \alpha_1)(1 - p - q)$ avem

$$\delta = C_1\,C_2(p^2+4q)\,(1-p-q)\,(-q)^{n-2}\,B_{n-2} \, .$$

Să scriem dublul suprafeței triunghiului $P_n\,P_0\,P_1$. Avem

$$\delta_1 = C_1C_2(\alpha_2-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & 1 \end{vmatrix} = C_1C_2(\alpha_2-\alpha_1)^2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\,A_{n-2}$$

unde A_{n-2} este coeficientul lui x^{n-2} din dezvoltarea în serie întreagă

$$\frac{1}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-x)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

deci

$$\delta_1 = C_1C_2(p^2+4q)(1-p-q)\,A_{n-2}$$

In rezumat, pentru ca linia poligonală $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ să fie convexă, trebuie ca $\triangle$, δ și δ_1 să fie de același semn, ori care ar fi n, deci trebuie ca să avem simultan

$$q < 0\,, \qquad B_{n-2} \geqslant 0\,, \qquad A_{n-2} \geqslant 0\,.$$

Să analizăm posibilitatea de realizare simultană a acestor condiții, examinînd diferitele posibilități pentru rădăcinile α_1, α_2 ale ecuației caracteristice.

α_1, α_2 *imaginar conjugate*. In acest caz $\alpha_1\,\alpha_2 > 0$ și $q < 0$. Pentru ca A_{n-2} și B_{n-2} să fie simultan nenegativi, trebuie ca pe de o parte $|\alpha_1| = 1$ (Condiția N aplicată ambelor dezvoltări în serie cu coeficienții A și B), iar pe de altă parte, în baza celor spuse în paragraful precedent, trebuie ca argumentului α să fie de forma $\frac{2\pi}{s}$, întreg, deci

$$\alpha_1 = e^{\frac{2\pi l}{s}}, \qquad \alpha_2 = e^{-\frac{2\pi l}{s}}$$

Rezultă atunci $p = 2\cos\frac{2\pi}{s}$, $q = -1$.

α_1, α_2 *reale și de semne contrare*. Acest caz se exclude, căci $q > 0$ și $\triangle$ nu au un semn constant.

α_1, α_2 *negative și diferite*. Și acest caz trebuie îndepărtat, căci pentru ca $A_{n-2} \geqq 0$ și $B_{n-2} \geqq 0$ ar trebui să avem simultan, în baza condiției N, aplicată ambelor dezvoltări $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ precum și $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$.

α_1, α_2 *pozitive și diferite*. In baza celor de la 4_2, avem $A_{n-2} > 0$ și $B_{n-2} > 0$, iar $q = -\alpha_1\,\alpha_2 < 0$, deci linia poligonală este convexă.

Prin urmare, dacă $\alpha_1 \neq \alpha_2$ linia poligonală este convexă, dacă relația de recurență (14) are una din formele

$$u_n = 2\cos\frac{2\pi}{s}\,u_{n-1} - u_{n-2}\,, \qquad s \text{ intreg}$$

$$u_n = p u_{n-1} + q v_{n-2}\,, \qquad q < 0,\ p > 0 \text{ și } p^2 + 4q > 0.$$

Cazul $\alpha_1 = \alpha_2$ rezultă de mai sus printr-o trecere la limită.

9. In cele ce urmează ne vom ocupa de cazul cînd $P(x)$ este de gradul 4 și are două rădăcini complexe. Condiția N cere ca una din rădăcinile pozitive (în cazul cînd sînt două) să fie cea mai mică în modul.

Fără a restrînge generalitatea vom presupune că această rădăcină este egală cu 1, ceea ce revine la amplificarea tuturor rădăcinilor lui $P(x)$ cu un factor constant, fapt ce nu modifică semnul coeficienților dezvoltării (1). Vom trata întîi cîteva cazuri particulare, în care se poate preciza mai bine domeniul în care pot fi situate rădăcinile polinomului $P(x)$ pentru ca toți coeficienții dezvoltării (1) să fie pozitivi.

9_1. Toate rădăcinile lui $P(x)$ au modulul 1, cele reale fiind egale cu ± 1, deci

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-2x\cos\theta+x^2)} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \cdots$$

Din (13) avem

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x\cos\theta+x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{n+2}{2}\theta \sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\theta \sin\frac{\theta}{2}}\, x^n$$

prin urmare

$$p_{2n+1}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{2n+3}{2}\theta\sin\frac{2n+2}{2}\theta - \sin\frac{2n+2}{2}\theta\sin\frac{2n+1}{2}\theta +$$
$$+ \sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{2n}{2}\theta - \sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{2n+1}{2}\theta +$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$+ \sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{2\theta}{2} - \sin\frac{2\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

și adunînd pe linii

$$p_{2n+1}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\Big[\sin\frac{2n+2}{2}\theta\cos\frac{2n+2}{2}\theta + \sin\frac{2n}{2}\theta\cos\frac{2n}{2}\theta + \cdots$$
$$+ \sin\frac{2\theta}{2}\cos\frac{2\theta}{2}\Big]$$

de unde

$$p_{2n+1}\sin\theta = \sin 2(n+1)\theta + \sin 2n\theta + \cdots + \sin 2\theta$$

și aplicînd o formulă cunoscută, avem

$$p_{2n+1} = \frac{\sin(n+1)\theta \sin(n+2)\theta}{\sin^2\theta}$$

Coeficienții de rang par se calculează ușor observînd că avem

$$p_{2n} = \frac{\sin\frac{2n+2}{2}\theta\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}} - p_{2n-1} = \frac{\sin n\theta}{\sin^2\theta}\left[2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin(n-1)\theta\right]$$

deci

$$p_{2n}=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}$$

adică ei sînt totdeauna pozitivi, fiind patrate perfecte.

In ce privește coeficienții de rang impar, ținînd seama de formula găsită și raționînd ca la 7, rezultă că ei sînt pozitivi numai dacă $\theta=\frac{\pi}{s}$, s întreg, deci dacă θ este valoarea principală a argumentului rădăcinii de ordinul $2s$ a unității. Pentru orice altă valoare a lui θ, se poate determina un n așa ca $p_{2n+1}<0$. In adevăr pentru un k suficient de mare putem găsi un n în așa fel ca $(n+1)\theta<k\pi<(n+2)\theta$. Valoarea corespunzătoare a lui n este

$$\frac{k\pi}{\theta}-2<n<\frac{k\pi}{\theta}-1$$

De ex.: dacă $\theta=1$ radian, putem lua $\pi-2<n<\pi-1$ de unde rezultă că $n=2$, deci $p_5<0$, după cum se poate verifica ușor.

9_2. Toate rădăcinile lui $P(x)$ au modulul 1, rădăcinile reale fiind confundate și egale cu $+1$, deci

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x\cos\theta+x^2)}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots$$

Procedînd absolut analog ca în cazul precedent, găsim

$$p_{2n+1}=\frac{\sin^2\frac{2n+2}{2}\theta+\sin^2\frac{2n}{2}\theta+\cdots+\sin^2\frac{2\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$p_{2n}=\frac{\sin^2\frac{2n+1}{2}\theta+\sin^2\frac{2n-1}{2}\theta+\cdots+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

de unde rezultă, că ori care ar fi n, coeficienții dezvoltării sînt pozitivi.

In următoarele două cazuri, vom păstra rădăcinile reale ca mai sus, însă vom considera modulul rădăcinilor complexe mai mare decît unitatea.

9_3. Fie

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-2x\cos\theta+\rho^2x^2)}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots;\ \rho\leq 1$$

coeficienții acestei dezvoltări se obțin făcînd produsul dezvoltărilor

$$\frac{1}{(1-x)(1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{n+2}\sin(n+1)\theta-\rho^{n+1}\sin(n+2)\theta+\sin\theta}{(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)\sin\theta}x_n$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$$

Avem

$$\begin{aligned}p_{2n+1}(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)\sin\theta&=\rho^{2n+3}\sin(2n+2)\theta-\rho^{2n+2}\sin(2n+3)\theta+\sin\theta-\\&-\rho^{2n+2}\sin(2n+1)\theta+\rho^{2n+1}\sin(2n+2)\theta-\sin\theta+\rho^{2n+1}\sin 2n\theta-\\&-\rho^{2n}\sin(2n+1)\theta+\sin\theta-\rho^{2n}\sin(2n-1)\theta+p^{2n-1}\sin 2n\theta-\sin\theta+\\&\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\&+\rho^3\sin 2\theta-\rho^2\sin 3\theta+\sin\theta-\rho^2\sin\theta+\rho\sin 2\theta-\sin\theta\\&=(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)[\rho^{2n+1}\sin(2n+2)\theta+\rho^{2n-1}\sin 2n\theta+\cdots+\rho\sin 2\theta]\end{aligned}$$

deci

$$p_{2n+1}\frac{\sin\theta}{\rho}=\rho^{2n}\sin(2n+2)\theta+\rho^{2n-2}\sin 2n\theta+\cdots+\rho^2\sin 4\theta+\sin 2\theta$$

Procedînd analog ca la 7 (ρ trebuie înlocuit cu ρ^2, θ cu 2θ și $\alpha=1$), avem

$$p_{2n+1}\sin\theta=\rho\frac{\rho^{2n+4}\sin(2n+2)\theta-\rho^{2n-2}\sin(2n+4)\theta+\sin 2\theta}{\rho^4-2\rho^2\cos 2\theta+1}$$

Prin același procedeu, se calculează coeficienții de rang par și avem

$$p_{2n}\sin\theta=\frac{\rho^{2n+4}\sin(2n+4)\theta-\rho^{2n+2}\sin(2n+3)\theta+\rho^2\sin\theta+\sin\theta}{\rho^4-2\rho^2\cos 2\theta+1}$$

Expresia lui p_{2n+1} este analoagă cu cea a lui p_n de la 7, deci rezultatele găsite acolo pentru toți coeficienții se transpun direct aici pentru coeficienții de rang impar. Și anume $p_{2n+1}\geq 0$ dacă $\rho\leq\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ și din $p_1=2\rho\cos\theta$ rezultă $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Incepînd cu p_3 acele condiții asigură pozitivitatea coeficienților de rang impar. De asemenea dacă pentru o valoare ρ_0 a lui ρ, un coeficient este pozitiv, el este pozitiv pentru orice $\rho\leqq\rho_0$ (θ fix). Ori noi am văzut la 9_1 că există valori ale lui θ pentru care $\rho_0=1$, deci pentru care ρ poate lua orice valoare între 0 și 1.

Să arătăm că dacă $\rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$, coeficienții de rang par sînt pozitivi. Din formula de mai sus observăm că p_{2n} este pozitiv, dacă numărătorul fracției din membrul doi este pozitiv. Impărțind egalitatea cu ρ^{2n+4} și punînd $B=\frac{1}{\rho^2}$, $B\geq 1$, semnul lui p_{2n} este dat de expresia

$$\Phi=B^{n+2}\sin\theta+B^{n+1}\sin\theta-B\sin(2n+3)\theta-\sin(2n+1)\theta$$

și ținînd seama de neegalitatea $m \sin\theta - \sin m\theta > 0$, avem

$$\phi > \sin\theta\,[B^{n+2} + B^{n+1} - (2n+3)B - (2n+1)].$$

Polinomul din partea a doua, are o singură rădăcină pozitivă mai mică decît 3, căci avem

$$3^{n+2}+3^{n+1}-3(2n+3)-2n-1=4\cdot 3^{n+1}-8n-10>0, \text{ pentru } n=0,1,2,\dots,$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră de mai sus.

In concluzie, coeficienții p sînt siguri pozitivi, dacă $\rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ deci dacă inversele rădăcinilor complexe ale polinomului de gradul 4 (cu rădăcinile reale ± 1) se găsesc în semicercul hașurat din fig. 2, cu centrul în origine și raza $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

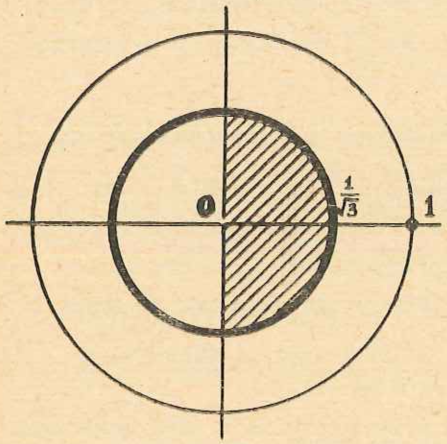

Fig. 2.

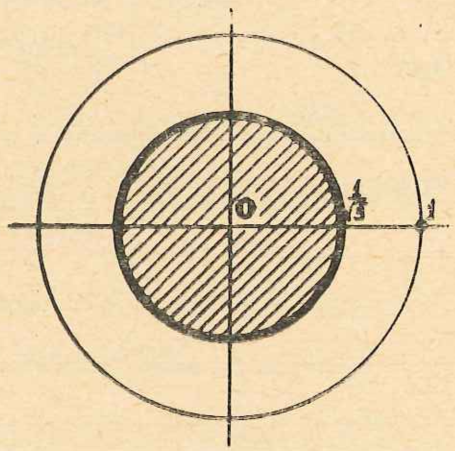

Fig. 3.

9_4. Fie

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2)} = 1+p_1x+p_2x^2+\dots+p_nx^n+\dots;\quad \rho\leq 1.$$

Făcînd produsul dezvoltărilor

$$\frac{1}{(1-x)(1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2)} = 1+b_1x+\dots+b_nx^n+\dots \text{ și } \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obținem

$$p_n = b_n + b_{n-1}+\dots+b_1+1.$$

Dar am văzut (7) că $b_n>0$, dacă $\rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$ pentru $n=2,3,\dots$ Cum

$$b_1+1 = 1+2\rho\cos\theta+1>0, \text{ pentru } \rho<1$$

rezultă că $p_n>0$ pentru $\rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci că inversele rădăcinilor complexe trebuie să fie situate în cercul cu centru în origine și raza $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vom trece acum la cazul general. Vom presupune și pe mai departe că rădăcina lui $P(x)$ cu cel mai mic modul este tot unu și vom deosebi două cazuri după cum a doua rădăcină reală este pozitivă sau negativă.

9_5. A doua rădăcină reală este pozitivă. Fie

$$\frac{1}{(1-x)(1-\alpha x)(1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2)} = 1+p_1x+p_2x^2+\dots+p_nx^n+\dots;$$

$$0\leq\alpha<1,\ \rho\leq 1.$$

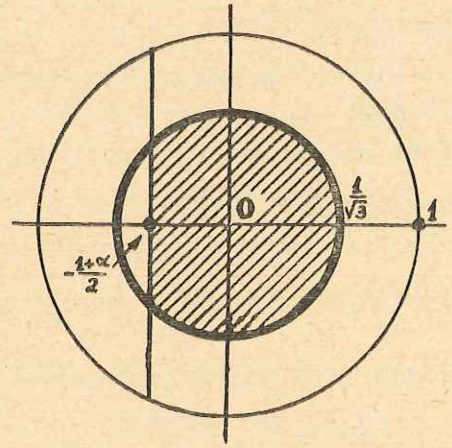

Fig. 4.

Cu aceleași notații ca și în cazul precedent, avem

$$p_n = b_n+\alpha b_{n-1}+\dots+\alpha^{n-1}b_1+\alpha^n.$$

Dacă $b_n\geq 0$, $n=1,2,\dots$ este evident că și $p_n\geq 0$. De exemplu dacă $\rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b_n>0$ pentru $n=2,3,\dots$, ca $p_1 = 1+2\rho\cos\theta+\alpha\geq 0$, trebuie să avem $\rho\,|\cos\theta|\leq\frac{1+\alpha}{2}$. Dacă este așa, atunci $p_2=b_2+\alpha b_1+\alpha^2=b_2+\alpha(b_1+\alpha)>0$, ș. a. m. d. Prin urmare, inversele rădăcinilor complexe ale lui $P(x)$ trebuie să se afle în domeniul hașurat (Fig. 4) format de cercul cu centrul în origine și raza $\frac{1}{\sqrt{3}}$ din care se exceptează un segment circular numai dacă $\frac{1+\alpha}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci dacă $\alpha<\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Făcînd $\alpha=1$ ajungem la cazul 9_4.

9$_6$. A doua rădăcină reală este negativă. Fie

$$\frac{1}{(1-x)(1+\alpha x)(1-2\rho\alpha\cos\theta+\rho^2x^2)}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots;$$
$$0\leqslant\alpha<1,\ \rho\leqslant 1.$$

Procedînd la fel ca la **9**$_3$, avem

$$p_{2n+1}(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)\sin\theta=\rho^{2n+3}\sin(2n+2)\theta-\rho^{2n+2}\sin(2n+3)\theta+\sin\theta-$$
$$-\alpha[\rho^{2n+2}\sin(2n+1)\theta-\rho^{2n+1}\sin(2n+2)\theta+\sin\theta]+$$
$$\alpha^2[\rho^{2n+1}\sin 2n\theta-\rho^{2n}\sin(2n+1)\theta+\sin\theta]-\alpha^3[\rho^{2n}\sin(2n-1)\theta-\rho^{2n-1}\sin 2n\theta+\sin\theta]+$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$+\alpha^{2n}[\rho^3\sin 2\theta-\rho^2\sin 3\theta+\sin\alpha]-\alpha^{2n+1}[\rho^2\sin\theta-\rho\sin 2\theta+\sin\alpha].$$

Făcînd o însumare convenabilă avem

$$p_{2n+1}[\rho^2-2\rho\cos\theta+1]=(\rho^3-\rho^2-\alpha\rho^2+\alpha\rho)[\rho^{2n}\sin(2n+2)\theta+\alpha^2\rho^{2n-2}\sin 2n\theta+$$
$$+\cdots+\alpha^{2n}\sin 2\theta]+(1-\alpha+\alpha^2-\cdots+\alpha^{2n}-\alpha^{2n+1})\sin\theta.$$

Suma trigonometrică de mai sus se calculează la fel ca la 7 și găsim

$$p_{2n+1}(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)(\rho^4-2\rho^2\alpha^2\cos 2\theta+\alpha^4)\sin\theta=\rho^{2n+7}\sin(2n+2)\theta-$$
$$-\rho^{2n+6}[\sin(2n+3)\theta+\alpha\sin(2n+1)\theta]+\rho^{2n+5}[\alpha\sin(2n+2)\theta-\alpha^3\sin(2n+4)\theta]+$$
$$+\rho^{2n+4}[\alpha^2\sin(2n+5)\theta+\alpha^3\sin(2n+3)\theta]-\alpha^3\rho^{2n+3}\sin(2n+4)\theta+\frac{1-\alpha^{2n+4}}{1+\alpha}\rho^4\sin\theta+$$
$$+\alpha^{2n+4}\rho^3\sin 2\theta-\theta^2\rho^2\sin\theta[\alpha^{2n+2}(\sin 3\theta+\alpha\sin\theta)+2\frac{1-\alpha^{2n+2}}{1+\alpha}\sin\theta\cos 2\theta]+$$
$$+\rho\alpha^{2n+5}\sin 2\theta+\frac{1-\alpha^{2n+2}}{1+\alpha}\alpha^4\sin\theta.$$

Pentru coeficienții de rang par, se procedează absolut analog

$$p_{2n}(\rho^2-2\rho\cos\theta+1)(\rho^4-2\rho^2\alpha^2\cos 2\theta-\alpha^4)\sin\theta=\rho^{2n+6}\sin(2n+1)\theta-$$
$$-\rho^{2n+5}[\sin(2n+2)\theta+\alpha\sin 2n\theta]+\rho^{2n+4}[\alpha\sin(2n+1)\theta-\alpha^3\sin(2n+3)\theta]+$$
$$+\rho^{2n+3}[\alpha^2\sin(2n+4)\theta+\alpha^3\sin(2n+2)\theta]-\alpha^3\rho^{2n}\sin(2n+3)\theta+\frac{1+\alpha^{2n+3}}{1+\alpha}\rho^4\sin\theta+$$
$$-\alpha^{2n+3}\rho^3\sin 2\theta+\rho^2\left[\alpha^{2n+3}(\sin 3\theta+\alpha\sin\theta)-2\frac{1+\alpha^{2n+1}}{1+\alpha}\alpha^2\sin\theta\cos 2\theta\right]+$$
$$-\alpha^{2n+4}\rho\sin 2\theta+\frac{1+\alpha^{2n+1}}{1+\theta}\alpha^4\sin\theta.$$

Se vede că formulele de mai sus sînt complicate și un studiu al pozitivității cieficienților, așa cum s-a făcut mai sus, este foarte dificil. Existența unui domeniu în jurul originei, în care toți coeficienții p să fie pozitivi, se arată ușor, deoarece pentru $\rho=0$, coeficienții p sînt pozitivi și ei sînt funcții continuie de ρ.

III.

In cele ce urmează ne vom ocupa de o proprietate a secțiunilor seriilor întregi considerate pînă acuma. Și anume, fiind dată seria întreagă

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_mx)}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots\quad(15)$$

numim *secțiune de rangul n*, polinomul

$$S_n(x)=1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n.$$

L a g u e r r e (6) a arătat că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt pozitivi, $S_n(x)=0$ *are o singură rădăcină reală și numai atunci cînd* n *este impar*. Ulterior proprietatea a fost generalizată în diverse moduri (4), (8), (9), (11), (13). Urmînd metoda lui L a g u e r r e, vom demonstra teorema de mai sus, pentru cazul cînd $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt reali, iar apoi vom enunța rezultatele și pentru cazul cînd aceste numere sînt complexe.

10. Să presupunem deci că $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt reali. Din (15) avem

$$1\equiv(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_mx)S_n(x)+(1-a_1x)\cdots(1-a_mx)x^{n+1}[p_{n+1}+$$
$$+p_{n+2}x+\cdots].$$

In partea a doua a acestei identități, în ultimul termen, coeficienții lui x^r, $r>n+m$, trebuie să fie toți nuli, deoarece prima parte a identității este o constantă, iar $(1-a_1x)\ldots(1-a_mx)S_n(x)$ este un polinom de gradul $n+m$. Rezultă deci

$$1-p_{n+1}x^{n+1}+\alpha_2x^{n+2}+\cdots+\alpha_mx^{n+m}\equiv(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_mx)S_n(x),\quad(16)$$

coeficienții $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ putîndu-se calcula ușor.

Dacă n *este par* ecuația binomă

$$1-p_{n+2}x^{n+1}=0\qquad(17)$$

are o singură rădăcină reală și n rădăcini complexe. In baza unei consecințe a teoremei lui D e s c a r t e s, ecuația

$$1-p_{n+1}x^{n+1}+\alpha_2x^{n+2}+\cdots+\alpha_mx^{n+m}=0\qquad(18)$$

are cel puțin n rădăcini complexe și din (16) rezultă imediat că $S_n(x)=0$ are exact n rădăcini complexe.

Dacă n *este impar*, trebuie să deosebim două cazuri.

$p_{n+1}>0$ ecuația (17) are două rădăcini reale și $n-1$ rădăcini complexe. Ecuația (18) are cel puțin $n-1$ rădăcini complexe și din (16) rezultă că $S_n(x)=0$, care este de grad impar, are exact $n-1$ rădăcini complexe, deci o singură rădăcină reală.

$p_{n+1}<0$, Făcind un raționament analog ca mai sus se ajunge la o imposibilitate, de unde rezultă teorema demonstrată în paragraful **2**, *în dezvoltarea în serie întreagă* (15), *coeficienții* p_{2k} *sînt pozitivi, dacă numerele* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *sînt reale*.

A mai rămas să considerăm cazul $p_{n+1} = 0$. Ecuația (18) devine

$$1 - p_{n+2}\, x^{n+2} + \beta_3 x^{n+3} + \cdots + \beta_m\, x^{n+m} = 0$$

Să arătăm că p_{n+1} este nul numai dacă n este par. Raționînd ca mai sus, găsim

n par $\quad p_{n+2} > 0$, $S_n(x) = 0$ are n rădăcini complexe.

„ „ $\quad p_{n+2} < 0$, Imposibilitate, căci $p_{2k} > 0$.

n impar $\quad p_{n+2} > 0$, $S_n(x) = 0$ are $n-1$ rădăcini complexe, imposibilitate.

„ „ $\quad p_{n+2} < 0$, Idem.

Prin urmare, în dezvoltarea (15), numai coeficienții de rang impar pot fi nuli. Avem atunci teorema

Dacă în (1) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *sînt reali, secțiunile de rang par au toate rădăcinile complexe, iar cele de rang impar au o singură rădăcină reală. Coeficienții de rang par sînt pozitivi, iar cei de rang impar pot fi pozitivi, nuli sau negativi.*

11. Dacă în (15) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt numere reale sau complex conjugate, cele complexe fiind în număr de $2s$, raționamente analoage cu cele de mai sus ne conduc la următoarea generalizare a teoremei precedente:

Secțiunile seriei (15) *au cel mult* $2s$, *respectiv* $2s+1$ *rădăcini reale, după cum secțiunea este de rang par sau impar.* De asemenea analizînd posibilitățile de a exista în seria (15) coeficienți consecutivi nuli, se ajunge la concluzia că *pot exista cel mult* $2s+1$ *coeficienți consecutivi nuli.*

(Lucrare intrată la data de 7 iulie 1950)

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluță Th., *Curs de algebră superioară,* 1943, Editura Universității din Cluj.
2. Angheluță Th., *Funcții Analitice,* 1940, Editura Univ. din Cluj.
3. Buniakowski V., *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.* Mémoires de l'Académie de St. Petersburg, 1859, VII, Nr. 9.
4. Ghermănescu M., *Sur un problème de Laguerre,* C. R. Paris, 1937, 204.
5. Hardy-Littlewood-Polya, *Inequalities,* Cambridge, 1934.
6. Laguerre, *Oeuvres,* Gauthier-Villars, Paris, 1898, t. I. p. 110.
7. Lévy P., *Sur l'exponentielle des polynomes et l'Arithmétique de loi de Poisson.* An. de l'Ec. Normale Sup. Paris, 1937, t. 54., p. 77.
8. Obrechkoff N., *Sur une théorème de Laguerre.* C. R. Paris, 1936, t. 203. p. 760.
9. Obrechkoff N., *Sur les zéros de quelques classes de polinômes,* C. R. Paris, 1937, t. 204, 205.
10. Polya-Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Berlin, 1925.
11. Popoviciu T., *Sur un théorème de Laguerre.* Bul. Soc. Științe Cluj, 1934, t. 8.
12. Schwarz H. A., *Werke,* t. II., Berlin, 1890.
13. Tchakaloff L., *Sur un problème de Laguerre.* C. R. Paris, 1937, t. 204, p. 842.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О развитии в цельной серии обратного многочлена

Н. ГИРКОЯШИУ

Целью статьи являются несколько результатов в связи с вопросом необходимых и достаточных условий для того чтобы развитие в цельной серии обратного многочлена P (x), с реальными коэффициентами, имело позитивные коэффициенты.

Известно что **серия сил с радиусом конвергенции R и с неотрицательными коэффицентами, нельзя продолжить по радиусу точки R по ту сторону её.** Значит для того чтобы серия сил имела неотрицательные коэффициенты, необходимое условие, но не достаточное, это чтобы одна из её сингулярных точек с наименшим модулем, была позитивна (условие N).

С другой стороны демонстрируется теорема: **в развитии**

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)} = 1 + nq_1x + \cdots + \binom{n+r-1}{r} q_r x^r + \cdots$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **реальны, имеютс. неравенства**

$$q_{r+1}^2 > q_{2r}\, q_{2r+2}$$

откуда следует моментально что все коэффициенты q разряда пар, позитивны. Демонстрация производится при помощи неравенства Buniakowski—Schwarz для сложных интегралов.

При помощи этих двух результатов, получается теорема: **если дан многочлен P (x), со всеми корнями реальными и с наименшим корнем в модуле позитивным, развитие в цельной серии (1) имеет все коэффициенты позитивные, начиная с разряда к, достаточно большого.**

Показываются потом несколько случаев в которых определяется точно разряд к. Так имеется теорема: **Если многочлен P (x) с реальными коэффициентами и со всеми реальными корнями 2, 3 или 4 степени условие N будучи выполнено, необходимое и достаточное условие для того чтобы развитие (1) имело все коэффициенты неотрицательными это $p_1 \geqslant 0$.**

Демонстрация производится анализируя все возможные случаи. Для некоторых из этих констатируется что только условие N обозначивает позитивность коэффициентов, как и можно было ожидать. Для многочленов большей степени чем 4, условие является недостаточным. Но оно сохраняется для нескольких частных случаев.

В случае когда многочлен P (x) имеет и сложные корни, условие N сохраняется, но коэффициенты разряда пар из (1) не являются вообще позитивными, значит верна только вторая теорема сверху. Но корни многочлена P (x) фигурируя в плане, можно разграничить сферу в которую они входят, меньшая в модуле считающаяся неподвижной. Дающиеся результаты относятся к многочленом 3 и 4 степени.

В последней части работы обобщается теорема Laguerre относящаяся к отделам серии (1) а именно к числу их реальных корней.

RÉSUMÉ

Sur le développement en série entière de l'inverse d'un polynôme

par

N. GHIRCOIAŞIU

Le but du présent article est de présenter quelques résultats concernant le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour que le développement en série entière de l'inverse d'un polynôme $P(x)$, à coefficients réels, ait les coefficients positifs.

On sait qu'*une série de puissances au rayon de convergence* R *et aux coefficients non négatifs, ne peut être prolongée sur le rayon du point* R *au délà de celui-ci*. Il s'ensuit que, pour qu'une série de puissances ait des coefficients non négatifs, la condition nécessaire, mais non pas suffisante, est que l'un de ses points singuliers au plus petit module, soit positif (Condition N).

D'autre part est démontré le théorème: *dans le développement*

$$\frac{1}{(Px)}=\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\dots(1-a_nx)}=1+nq_1x+\dots+\binom{n+r-1}{r}q_rx^r+\cdots$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sont réels, nous avons les inégalités*

$$q^2_{2r+1} < q_{2r}\, q_{2r+2}$$

d'où il résulte immédiatement que tous les coefficients q de rang paire sont positifs. Le théorème n'était connu que pour le cas où les coefficients a sont positifs. La démonstration se fait en utilisant l'inégalité de Buniakovski-Schwarz pour les intégrales multiples.

A l'aide de ces deux résultats, on obtient le théorème: *étant donné un polynôme* $P(x)$ *ayant toutes les racines réelles et la plus petite racine en module positive, le développement en série entière* (1) *a tous les coefficients positifs, à commencer par un rang* k, *suffisamment grand.*

L'auteur présente ensuite quelques cas où le rang k est déterminé avec précision. On aboutit ainsi au théorème: *si le polynôme* $P(x)$, *ayant les coefficients réels et toutes les racines réelles, est du* 2-e, 3-e *où* 4-e *degré, la condition* N *étant remplie, la condition nécessaire et suffisante pour que le développement* (1) *ait tous les coefficients non négatifs est* $p_1 \geq 0$. La démonstration se fait en analysant tous les cas qui peuvent se présenter. Pour certains d'entre eux on constate que seule la condition N assure la positivité des coefficients, comme on s'y attendait. Pour les polynômes d'un degré plus grand que 4, la condition n'est plus suffisante. Elle se maintient toutefois pour quelques cas particuliers.

Au cas où le polynôme $P(x)$ a aussi des racines complexes, la condition N se maintient, mais les coefficients de rang paire de (1) ne sont, en général, plus positifs; il s'ensuit que le second théorème ci-dessus n'est pas généralement vrai. La représentation dans le plan des racines du

polynôme P(x) permet de délimiter le domaine dans lequel celles-ci peuvent être situées, la plus petite dans le module étant considérée fixe. Les résultats indiqués se rapportent à des polynômes du 3-e et 4-e degré.

Dans la dernière partie de l'article, l'auteur généralise un théorème de Laguerre ayant trait aux sections de la série (1), à savoir au nombre des racines réelles de celles-ci.