ASUPRA INTEGRĂRII ECUAŢIEI RICCATI GENERALIZATE

DE

TIBERIU MIHĂILESCU

Comunicare prezentată în şedinţa din 24 februarie 1953 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Intr-o lucrare anterioară [1] am arătat că unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ord. I. de forma

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} + a_i \frac{z^2}{2} + b_i z + c_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

unde a_i, b_i, c_i sunt funcţiuni de $x^1, x^2 \ldots x^n$ şi se asociază în mod invariant un sistem de 3 vectori covarianţi

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad b(b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad c(c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{2}$$

care satisfac relaţiile

$$\mathrm{Rot}\, a = [ab], \quad \mathrm{Rot}\, b = [ac], \quad \mathrm{Rot}\, c = [bc] \tag{3}$$

In virtutea acestor relaţii, sistemul Pfaff

$$\omega_1 = a_i dx^i = 0, \quad \omega_2 = b_i dx^i = 0, \quad \omega_3 = c_i dx^i = 0, \tag{4}$$

asociat sistemului de vectori (2) şi deci sistemului (1), este complet integrabil.

Integrale independente ale acestui sistem mijlocesc schimbări de variabilă ce reduc vectorii *a, b, c* la forme canonice date în [1] sub numerele (28), (37) şi (49), pentru cazurile cînd numărul vectorilor lineari independenţi este respectiv 3,2 sau 1.

In prezenta notă vom examina contribuţia pe care o aduc aceste forme canonice în problema integrării sistemului (1) sau a ecuaţiei *Pfaff* complet integrabilă echivalentă

$$dz + \frac{z^2}{2}\omega_1 + z\omega_2 + \omega_3 = 0 \tag{5}$$

pe care am numit-o *ecuaţie Riccati generalizată.*

1. — Să considerăm cazul în care vectorii (2) sunt lineari independenți. Dacă y^1, y^2, y^3 sunt trei integrale independente ale sistemului asociat (4), o schimbare de variabilă reduce vectorii la forma canonică:

$$(6)\qquad (\alpha_1, 0, 0, \ldots, 0), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, \ldots, 0), \quad (0, 0, \gamma_3, 0, \ldots, 0).$$

unde γ_3, este o funcție arbitrară de y^1, y^2 y^3, iar celelalte componente sînt:

$$(7)\qquad \beta_1 = -\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial y^1}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial y^2}, \quad \beta_3 = -\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial y^3} + \varphi(y^1, y^3)$$

unde

$$(8)\qquad \varphi = \frac{F''(y^3)}{F'(y^3)} - \frac{2F'(y^3)}{f(y^1) + F(y^3)}$$

f și F fiind funcțiuni arbitrare de un argument.

Făcînd schimbarea de variabilă

$$(9)\qquad y^1 = u^1, \quad \gamma_3(y^1, y^2, y^3) = u^2, \quad y^3 = u^3$$

sistemul (1) devine

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u^1} - \dfrac{z^2}{2u^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u^2} - \dfrac{z}{u^2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u^3} + z\varphi + u^2 = 0 \end{cases}$$

și integrarea lui nu prezintă greutăți.

Din a doua ecuație deducem

$$(11)\qquad z = Au^2.$$

A fiind o funcțiune de u^1, și u^2, soluție a sistemului

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u^1} + \lambda\dfrac{A^2}{2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial u^3} + \varphi A + 1 = 0 \end{cases}$$

unde

$$(13)\qquad \lambda = -\frac{2f'F'}{(f+F)^2}.$$

Scriind prima ecuație sub forma

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u^1} = \frac{f'F'}{(f+F)^2}$$

deducem

$$-\frac{1}{A} = -\frac{F'}{f+F} - \frac{1}{B}$$

adică

$$(14)\qquad A = \frac{B(f+F)}{BF' + f + F}.$$

B fiind o funcțiune de u^3 care verifică ecuația

$$(15)\qquad \frac{dB}{du^3} + B\frac{F''}{F'} + 1 = 0$$

deci

$$(16)\qquad B = \frac{C-F}{F'}$$

C fiind o constantă arbitrară.

Din (11), (14) și (16) deducem expresia soluției sistemului (10):

$$(17)\qquad z = \frac{f(u^1) + F(u^3)}{F'(u^3)} \cdot \frac{C - F(u^3)}{C + f(u^1)} \cdot u^2.$$

Ținînd seama de faptul că în determinarea formei canonice (6) nu intervine nici o operație de cuadratură, precum și de modul cum a fost obținută expresia (17), urmează că *soluția sistemului (1) sau a ecuației Riccati generalizată (5) se obține în termeni finiți fără nici o cuadratură în cazul în care cei trei vectori asociați sunt lineari independenți, adică dacă formele Pfaff* ω_1, ω_2, ω_3 *sunt linear independente.*

Intr-o comunicare personală, *G. Vrînceanu* observă că dacă vectorii asociați *a, b, c* sunt linear independenți, găsirea lor revine în fapt la determinarea transformărilor infinitesimale ale grupului lui Lie cu trei parametri ce are structura dată de ecuațiile

$$(18)\qquad \omega_1' = [\omega_1\omega_2], \quad \omega_2' = [\omega_1\omega_3], \quad \omega_3' = [\omega_2\omega_3].$$

Prezint mai jos calculele făcute de *G. Vrînceanu* pentru a se putea face comparația cu cele expuse mai înainte.

Punînd

$$(19)\qquad \omega_1 = e^{\alpha}dy^1, \quad \omega_3 = e^{\gamma}dy^3$$

deduce, din condițiile de integrabilitate (3), relațiile

$$(20)\qquad \beta_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial y^2}, \quad \beta_3 = \frac{\partial\alpha}{\partial y^3}, \quad \beta_1 = -\frac{\partial\gamma}{\partial y^1}, \quad \beta_2 = -\frac{\partial\gamma}{\partial y^2}.$$

Din prima și ultima rezultă

$$(21)\qquad \alpha + \gamma = \varphi(y^1, y^3)$$

iar funcțiunea φ verifică ecuația lui Liouville

$$(22)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^1\partial y^3} + e^{\varphi} = 0.$$

Luînd pe α arbitrar, din (21) deduce funcțiunea γ și ajunge la expresiile

$$\omega_1 = e^{\alpha}\, dy^1, \quad \omega_2 = d\alpha - \frac{\partial \gamma}{\partial y^1}\, dy^1, \quad \omega_3 = e^{-\alpha} e^{\varphi}\, dy^3 \tag{23}$$

deci vectorii sunt complet determinați.

Deoarece ei sunt independenți, α trebuie să depindă de y^2. O schimbare convenabilă de variabilă îl duce la formele canonice

$$\omega_1 = e^{y^2}\, dy^1, \quad \omega_2 = dy^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial y^2}\, dy^1, \quad \omega_3 = e^{-y^2} e^{\varphi}\, dy^3 \tag{24}$$

funcțiunea φ fiind dată de

$$e^{\varphi} = -\frac{2 f'(y^1)\, \psi'(y^3)}{(f+\psi)^2}. \tag{25}$$

Integrarea ecuației Riccati generalizată (5) este echivalentă cu determinarea ecuației finite a grupului lui Lie cu trei parametri operînd într-o varietate cu o dimensiune și avînd structura (48).

G. Vrînceanu efectuiază această integrare punînd

$$z = \lambda\, e^{-y^2} \tag{26}$$

λ fiind o funcțiune de y^1, y^3, ce verifică sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial y_1} = -\dfrac{\lambda^2}{2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^1} \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial y^3} = -e^{\varphi} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y' \partial y^3} \end{cases} \tag{27}$$

Ultima ecuație dă

$$\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} + p(y^1) \tag{28}$$

funcțiunea $p(y^1)$ fiind soluția ecuației *Riccati* obișnuită

$$p' + \frac{p^2}{2} + \left(\frac{f'''}{f'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 0 \tag{29}$$

care este integrabilă deoarece admite integrala particulară

$$p = -\frac{f''}{f'}.$$

Soluția generală este

$$p = -\frac{f''}{f'} + \frac{2f'}{f + C} \tag{30}$$

C fiind o constantă arbitrară.

2. — Dacă între vectorii asociați există o singură relație de dependență

$$\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

am arătat că admit forma canonică.

$$(\alpha_1, 0, \ldots, 0) \; (\beta_1, \beta_2, 0, \ldots, 0), \qquad 0, \lambda_2, 0, \ldots, 0) \tag{32}$$

determinarea componentelor α_1, β_1, β_2, γ_2 necesitînd operațiile de integrare a unei ecuații cu derivate parțiale de ord. I. și de integrare a unei diferențiale totale.

Dacă

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$$

sistemul (1) se reduce la sistemul în 2 variabile independente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x^1} + \alpha_1 \dfrac{z^2}{2} + \beta_1 z = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x^2} + \beta_2 z + \gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

a cărui integrare se poate urmări prin metode elementare.

Vom examina cazurile particulare ce se prezintă atunci cînd unul din coeficienții λ_1, λ_2, λ_3 este nul.

A) Dacă

$$\lambda_3 = 0$$

vectorii a, b sunt proporționali

$$b_i = -\lambda\, a$$

deci bivectorul $[ab]$ este nul. Condițiile (31) ne arată că avem

$$\text{Rot } a = 0$$

deci forma ω_1 este o diferențială exactă. Deoarece ecuația

$$\omega_3 = 0$$

este complet integrabilă, fiindcă din ecuațiile (18) deducem

$$[\omega_3 \omega_3'] = [\omega_3 \omega_2 \omega_3] = 0\,,$$

putem pune

$$\omega_1 = du\,, \quad \omega_2 = -\lambda\, du\,, \quad \omega_3 = \mu\, dv \tag{34}$$

λ și μ fiind funcțiuni de u și v. Ultimele două relații (3) ne dau

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mu = 0\,, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \lambda \mu\,. \tag{35}$$

Eliminarea lui μ ne conduce la ecuația

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0 \tag{36}$$

întîlnită în problema determinării formelor canonice [1, I], a cărei soluție este

$$\lambda = \frac{f''(u)}{f'(u)} - \frac{2f'(u)}{f(u)+\varphi(v)} . \tag{37}$$

Din a doua ecuație (35) rezultă

$$\mu = - \frac{2f'(u)\varphi'(v)}{[f(u)+\varphi(v)]^2} . \tag{38}$$

Sistemul (1) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{z^2}{2} - \lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} + \mu = 0 \end{cases} \tag{39}$$

și se integrează cu ușurință. Din a doua ecuație avem;

$$z = - \frac{2f'}{f+\varphi} + A. \tag{40}$$

A fiind o funcție de u ce verifică ecuația

$$\frac{dA}{du} + \frac{A^2}{2} - \frac{f''(u)}{f'(u)} A = 0 \tag{41}$$

a cărei integrală generală este

$$A = \frac{2f'}{f+C} \tag{42}$$

C fiind o constantă arbitrară.

Deci soluția sistemului (39) este dată de funcțiunea

$$z = \frac{2f'(u)}{f(u)+\varphi(v)} , \frac{\varphi(v)-C}{f(u)+C} \tag{43}$$

f și φ fiind funcțiuni arbitrare de un argument.

b) Dacă

$$\lambda_2 = 0$$

a și c sunt proporționali, $[a\ c]$ este nul, deci

$$\text{Rot } b = 0;$$

forma ω_2 este o diferențială exactă — Ca și în primul caz putem pune

$$\omega_1 = \lambda\, du , \quad \omega_2 = dv , \quad \omega_3 = \mu\, du ; \tag{44}$$

relațiile (3) ne dau;

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda , \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = - \mu \tag{45}$$

de unde

$$\lambda = A(u)e^{v} , \quad \mu = B(u)e^{-v} \tag{46}$$

A și B fiind funcțiuni arbitrare de u.

Sistemul (1) devine în acest caz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{z^2}{2} A(u)e^{v} + B(u)e^{-v} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} + z = 0 . \end{cases} \tag{47}$$

Ultima ecuație ne dă

$$z = C(u)e^{-v}$$

iar funcțiunea C(u) verifică ecuația *Riccati* obișnuită

$$\frac{dC}{du} + \frac{A(u)}{2} C^2 + B(u) = 0$$

care în general nu este integrabilă prin cuadraturi.

c) Cazul

$$\lambda_1 = 0$$

ne dă bivectorul $[b\ c]$ nul și prin urmare

$$\text{Rot } c = 0.$$

Forma ω_3 este o diferențială exactă și putem pune

$$\omega_1 = \lambda\, du , \quad \omega_2 = \mu\, dv , \quad \omega_3 = dv \tag{48}$$

funcțiunile λ și μ verificînd sistemul

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda \mu \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = - \lambda \tag{49}$$

care se reduce la sistemul (35).

Soluția acestui sistem este dată de

$$\begin{gathered} \lambda = - \frac{2f'(u)\varphi'(v)}{[f(u)+\varphi(v)]^2} \\ \mu = \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)} - \frac{2\varphi'(v)}{f(u)+\varphi(v)} \end{gathered} \tag{50}$$

iar sistemul (1) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\lambda z^2}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} + \mu z + 1 = 0 . \end{cases} \tag{51}$$

Urmînd o cale asemănătoare celei din cazul (A), deducem soluția acestui sistem

$$z = \frac{f(u) + \varphi(v)}{\varphi'(v)} \cdot \frac{C - \varphi(v)}{C + f(u)}. \tag{52}$$

Așadar, în două din cazurile particulare înfățișate integrarea ecuației *Riccati* generalizată se determină fără cuadraturi.

Institutul de matematică
Universitatea „V. Babeș", Cluj

BIBLIOGRAFIE

[1] Tiberiu Mihăilescu, *Sistem de vectori asociat unei ecuații Riccati generalizate.* Stud. și cercetări științifice, Acad. R.P.R., Filiala Cluj, anul II, 1—2, 1951, p. 5—16.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об интеграции обобщенного уравнения Riccati

Т. МИХЭИЛЕСКУ

Пользуясь каноническими формами, установленными в 1 для соединенных векторов обобщенного уравнения Riccati, исучается задача интеграции этого уравнения.

Если соединенные векторы линейно независимы, устанавливается, что общий интеграл уравнения получается без квадратур и содержит две функции, зависящие от одного аргумента.

Рассматриваются три особенных случая, в которых два соединенных вектора пропорциональны. В двух из этих случаев общий интеграл получается также в завершенных членах.

RÉSUMÉ

Sur l'integration d'une équation Riccati généralisée

par

TIBERIU MIHĂILESCU

On considère les formes canoniques établies dans un travail antérieur [1] pour les vecteurs associés à une équation de Riccati généralisée et on envisage le problème de l'integration de cette équation.

Si les vecteurs essoaiés sont linéairement indépendants on établit que l'intégrale générale de l'equation se détermine sans quadratures et comporte deux fonctions arbitraires d'un argument.

Si ces vecteurs sont linéairement dépendants, on considère les trois cas particuliers où deux des vecteurs associés sont proportionels. Dans deux de ces trois cas l'intégrale générale s'obtient aussi en termes finis.