ASUPRA DETERMINĂRII NUMĂRULUI RĂDĂCINILOR CU PĂRȚILE IMAGINARE POZITIVE ALE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

DE

TH. ANGHELUȚĂ

Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în ședința din 17 Martie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

I. Considerăm ecuația algebrică, de gradul n,

$$F(z) \equiv a_0 z^n + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

ai cărei coeficienți sunt numere complexe. *Prin ipoteză polinomul $F(z)$ nu are niciun factor real.* Rezultă că acest polinom n'are zerori reale. Apoi separând părțile reale și imaginare ale coeficienților și notând

$$a_h = \alpha_h + i\,\beta_h\,, \quad A(z) = \alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_n\,, \quad B(z) = \beta_0 z^n + \cdots + \beta_n$$

avem

$$F(z) = A + iB. \tag{2}$$

Din ipoteză rezultă că polinoamele A și B sunt prime între ele, căci altminteri $F(z)$ n'ar fi ireductibil în corpul numerelor reale, contrar ipotezei. Deducem de aici că ecuația

$$F_0(z) \equiv \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = 0\,,$$

$\bar{a}$ fiind numărul imaginar conjugat cu a, n'are rădăcini comune cu (1), fiindcă altfel polinoamele A și B n'ar fi prime între ele.

Mai admitem că rădăcinile $\omega_1, \ldots \omega_n$, ale ecuației (1) sunt distincte între ele.

In aceste condiții, Hermite [5] a pus problema determinării numărului rădăcinilor, ecuației (1), cu părțile imaginare pozitive. El a demonstrat că acest număr este egal cu acela al patratelor, având coeficienții pozitivi, care se obțin descompunând o anumită formă patratică φ într'o sumă de patrate, printr'o transformare liniară nesingulară, al cărei determinant are elementele reale. Hermite, după ce demonstrează teorema precedentă, indică un calcul simbolic pentru aflarea numărului căutat.

Pe de altă parte, noi am dedus [2] din metoda lui Hermite un șir de numere al cărui permanențe dau numărul patratelor afectate de coeficienți pozitivi. *Vom arăta aici că acest șir poate fi obținut printr'un* *algoritm analog cu acela, care intervine în teorema lui Sturm.* Va rezulta în felul acesta și o nouă demonstrație a teoremei lui Hermite, pe care a obținut-o printr'un raționament ingenios, dar dificil. Vom vedea totodată cum se obține forma patratică pusă a priori de el.

Vom arăta apoi că metoda lui Hurwitz [8] se aplică de asemeni problemei puse de Hermite. Va urma că și rezultatul obținut prin această metodă se poate obține cu algoritmul amintit, iar forma patratică dela care pleacă Hurwitz este congruentă cu $-\varphi$.

Credem însă necesar de a da mai înainte câteva rezultate preliminare. Considerăm în acest scop următoarele polinoame, prime între ele

$$U = \alpha_0 x^n + \cdots + \alpha_n \,, \quad V = \beta_0 x^p + \cdots + \beta_p, \tag{3}$$

care au coeficienții reali și gradele n și p, unde $p \leq n$. După Cauchy, *indicele funcției raționale $\frac{V}{U}$, când x crește dela $-\infty$ la $+\infty$, este diferența dintre numărul de câte ori această funcție trece dela $+\infty$ la $-\infty$ și numărul de câte ori trece dela $-\infty$ la $+\infty$. Pe de altă parte, noi am arătat* [2] *că indicele acestei funcții este diferența dintre numărul variațiilor șirului*

$$\alpha_0 x^n\,,\ \beta_0 x^p\,,\ -\frac{A_1}{\beta_0^{n-p+1}}x^{p-1}\,,\ldots,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}\frac{A_q}{\beta_0^{n-p+1}}x^{p-q},\ldots,(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\frac{A_p}{\beta_0^{n-p+1}}, \tag{4}$$

pentru $x = +\infty$ și al variațiilor pentru $x = -\infty$, unde am notat

$$A_q = \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-p+2q-2} & \beta_{n-p+2q-1} \\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_{n-p+2q-3} & \beta_{n-p+2q-2} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-p+2q-2} & \alpha_{n-p+2q-1} \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-p+2q-3} & \alpha_{n-p+2q-2} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-p+q-1} & \alpha_{n-p+q} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Șirul precedent se formează luând termenii de gradul cel mai mare ai polinoamelor obținute aplicând lui U și V un algoritm analog cu acela din teorema lui Sturm.

Reamintim încă teorema următoare datorită lui Hermite [7]. *Indicele funcției raționale $\frac{V}{U}$, când x crește dela $-\infty$ la $+\infty$, reprezintă diferența dintre numărul α al rădăcinilor ecuației*

$$U + iV = 0 \tag{6}$$

cu părțile imaginare pozitive și numărul β al rădăcinilor cu părțile imaginare negative. Prin urmare, $v_{+\infty}$ și $v_{-\infty}$ fiind numărul variațiilor șirului (4) pentru $x = +\infty$ și $x = -\infty$, teorema lui Hermite se exprimă prin egalitatea $\alpha - \beta = v_{+\infty} - v_{-\infty}$. Avem încă $\alpha + \beta = n$, căci ecuația (6) n'are rădăcini reale. Din cele două egalități putem afla numerele α și β.

Acestea fiind reamintite, revenim acuma la ecuația (1) pentru care

α și β vor avea aceiași semnificație. Din metoda lui Hermite am dedus, după cum am spus, șirul de numere

$$1,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_n \tag{7}$$

unde

$$D_q = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2q-1} \\ -i\bar{a}_0 & -i\bar{a}_1 & \cdots & -i\bar{a}_{2q-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2q-2} \\ 0 & -i\bar{a}_0 & \cdots & -i\bar{a}_{2q-2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_q \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_q \end{vmatrix}$$

Și am demonstrat teorema următoare: *Numărul permanențelor șirului* (7) *este egal cu numărul rădăcinilor. ecuației* (1), *cu părțile imaginare pozitive.*

Pentru a face legătura dintre șirurile de numere (4), unde $p = n$, și (7), vom exprima întâi pe D_q cu părțile reale și imaginare ale coeficienților ecuației (1). In acest scop înmulțim elementele primei linii cu i și adunăm produsele obținute la linia a doua; procedăm la fel cu elementele liniilor de a 3-a, a 4-a, ș. a. m. d.

Apoi înmulțim elementele fiecărei linii, în care figurează literele β, cu $-i$ și adunăm la linia precedentă, liniei considerate. Găsim astfel exprimarea căutată.

$$D_q = (-2)^q \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{2q-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{2q-1} \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{2q-2} \\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_{2q-2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_q \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_q \end{vmatrix} \tag{8}$$

In (5) facem $p = n$ și notăm determinantul obținut tot cu A_q. In acest determinant schimbăm liniile între ele așa ca elementele să fie așezate ca acelea ale determinantului din (8). Rezultă astfel egalitatea

$$D_q = (-2)^q (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} A_q$$

Șirul de numere analog cu (4) devine astfel

$$\alpha_0 x^n\,,\ \beta_0 x^n\,,\ \frac{(-1)\,D_1}{2\,\beta_0}x^{n-1},\ldots,\frac{(-1)^q D_q}{2^q \beta_0}x^{n-q},\ldots,\frac{(-1)^n D_n}{2^n \beta_0}.$$

Numărul variațiilor acestui șir rămâne neschimbat prin înmulțirea termenilor cu β_0 și prin suprimarea factorului ½

$$\alpha_0 \beta_0 x^n\,,\ \beta_0^2 x^n\,,\ (-1)\,D_1\,x^{n-1}\,,\ldots\ -(1)^q D_q\,x^{n-q}\,,\ldots,\ -(1)^n D_n\,.$$

In diferența variațiilor $v_{+\infty} - v_{-\infty}$ nu intervine variația primilor doi termeni, în cazul că există, x figurând cu acelaşi exponent. Deci putem suprima primul termen şi înlocui pe $\beta_0{}^2$ cu 1. Avem astfel şirul

$$x^n,\ (-1)\,D_1\,x^{n-1},\ldots,(-1)^q\,D_q\,x^{n-q},\ldots,(-1)^n\,D_n\,. \tag{9}$$

Presupunem de acum că termenii acestui şir sunt *diferiți de zero*. $v_{-\infty}$ şi $v_{+\infty}$ fiind numărul de variații al şirului (9) pentru $x=-\infty$ şi $x=+\infty$ avem $\alpha-\beta=v_{+\infty}-v_{-\infty}$ şi $\alpha+\beta=n=v_{+\infty}+v_{-\infty}$, căci şirul este complet. Rezultă egalitățile $\beta=v_{-\infty}$ $\alpha=v_{+\infty}$. Dar pentru $x=-\infty$, numărul de variații al şirului (9) este egal cu acela al şirului

$$1,\ D_1,\ldots D_q,\ldots,D_n \tag{10}$$

Am obținut concluzia importantă: *Numărul de variații al acestui şir reprezintă pe acela al rădăcinilor ecuației* (1), *cu părțile imaginare negative.* Şi deci numărul de permanențe este egal cu numărul rădăcinilor acestei ecuații, cu părțile imaginare pozitive.

Din concluzia de mai sus urmează teorema fundamentală a lui Hermite. *Forma patratică de variabilele* x, y, ..., u

$$\varphi=\sum_{h=1}^{n}\frac{i}{F_0(\omega_h)\,F'(\omega_h)}(x+\omega_h y+\cdots+\omega_h^{n-1}u)^2\,.$$

descompusă într'o sumă de patrate, printr'o transformare liniară nesingulară, are un număr de patrate, afectate de coeficienți pozitivi, egal cu numărul rădăcinilor ecuației (1), *cu părțile imaginare pozitive.* In adevăr, numărul acestor patrate este egal cu acela al permanențelor şirului (7), despre care am arătat că este format din minorii principali ai invariantului D_n al acestei forme.

Vom arăta acum cum putem obține forma φ dela care pleacă Hermite. Pentru aceasta observăm că dânsul trece dela această formă, folosind o anumită transformare liniară, la o altă formă patratică, de variabilele $z_o,\ldots,z_{n-1}$ şi anume

$$\psi=\sum_{h=1}^{n}\frac{-i\,F_0(\omega_h)}{F'(\omega_h)}\,\theta^2(\omega_h)\,,$$

cu $\theta(z)=y_o+zy_1+\ldots+z^{n-1}y_{n-1}$ unde pentru simplificare am pus

$$y_0=a_0z_{n-1}+\cdots+a_{n-1}z_0\quad y_1=a_0z_{n-2}+\cdots+a_{n-2}z_0,\ldots,y_{n-1}=a_0z_0$$

Aceste egalități constituesc o transformare liniară cu determinantul a_0^n.

Se vede însă uşor că ψ se poate exprima cu integrala de variabilă complexă z

$$\psi=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{-i\,F_0(z)}{F(z)}\,\theta^2(z)\,dz$$

luată pe conturul închis C, care are în interior rădăcinile ecuației (1). Dar pentru modulul lui z destul de mare, avem desvoltarea în serie

$$\frac{-i\,F_0\left(\frac{1}{u}\right)}{F\left(\frac{1}{u}\right)}=c+c_0u+\cdots+c_{m-1}u^m+\cdots\quad,\ \text{unde}\ u=\frac{1}{z}\,.$$

Substituind în integrală această serie, găsim

$$\psi=\Sigma c_{h+k}\,y_h\,y_k\,,\qquad h,k=0,1,\ldots,n-1\,.$$

Această formă patratică, de variabilele $y_o,\ldots,y_{n-1}$ are invariantul

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1}\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2}\end{vmatrix}$$

Iar invariantul aceleiaşi forme, dar în raport cu variabilele $z_o,\ldots,z_{n-1}$, se obține folosind transformarea liniară precedentă. Se găseşte pentru acest invariant valoarea $a_0^{2n}\,\Delta$.

Apoi din relația de recurență, care rezultă prin identificare din seria întreagă în u, avem egalitatea

$$D_n=a_0^{2n}\,\Delta_n\,.$$

Deci D_n este invariantul formei ψ în raport cu $z_o,\ldots,z_{n-1}$. Odată recunoscut acest fapt, forma patratică ψ, de variabilele $y_o,\ldots,y_{n-1}$, având discriminantul Δ_n se scrie imediat. De aci urmează forma ψ sub o formă de integrală şi în fine sub forma de sumă unde apar rădăcinile ecuației. Trecem la φ cu inversa transformării liniare folosite de Hermite.

II. Hurwitz [8], pentru studiul problemei lui Hermite, în cazul când ecuația (1) are coeficienții reali, pleacă dela forma patratică, exprimată de integrala

$$\Phi=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(z)\,\theta^2(z)\,dz\,,$$

de variabila complexă z, cu notația

$$R(z)=\frac{\beta_0\,z^n+\beta_1\,z^{n-1}+\cdots+\beta_n}{\alpha_0\,z^n+\alpha_1\,z^{n-1}+\cdots+\alpha_n}$$

$\theta(z)$ având aceiaşi semnificație ca mai sus şi C fiind un contur închis, care are în interior polii funcției raționale $R(z)$. Integrala este evident o formă patratică de variabilele $y_o,\ldots,y$. Pentru această formă Hurwitz dovedeşte teorema următoare. *Indicele funcției raționale* R(z) *este egal cu diferența patratelor, având coeficienții pozitivi, în care se descompune forma patratică* Φ *şi numărul patratelor ale căror coeficienți sunt negativi.* Hurwitz formează invariantul formei Φ şi minorii săi principali

$$R_1\,.\,R_2\ldots,R_q,\ldots,R_n\,.$$

Expresia găsită de Hurwitz coincide cu determinantul din (8), adică avem egalitatea $D_q' = (-2)^q R_q$.

Pe de altă parte știm că există o transformare liniară nesingulară, care efectuată în forma Φ dă forma canonică de noile variabile $x_o, \cdots, x_{n-1}$

$$2\left(R_1 x_0^2 + \frac{R_2}{R_1} x_1^2 + \cdots + \frac{R_n}{R_{n-1}} x_{n-1}^2\right) = -D_1 x_0^2 - \frac{D_2}{D_1} x_1^2 - \cdots - \frac{D_n}{D_{n-1}} x_{n-1}^2 .$$

In membrul al doilea este însă expresia canonică a formei patratice $-\varphi$ introdusă de Hermite. Urmează că metoda lui Hurwitz rezultă din același algoritm folosit mai sus. Totodată obținem o nouă demonstrație în locul celei date de Hurwitz, care este destul de complicată.

Considerăm acuma următoarele două cazuri particulare. 1°. $v_{+\infty} = n = \alpha$, deci în acest caz rădăcinile ecuației (1) au părțile imaginare pozitive. Ecuațiile $A(x) = 0$ și $B(x) = 0$ au rădăcinile reale, iar când x crește trecând prin rădăcinile primei ecuații, raportul $\frac{B(x)}{A(x)}$ trece dela $+\infty$ la $-\infty$. Rezultă că rădăcinile ecuației a doua separă rădăcinile ecuației întâia. 2°. $v_{-\infty} = n = \beta$ și prin urmare în acest al doilea caz rădăcinile ecuației (1) au părțile imaginare negative. Ecuațiile $A(x) = 0$ și $B(x) = 0$ au rădăcinile reale, iar raportul $\frac{B(x)}{A\,x)}$ trece dela $-\infty$

cluzia: *Condiția necesară și suficientă ca rădăcinile ecuației* (1) *să aibă părțile imaginare cu același semn este, ca rădăcinile celor două ecuații să fie reale, iar rădăcinile uneia din ele să separe pe ale celeilalte.* Este la $+\infty$, pentru x crescător trecând prin zerorile numitorului. Deci rădăcinile ecuației a doua separă pe cele ale primei ecuații. Avem conteorema clasică a lui Hermite și Biehler, ce rezultă aci în mod natural din metoda folosită [4].

Să facem încă o aplicație a acestei metode, demonstrând teorema următoare, datorită lui Markov [4]. *Dacă rădăcinile ecuațiilor* $A(x) = 0$ *și* $B(x) = 0$ *sunt reale și rădăcinile uneia din aceste ecuații separă pe ale celeilalte, atunci și ecuațiile derivate* $A'(x) = 0$ *și* $B'(x) = 0$ *au aceiași proprietate.* In adevăr, din prima teoremă urmează că ecuația (1) are rădăcinile situate de aceiași parte a axei reale. Atunci, după teorema lui Lucas și ecuația $F'(z) = 0$ are rădăcinile așezate tot acolo [1] și prin urmare rădăcinile ecuațiilor derivate au proprietatea din enunț.

III. Terminăm lucrarea cu două observații. Prima se referă la următoarea teoremă din monografia matematicienilor sovietici, citată mai sus: *Ecuația* (1) *are numai atunci rădăcinile cu părțile imaginare pozitive, când câtul*

$$Q(z, \bar{z}) = \frac{A(z)\,B(\bar{z}) - A(\bar{z})\,B(z)}{z - \bar{z}}$$

este negativ, ori care ar fi z. Admitem că ecuația (1) are proprietatea din enunț și observăm că avem următoarea identitate

$$-i\,\frac{F(z)\,F_0(\bar{z}) - F(\bar{z})\,F_0(z)}{z - \bar{z}} = -Q(z, \bar{z}) \tag{11}$$

Inlocuind aici pe z^k și $\bar{z}^k$ respectiv prin variabilele z_k și $\bar{z}_k$, obținem o formă hermiteeană pozitivă [4], fiindcă șirul (10), de minori principali, are termenii pozitivi. Revenind la z^k și $\bar{z}^k$ rezultă că $Q(z, \bar{z})$ este negativ oricare ar fi z. Invers, admitem că $Q(z, \bar{z})$ este negativ pentru toate valorile lui z și considerăm, cu Cebotarev și Meimann, identitatea

$$F(z) = B(z)\left[\frac{A(z)}{B(z)} + i\right]$$

presupunând, deocamdată că $B(z)$ nu se anulează în semiplanul complex de sub axa reală. Cum în virtutea ipotezei nici celălalt factor din membrul al doilea nu poate fi nul, căci $\frac{A(z)}{B(z)}$ are partea imaginară pozitivă prin ipoteză. Deci ecuația (1) n'are rădăcini în semiplanul considerat, afară poate de zerorile polinomului $B(z)$. Aceasta nu se poate întâmpla, deoarece atunci și polinomul $A(z)$ ar fi nul pentru aceste zerori, însă cele două polinoame sunt presupuse prime între ele. Teorema este demonstrată și rezultă că $A(z)$ și $B(z)$ au zerorile reale.

A doua observație privește următorul criteriu datorit lui Schur [9]. Odată cu ecuația algebrică

$$f(x) \equiv b_n + b_{n-1}\,x + \cdots + b_0\,x^n = 0$$

se consideră și polinomul

$$f^*(x) = \bar{b}_n - \bar{b}_{n-1}\,x + \cdots + (-1)^n \bar{b}_0\,x^n$$

format din $f(x)$, înlocuind coeficienții $b_n, \ldots, b_o$ cu valorile lor imaginar conjugate $\bar{b}_n, \ldots, \bar{b}_o$ și schimbând totodată pe x în $-x$. Iată criteriul anunțat: *Dacă* ξ *este un număr cu partea reală negativă, care verifică neegalitatea*

$$|f(\xi)| < |f^*(\xi)|,$$

atunci ecuația de gradul $n-1$

$$\varphi(x) \equiv \frac{f^*(\xi)\,f(x) - f(\xi)\,f^*(x)}{x - \xi}$$

și cu cea considerată au deodată rădăcinile cu părțile reale negative. Acest criteriu este important, căci problema de a ști, dacă ecuația dată are rădăcinile cu părțile imaginare negative, se reduce la o problemă analoagă asupra unei ecuații de gradul $n-1$, ș. a. m. d. Pentru expunerea demonstrației este mai comod să schimbăm variabila punând $x = iu$ și deci $\xi = i\eta$. Cu această schimbare și cu notația $a_h = i^{n-h}\,b_h$, ecuația și polinomul de mai sus devin

$$\begin{aligned} F(u) &\equiv a_0 u^n + \cdots + a_n = 0 \\ F_0(u) &= \bar{a}_0\,u^n + \cdots + \bar{a}_n . \end{aligned} \tag{11}$$

Așa fiind, criteriul lui Schur are următoarea exprimare: *Dacă* η *este un număr cu partea imaginară pozitivă, care verifică neegalitatea*

$$|F(\eta)| < |F_0(\eta)| \tag{12}$$

atunci ecuația, de gradul n—1,

$$\Phi(u) \equiv -i\,\frac{F_0(\eta)\,F(u) - F(\eta)\,F_0(u)}{u-\eta} \tag{13}$$

şi cu cea dată au deodată rădăcinile cu părțile imaginare pozitive. Incepem demonstrația cu următoarea observație foarte simplă. Dacă a este un număr situat deasupra axei reale ca şi η, avem neegalitatea

$$|\eta - a| < |\eta - \bar{a}|$$

Presupunem că ecuația (11) are rădăcinile cu părțile imaginare pozitive şi să arătăm că aceiaşi proprietate o are şi ecuația (13). Neegalitatea (12) este verificată dela sine, η fiind ales după cum s'a precizat, deoarece polinoamele $F(u)$ şi $F_0(u)$ au zerorile respectiv imaginar conjugate. Apoi dacă ecuația (13) ar avea o rădăcină u nesituată deasupra axei reale, ar urma ca u să verifice ecuația

$$F_0(\eta)\,F(u) - F(\eta)\,F_0(u) = 0$$

rezultat imposibil, fiindcă avem $|F(u)| \geq |F_0(u)|$ şi prin urmare

$$|F_0(\eta)\,F(u)| > |F(\eta)\,F_0(u)|$$

Vom dovedi acum proprietatea inversă. Presupunem dar că ecuația (13) are rădăcinile cu părțile imaginare pozitive şi va rezulta că ecuația (11) are aceiaşi proprietate. In acest scop vom forma polinomul $\Phi_0(u)$, care are drept coeficienți valorile imaginar conjugate ale coeficienților respectivi din $\Phi(u)$. Avem astfel

$$\Phi_0(u) = i\,\frac{F(\bar{\eta})\,F_0(u) - F_0(\bar{\eta})\,F(u)}{u-\bar{\eta}}$$

De aici şi din (13) deducem

$$(u-\eta)\,\Phi(u)\,F(\bar{\eta}) + (u-\bar{\eta})\Phi_0(u)F\,\eta = [F_0(\eta)F(\bar{\eta}) - F_0(\bar{\eta})F(\eta)]\,F(u). \tag{14}$$

Paranteza mare din partea a doua este diferită de zero în virtutea neegalității (12), căci avem

$$F_0(\eta)\,F(\bar{\eta}) = |F_0(\eta)|^2 \quad , \quad |F_0(\bar{\eta})\,F(\eta)| = |F(\eta)|^2 .$$

Să presupunem acuma că u nu este situat deasupra axei reale. Atunci avem

$$|(u-\eta)\,\Phi(u)| > |(u-\bar{\eta})\,\Phi_0(u)| \;,\quad |F(\bar{\eta})| = |F_0(\eta)| .$$

deci primul termen, al membrului întâi din (14), are modulul mai mare decât modulul termenului al doilea şi prin urmare $F(u)$ nu poate să se anuleze pentru valorile lui u, precizate mai sus. Teorema este astfel demonstrată în mod simplu şi intuitiv. Am ținut să simplific demonstrația criteriului, deoarece acesta poate fi foarte util tehnicienilor, după cum observă Schur. O dificultate este însă în verificarea neegalității (12). De aceia Schur, pentru a obține condițiile lui Hurwitz, introduce un al

doilea criteriu, pe care-l vom enunța, păstrând schimbarea de variabilă de mai sus. Vom propune apoi un alt criteriu, care cuprinde pe acela al lui Schur. In scopul urmărit, considerăm câtul, ordonat după puterile lui η,

$$\frac{F_0(\eta)\,F(u) - F(\eta)\,F_0(u)}{iu - i\eta} = Q_0(u) + i\eta\,Q_1(u) + \cdots$$

unde am pus în evidență numai termenul liber şi cel de gradul întâi, în raport cu η.. Din identitatea precedentă, deducem

$$iu\,Q_0(u) = \bar{a}_n\,F(u) - a_n\,F_0(u)$$

$$-u\,Q_1(u) - i\,Q_0(u) = \bar{a}_{n-1}\,F(u) - a_{n-1}\,F_0(u) .$$

De aici, urmează

$$-u^2Q_1(u) = (\bar{a}_n + u\,\bar{a}_{n-1})\,F(u) - (a_n + u\,(a_{n-1})\,F_0(u) .$$

Notând

$$H(u) = Q_0(u) + i\eta\,Q_1(u)$$

avem

$$i\,u^2\,H(u) = (\bar{a}_n\,u + \bar{a}_{n-1}\,u\,\eta + \eta\,\bar{a}_n)\,F(u) - (a_n\,u + a_{n-1}\,u\,\eta + \eta\,a_n)\,F(u).$$

Iată acum criteriul lui Schur. *Fie η un număr cu partea imaginară pozitivă. Atunci, dacă $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ are deasemeni partea imaginară pozitivă, ecuația* (11) *şi cu* $H(u) = 0$, *au în acelaşi timp rădăcinile cu părțile imaginare pozitive.* De aici Schur obține, prin inducție completă, condițiile lui Hurwitz, ecuația dată având coeficienții reali.

Noi vom păstra ipoteza că numărul $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ are partea imaginară pozitivă şi vom arăta că ecuația (11) *are numai atunci rădăcinile cu părțile imaginare pozitive, când rădăcinile fiecăreia din ecuațiile* $Q_0(u) = 0$, $Q_1(u) = 0$ *sunt reale, distincte şi separă pe ale celeilalte* (cazul particular cu 1°). Cu alte cuvinte, când ecuația

$$Q_0(u) + iQ_1(u) = 0$$

are rădăcinile cu părțile imaginare pozitive.

Pentru simplificarea scrierii, notăm

$$i\,Q_0(u) = \alpha_0\,u^{n-1} + \alpha_1\,u^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} ,$$

$$-Q_1(u) = \beta_0\,u^{n-1} + \beta_1\,u^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} ,$$

$$\alpha_h = \bar{a}_n\,a_h - a_n\,\bar{a}_h \;,\quad \beta_h = \bar{a}_n\,a_{h-1} - a_n\,\bar{a}_{h-1} + \bar{a}_{n-1}\,a_h - a_{n-1}\,\bar{a}_h \;,\qquad h = 0,1,\ldots,n-1 ,$$

convenind ca să înlocuim cu zero coeficienții cu indici negativi.

Ipoteza că partea imaginară a lui $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ este pozitivă revine la neegalitatea

$$i\,(\bar{a}_n\,a_{n-1} - a_n\,\bar{a}_{n-1}) < 0 .$$

Pentru introducerea ipotezei, considerăm ecuațiile

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$
$$\alpha_{n-1} u^{n-1} + \alpha_{n-2} u^{n-2} + \cdots + \alpha_0 + i\,(\beta_{n-1} u^{n-1} + \beta_{n-2} u^{n-2} + \cdots + \beta_0) = 0$$

şi vom arăta că ele au deodată rădăcinile cu părţile imaginare negative. In acest scop notăm cu Δ_q şi δ_q determinanţii analogi cu D_i. relativi la prima şi a doua ecuaţie. Avem atunci pentru prima ecuaţie

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-2q+1} \\ -i\bar{a}_n & -i\bar{a}_{n-1} & \cdots & -i\bar{a}_{n-2q+1} \\ 0 & a_n & \cdots & a_{n-2q+2} \\ 0 & -i\bar{a}_n & \cdots & -i\bar{a}_{n-2q+2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

iar pentru ecuaţia a doua vom folosi expresia determinantului format cu părţile reale şi imaginare ale coeficienţilor

$$\delta_q = \begin{vmatrix} \beta'_{n-1} & \beta'_{n-2} & \cdots & \beta'_{n-2q} \\ \alpha'_{n-1} & \alpha'_{n-2} & \cdots & \alpha'_{n-2q} \\ 0 & \beta'_{n-1} & \cdots & \beta'_{n-2q+1} \\ 0 & \alpha'_{n-1} & \cdots & \alpha'_{n-2q+1} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta'_{n-q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha'_{n-q-1} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

unde am pus $i\alpha'_h = \alpha_h$ şi $i\beta'_h = \beta_h$. După cum am spus mai sus, înlocuim şi aici elementele cu indici negativi cu zero.

Intre aceşti determinanţi există relaţia

$$-\alpha'_{n-1}\,\Delta_l = \delta_{l-1}$$

In adevăr, în determinantul Δ_q la elementele liniei a 2-a, înmulţite cu a_n, adunăm pe acelea ale liniei 1-a, înmulţite cu $i\bar{a}_n$ şi determinantul găsit îl desvoltăm după prima linie. Obţinem astfel egalitatea

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} i\alpha_{n-1} & i\alpha_{n-2} & \cdots & i\alpha_{n-2q+1} \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-2q+2} \\ -i\bar{a}_n & -i\bar{a}_{n-1} & \cdots & -i\bar{a}_{n-2q+2} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix}$$

Adunăm la elementele liniei 1-a pe acelea ale liniilor a 2-a şi a 3-a; înmulţite respectiv cu $i\bar{a}_{n-1}$ şi a_{n-1}. Apoi la elementele liniei a 3-a, înmulţite cu a_n adunăm pe acelea ale liniei a 2-a înmulţite cu $i\bar{a}_n$. In fine, desvoltăm determinantul după linia 2-a. In felul acesta avem

$$\Delta_q = -\begin{vmatrix} i\beta_{n-1} & i\beta_{n-2} & \cdots & i\beta_{n-2q+2} \\ i\alpha_{n-1} & i\alpha_{n-2} & \cdots & i\alpha_{n-2q+2} \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-2q+3} \\ -i\bar{a}_n & -i\bar{a}_{n-1} & \cdots & -i\bar{a}_{n-2q+3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix}$$

La elementele liniei a 3-a înmulţite cu $i\bar{a}_{n-1}$, adunăm pe acelea ale liniei a 2-a şi pe acelea ale liniei a 4-a înmulţite cu a_{n-1}. Procedând astfel, obţinem egalitatea

$$-i\bar{a}_{n-1}\,\Delta_q = \begin{vmatrix} i\beta_{n-1} & i\beta_{n-2} & \cdots & i\beta_{n-2q+2} \\ i\alpha_{n-1} & i\alpha_{n-2} & \cdots & i\alpha_{n-2q+2} \\ 0 & i\beta_{n-1} & \cdots & i\beta_{n-2q+3} \\ -i\bar{a}_n & -i\bar{a}_{n-1} & \cdots & -i\bar{a}_{n-2q+3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix}$$

Analog, schimbând rolurile liniilor a 3-a şi a 4-a între ele, găsim

$$a_{n-1}\,\Delta_q = \begin{vmatrix} i\beta_{n-1} & i\beta_{n-2} & \cdots & i\beta_{n-2q+2} \\ i\alpha_{n-1} & i\alpha_{n-2} & \cdots & i\alpha_{n-2q+2} \\ 0 & i\beta_{n-1} & \cdots & i\beta_{n-2q+3} \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-2q+3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix}$$

Inmulţind liniile de rang 4, din cei doi determinanţi din urmă, respectiv cu a_n şi $i\bar{a}_n$ şi adunând, avem

$$i\,(a_n a_{n-1} - \bar{a}_n a_{n-1})\,\Delta_q = \begin{vmatrix} i\beta_{n-1} & i\beta_{n-2} & \cdots & i\beta_{n-2q+2} \\ i\alpha_{n-1} & i\alpha_{n-2} & \cdots & i\beta_{n-2q+2} \\ 0 & i\beta_{n-1} & \cdots & i\beta_{n-2q+3} \\ 0 & i\alpha_{n-1} & \cdots & i\alpha_{n-2b+3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-q} \\ 0 & 0 & \cdots & -i\bar{a}_{n-q} \end{vmatrix}$$

Ţinând seama de notaţii, primul membru se scrie $-\alpha'_{n-1}\,\Delta_q$. Cu liniile a 4-a, a 5-a şi a 6-a repetăm procedeul precedent. In membrul întâi găsim

$$-\alpha'_{n-1}\,\Delta_q\,.\,(-1)\,i\,(\bar{a}_n\,a_{n-1}-a_n\,\bar{a}_{n-1}) = -(\alpha'_{n-1})^2\,\Delta_q\,.$$

In membrul al doilea obținem un determinant cu legea de formare evidentă, având primele șase linii identice cu acelea din δ_q. După repetarea de q—2 ori a aceluiaşi procedeu, ajungem la relația anunțată, din care rezultă imediat criteriul enunțat. In adevăr, presupunem că prima din ecuațiile inverselor are rădăcinile cu părțile imaginare negative. Prin urmare avem $\Delta_q > o$ sau $\Delta < o$ după cum q este par sau impar. Din relația dovedită rezultă că δ are acelaşi semn ca Δ_q, deci a doua ecuație a inverselor are şi ea rădăcinile cu părțile imaginare negative. Inversa propoziției se arată la fel.

Din relația găsită rezultă de asemenea, prin inducție completă, condițiile [2] necesare şi suficiente pentru ca o ecuație algebrică, ai cărei coeficienți sunt complecşi, să aibă rădăcinile cu părțile imaginare pozitive.

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Acaaemiei R. P. R.

BIBLIOGAFIE

1. Angheluță Th., *Funcții Analitice*, 1940. Ed. Universității, Cluj, p. 7.
2. Angheluță Th., *Numărul rădăcinilor cu părțile imaginare pozitive ale unei ecuații algebrice.* Bul. Științific al Acad. R.P.R., 1950, t. II, Nr. 2.
3. Angheluță Th., *Sur la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle.* Mathematica, Cluj, 1946, v. 22, p. 41.
4. Cebotarev G. N.—Meimann N. N., *Problema Rausa—Hurvița dlia polinomov i țelâi funcții.* Trudi Matematiciscoho Instituta Steklova, 1949, v. XXVI.
5. Hermite Ch., *Oeuvres.* 1898, Paris, Gauthiers-Villars, t. I. p. 509.
6. Hermite Ch., *Oeuvres.* 1912, Paris, Gauthiers-Villars, t. III. p. 509.
7. Hermite Ch., *Sur l'indice des fractions rationnelles.* Bull. Soc. Math. de France, 1879, t. 7, p. 128.
8. Hurwitz A., *Über algebraische Gleichungen die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen.* Mathematische Annalen, 1895, v. 46, p. 273.
9. Schur J., *Über algebraische Gleichungen die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen.* Zeitschrift für angw. Math. u. Mec., 1921, v. 1, p. 307.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об определении числа корней с воображаемыми положительными частями одного алгебраического уравнения

Т. АНГЕЛУЦЫ

В предыдущей заметке автор находит закон образования порядка (7), выведенного из квадратной формы Hermite'a. В настоящей заметке он доказывает, что этот порядок может быть получен через алгорифм аналогичной тому, которым пользовался Штурм в своей теореме. Отсюда вытекает простое доказательство теоремы Hermite'a и способ образования порядка.

Аналогичные соображения относятся и к теореме Hurwitz'a и к форме, [illegible]ой a priori.

Как применение, автор рассматривает теорему Маркова. Затем возвращается к одной теореме, достойной особого внимания, данной Н. Г.

Чеботаревым и Н. Н. Нейманом. Автор заканчивает ссылкою на научный доклад Schur'a. Этот критерий может быть полезен в техническом применении и позволяет получить теорему Hermite'a совершенно индуктивным путем.

RÉSUMÉ

Sur la détermination du nombre des racines avec les parties imaginaires positives d'une équation algébrique

par

TH. ANGHELUȚĂ

L'auteur a donné, dans une note antérieure, la loi de formation de la suite (7) déduite de la forme quadratique φ d'Hermite. Dans la note actuelle il montre que cette suite s'obtient aussi par un algorithme analogue à celui employé par Sturm dans son mémorable théorème. Il en résulte en même temps une démonstration simple du beau théorème d'Hermite et la manière d'obtenir la forme φ.

Des considérations analogues ont lieu pour le théorème classique de Hurwitz et sa forme quadratique. Comme application, l'auteur considère le théorème de Markov. Puis il revient sur un théorème important de N. G. Cebotarev et N. N. Meimann. L'auteur termine sa note par des remarques sur un mémoire de Schur et il propose un critère comprenant l'un de ceux de Schur. Ce critère peut être très utile dans les applications techniques et il permet d'obtenir le théorème d'Hermite, par induction complète.