PROBLEMA BILOCALĂ ŞI TEOREMA INEGALITĂŢILOR DIFERENŢIALE CU NODURI CONFUNDATE A LUI S.A. CIAPLÎGHIN, PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL DOI

de

OLEG ARAMĂ

Comunicare prezentată la şedinţa de comunicări a Institutului de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj, din 23 decembrie 1957

În această lucrare se dă răspuns unei probleme puse de prof. T. Popoviciu, anume aceea de a se cerceta legătura dintre proprietatea de interpolaţie a familiei de integrale a unei ecuaţii diferenţiale liniare şi proprietatea de convexitate [1]) faţă de această familie a funcţiilor ce fac pozitiv primul membru al ecuaţiei diferenţiale respective. Această problemă a fost pusă în scopul obţinerii de condiţii necesare şi suficiente pentru ca problema bilocală (cu noduri simple) pentru ecuaţia diferenţială considerată să admită soluţie.

În cazul cînd proprietatea de convexitate amintită mai sus este concepută pentru noduri simple şi distincte, problema a fost rezolvată într-un caz general de E. Moldovan [1].

În lucrarea de faţă se studiază problema enunţată, în cazul cînd proprietatea de convexitate este definită cu noduri confundate, în sensul aceleea care intervine în « teorema inegalităţilor diferenţiale» a lui S. A. Ciaplîghin pentru ecuaţia diferenţială liniară de ordinul 2, cu coeficienţi variabili. Pentru uşurarea expunerii, introducem următoarele definiţii şi notaţii.

Definiţia 1. Fie F o familie de funcţii $f(x)$, de o variabilă reală x, definite în intervalul (a, b) şi continue în acest interval. Spunem că o astfel de familie F, posedă proprietatea $I_2\ (a, b)$, adică este interpolatoare de ordinul 2 în intervalul deschis (a, b), dacă oricare ar fi două noduri distincte x_1 şi x_2 din (a, b), şi oricare ar fi valorile reale y_1 şi y_2, există o funcţie şi una singură $f(x)$, aparţinînd familiei F, care satisface condiţiile $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$.

---

[1]) A se vedea definiţiile 1 şi 5 din lucrarea de faţă.

Definiția 2. Spunem că o familie F de funcții $f(x)$ definite și continue într-un interval (a, b) posedă proprietatea $N_2(a, b)$ (elementele ei sînt între ele neoscilatoare de ordinul doi în intervalul (a, b)), dacă două funcții oarecare $f_1(x)$ și $f_2(x)$ distincte din F nu pot lua valori egale în (a, b) decît cel mult într-un singur punct din acel interval.

Definiția 3. Considerăm un operator diferențial liniar

$$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y,$$

unde $p(x)$ și $q(x)$ sînt funcții continue în (a, b), — definit, pe mulțimea $C_2(a, b)$ a funcțiilor continue împreună cu derivatele lor de ordinul 1 și 2 în (a, b). Fie x_0 un punct din intervalul (a, b). Vom spune că operatorul $L(y)$ posedă proprietatea $T^{(2)}_{x_0}(a, b)$, dacă oricare ar fi funcția $y(x)$, aparținînd mulțimii $C_2(a, b)$ și satisfăcînd în intervalul (a, b) inegalitatea $L(y) > 0$ precum și condițiile $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, atunci acea funcție verifică în tot intervalul (a, b) inegalitatea $y(x) \geq 0$, semnul egal avînd loc numai în punctul x_0.

Vom spune că operatorul diferențial $L(y)$ posedă proprietatea $T_2(a, b)$, dacă el posedă proprietatea $T^{(2)}_{x_0}(a, b)$, oricare ar fi $x_0 \in (a, b)$.

Observație. Definițiile 1, 2, 3, de mai sus, se pot enunța și relativ la un interval închis $[a, b]$. În acest caz, proprietățile respective le vom nota precum urmează: $I_2[a, b]$, $N_2[a, b]$, $T^{(2)}_{x_0}[a, b]$, unde $x_0 \in [a, b]$ și $T_2[a, b]$. În cele ce urmează, cînd se va vorbi de vreuna dintre aceste proprietăți, se va subînțelege întotdeauna că funcțiile $p(x)$ și $q(x)$, ce intervin în expresia operatorului $L(y)$, sînt continue în intervalul închis $[a, b]$.

În această lucrare se stabilește întîi următoarea teoremă de echivalență.

T e o r e m a 1. *Fie o ecuație diferențială liniară de ordinul doi*

$$L(y) = y + p(x) y + q(x) y = r(x) \tag{1}$$

avînd coeficienții $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ *continui în intervalul deschis* (a, b). *Fie* Y *familia integralelor* $y(x)$ *a ecuației* (1), *în* (a, b). *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y *să posede proprietatea* $I_2(a,b)$ *sau* $N_2(a, b)$, *este ca operatorul diferențial* $L(y)$ *să posede proprietatea* $T_2(a,b)$.

Pentru demonstrarea acestei teoreme, vom enunța în prealabil cîteva proprietăți ajutătoare.

Asociem ecuației diferențiale (1), ecuația diferențială omogenă

$$L(y) = y + p(x) y + q(x) y = 0 \tag{2}$$

să notăm cu Y_0 mulțimea integralelor particulare ale acestei ecuații. Au loc următoarele leme, a căror demonstrație este imediată.

L e m a 1.[1]) *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y *a integralelor ecuației* (1) *să posede proprietatea* $I_2(a, b)$ *respectiv* $I_2[a, b]$, *este ca familia* Y_0 *a ecuației diferențiale omogene* (2), *să posede proprietatea* $I_2(a, b)$, *respectiv* $I_2[a, b]$.

---

[1]) În cele ce urmează vom presupune că coeficienții ecuațiilor (1) și (2) sînt continui, fie în intervalul deschis (a, b) fie în intervalul închis $[a, b]$, după cum lema respectivă se referă la intervalul deschis (a, b), sau la intervalul închis $[a, b]$.

L e m a 2. *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y_0 *să posede proprietatea* $I_2(a, b)$, *respectiv* $I_2[a, b]$, *este ca această familie să posede proprietatea* $N_2(a, b)$, *respectiv* $N_2[a, b]$.

L e m a 3. *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y_0 *să aibe proprietatea* $I_2[a, b)$, *respectiv* $I_2[a, b]$ *este ca ecuația* (2) *să admită cel puțin o integrală pozitivă în* (a, b) *respectiv în* $[a, b]$[1]).

Demonstrație. Condiția este necesară.

Stabilirea necesității condiției o facem întîi pentru cazul unui interval închis $[a, b]$. Presupunem deci că Y_0 are proprietatea $I_2[a, b]$. Fie $y(x)$ integrala ecuației (2), satisfăcînd condițiile $y(a) = y(b) = 1$. Această integrală particulară nu se poate anula în intervalul $[a, b]$: Într-adevăr, presupunînd prin absurd că s-ar anula într-un punct din intervalul $[a, b]$, nici o rădăcină nu poate avea un ordin de multiplicitate mai mare ca 1, căci în caz contrar ar rezulta că integrala considerată este identic nulă, ceea ce ar contrazice condițiile la limită pe care le verifică. Apoi din continuitatea acestei integrale, ar rezulta că numărul rădăcinilor ei (toate sînt simple), din $[a, b]$, este mai mare sau cel puțin egal cu 2. De aici ar rezulta că $y(x)$ nu are proprietatea $I_2[a, b]$, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Stabilirea necesității condiției exprimate de lemă, în cazul unui interval semiînchis $[a, b)$, se face astfel: Fie $y_a(x)$ o integrală particulară care satisface condițiile $y_a(a) = 0$ și $y'_a(a) > 0$. Această integrală nu se poate anula în (a, b). Într-adevăr, dacă $y_a(x)$ s-ar anula într-un punct $\xi_a \in (a, b)$, atunci pentru un număr pozitiv ε suficient de mic, integrala particulară $y_{a+\varepsilon}(x)$, care satisface condițiile $y_{a+\varepsilon}(a+\varepsilon) = 0$ și $y'_{a+\varepsilon}(a+\varepsilon) = y'_a(a)$, s-ar mai anula într-un punct $\xi_{a+\varepsilon}$ vecin de punctul ξ_a, situat de asemenea în intervalul (a, b) (cînd ε este suficient de mic). În definitiv, ar rezulta că există o integrală particulară $y_{a+\varepsilon}(x)$, care se anulează în cel puțin două puncte (distincte) din (a, b). Ar rezulta de aici că familia Y_0 nu are în $[a, b)$ proprietatea $N_2[a, b)$ și conform lemei 2, că nu are nici proprietatea $I_2[a, b)$, contrar ipotezei.

Condiția este suficientă. Fie $y_1(x)$ o integrală particulară a ecuației (2), astfel încît $y_1(x) > 0$ în intervalul $[a, b]$. Vom arăta că familia Y_0 are proprietatea $N_2[a, b]$, de unde în virtutea lemei 2 va rezulta că Y_0 are proprietatea $I_2[a, b]$. Presupunem prin absurd că ar exista o integrală particulară $y_2(x) \not\equiv 0$ care s-ar anula în două puncte distincte x_1 și x_2 din $[a, b]$. Să considerăm integrala $\lambda y_2(x)$, unde λ este o constantă. Fie λ_0 valoarea constantei λ, pentru care curbele reprezentative ale integralelor $y_1(x)$ și $\lambda_0 y_2(x)$ sînt tangente într-un punct $\xi \in (x_1, x_2)$. Funcția $y(x) = y_1(x) - \lambda_0 y_2(x)$ va fi o integrală a ecuației (2), care în punctul ξ satisface condițiile $y(\xi) = y'(\xi) = 0$. De aici ar rezulta că $y_1(x) - \lambda_0 y_2(x) \equiv 0$, adică $y_1(x) \equiv \lambda_0 y_2(x)$, de unde ar rezulta că $y_1(x)$ se anulează în x_1 și în x_2, contrar ipotezei.

Demonstrația suficienței condiției în cazul unui interval deschis (a, b) se face la fel.

L e m a 4. *Dacă familia* Y *a integralelor ecuației* (1) *posedă proprietatea* $I_2(a, b)$, *respectiv* $I_2[a, b]$, *atunci operatorul diferențial* $L(y)$ *corespunzător posedă proprietatea* $T_2(a, b)$ *respectiv* $T_2[a, b]$.

Demonstrația acestei leme o vom da pentru cazul unui interval deschis (a, b), ea făcîndu-se la fel în cazul unui interval închis $[a, b]$. Presupunem deci că familia Y a integralelor ecuației diferențiale (1) posedă proprietatea $I_2(a, b)$. Conform lemei 1

---

[1]) Proprietatea exprimată de această lemă rezultă și din lucrarea [2] a lui V. A. K o n d r a t i e v, precum și din lucrarea [7] a lui G. P o l y a.

rezultă că şi familia Y_0 a integralelor ecuaţiei (2) posedă proprietatea $I_2(a, b)$. Să demonstrăm că în aceste condiţii operatorul diferenţial $L(y)$ are proprietatea $T_2(a,b)$. În acest scop să presupunem prin absurd că ar exista o funcţie $v(x) \in C_2(a,b)$ care satisface condiţiile

$$\left.\begin{aligned} &L(v) > 0, \ x \in (a, b), \\ &v(x_0) = v'(x_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde x_0 este un punct din intervalul (a, b) şi că această funcţie $v(x)$ ar avea în intervalul (a, b) în afara rădăcinii x_0 şi o altă rădăcină x_1 diferită de x_0. Presupunem pentru fixarea ideilor că $x_0 < x_1$. Din (3) rezultă că $v''(x_0) > 0$ şi întrucît $v(x_0) = v'(x_0) = 0$, rezultă că în vecinătatea punctului x_0, curba de ecuaţie $z = v(x)$ se situează deasupra axei Ox. Astfel putem presupune că rădăcina x_1 este consecutiva la dreapta rădăcinii x_0. Fie acum a_1 şi b_1 două numere reale satisfăcînd inegalităţile $a < a_1 < x_0 < x_1 < b_1 < b$. Întrucît prin ipoteză Y_0 are proprietatea $I_2(a, b)$ rezultă îndată că ea va avea şi proprietatea $I_2[a_1, b_1]$. Conform lemei 3, ecuaţia $L(y) = 0$ va admite cel puţin o integrală $\eta(x)$ pozitivă în $[a_1, b_1]$. Efectuînd schimbarea de funcţie

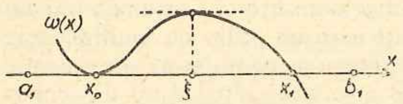

Fig. 1

$$y(x) = \eta(x) z(x) \tag{4}$$

ecuaţia (2) se transformă în ecuaţia diferenţială

$$L(y) = \eta(x)\left[z'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)} z'\right] = \eta(x) L^*(z) = 0 \tag{5}$$

definită în intervalul $[a_1, b_1]$, iar funcţiei $v(x)$ îi va corespunde prin transformarea (4), funcţia $w(x)$ care va satisface condiţiile:

$$\left.\begin{aligned} &L^*(w) > 0, \ x \in [a_1, b_1] \\ &w(x_0) = w'(x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Din faptul că x_0 şi x_1 sînt rădăcini consecutive pentru funcţia $v(x)$, rezultă din (4) că x_0 şi x_1 sînt rădăcini consecutive şi pentru funcţia $w(x)$. Apoi din (3') rezultă că $w''(x_0) > 0$ şi întrucît $w(x_0) = w'(x_0) = 0$, rezultă că în vecinătatea punctului x_0 curba de ecuaţie $z = w(x)$ se situează deasupra axei Ox (fig. 1). Fie ξ abscisa unui punct de maxim al funcţiei $z = w(x)$ în intervalul (x_0, x_1). Din figura 1 se constată că în punctul ξ au loc relaţiile $w'(\xi) = 0$, $w''(\xi) \leqq 0$, de unde rezultă că în punctul ξ are loc inegalitatea $L^*(w)|_{x=\xi} \leqq 0$. Această inegalitate contrazice inegalitatea corespunzătoare din (3'). S-a ajuns astfel la o contradicţie. Rezultă în definitiv că funcţia $v(x)$, ce satisface condiţiile (3), nu poate să aibe în intervalul (a, b) o altă rădăcină în afară de x_0. De aici rezultă ţinînd seamă de (3), că în intervalul (a, b) are loc inegalitatea $v(x) \geqq 0$, semnul egal avînd loc numai în punctul x_0, q.e.d.

L e m a 5. *Dacă operatorul diferenţial $L(y)$ posedă proprietatea $T_2(a, b)$ atunci acest operator $L(y)$ posedă proprietatea $T_2[a_1, b_1]$, oricare ar fi subintervalul închis $[a_1, b_1]$ conţinut în intervalul (a, b).*

Demonstraţie. Fie $[a_1, b_1]$ un interval oarecare conţinut în (a, b) şi fie $u(x)$ o funcţie definită în intervalul $[a_1, b_1]$, care satisface inegalitatea $L(u) > 0$ în $[a_1, b_1]$,

precum şi condiţiile $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, unde x_0 este un punct din intervalul $[a_1, b_1]$. Să arătăm că în aceste ipoteze are loc inegalitatea $u(x) \geqq 0$, $x \in [a_1, b_1]$, semnul egal avînd loc numai în punctul x_0.

Într-adevăr este uşor de arătat că putem prelungi funcţia $u(x)$ în întreg intervalul (a, b), astfel încît să se păstreze inegalitatea $L(u) > 0$ în tot acest interval (a, b) şi de asemenea să se păstreze proprietatea de continuitate a derivatei de ordinul 2 a funcţiei $u(x)$ în (a, b) adică funcţia obţinută prin prelungirea funcţiei iniţiale $u(x)$, să aparţină clasei $C_2(a, b)$.

Pentru aceasta, considerăm intervalul $[b_1, b)$ şi considerăm referitor la acest interval, integrala $\beta(x)$ a ecuaţiei diferenţiale

$$L(y) = L(u)|_{x=b_1}$$

cu condiţiile la limită

$$\beta(b_1) = u(b_1),$$

$$\beta'(b_1) = u'(b_1).$$

Funcţia $\beta(x)$ astfel definită, mai are proprietatea că $\beta''(b_1) = u''(b_1)$, ceea ce se deduce din ecuaţia diferenţială ce defineşte pe $\beta(x)$. Această funcţie $\beta(x)$, prin felul cum a fost construită, verifică în intervalul $[b_1\ b)$ inegalitatea diferenţială $L[\beta(x)] > 0$.

În mod analog, considerăm în intervalul $(a, a_1]$ integrala $\alpha(x)$ a ecuaţiei diferenţiale

$$L(y) = L(u)|_{x=a_1}$$

cu condiţiile la limită

$$\alpha(a_1) = u(a_1),$$

$$\alpha'(a_1) = u'(a_1).$$

Această soluţie $\alpha(x)$ evident că va mai satisface condiţia $\alpha''(a_1) = u''(a_1)$ şi $L[\alpha(x)] > 0$, cînd $x \in (a, a_1]$.

Fie acum $u^*(x)$ funcţia definită precum urmează:

$$u^*(x) = \begin{cases} \alpha(x) \text{ dacă } x \in (a, a_1), \\ u(x) \text{ dacă } x \in [a_1, b_1], \\ \beta(x) \text{ dacă } x \in (b_1, b). \end{cases}$$

Această funcţie admite derivate pînă la ordinul doi inclusiv, continue în intervalul (a, b) şi satisface în acest interval inegalitatea $L(u^*) > 0$. Întrucît prin ipoteză funcţia $u(x)$ satisface condiţiile $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, unde $x_0 \in [a_1, b_1]$, rezultă că şi funcţia $u^*(x)$ va satisface aceste condiţii. Conform proprietăţii $T_2(a, b)$ a operatorului diferenţial $L(y)$, urmează că $u^*(x) \geqq 0$ în intervalul (a, b), semnul egal avînd loc numai în punctul x_0. De aici rezultă lema enunţată.

În cele ce urmează vom stabili încă o proprietate ajutătoare.

L e m a 6. *Dacă operatorul diferenţial $L(y)$ are proprietatea $T_2(a, b)$, atunci orice funcţie $u(x)$, aparţinînd clasei $C_2(a, b)$ şi care satisface în intervalul (a, b) inegalitatea diferenţială $L(u) > 0$, nu poate să se anuleze în (a, b) în mai mult de două puncte distincte.*

Demonstraţie. Presupunem că operatorul diferenţial $L(y)$ se bucură de proprietatea $T_2(a, b)$. Să arătăm că în această ipoteză, orice funcţie $u(x)$ aparţinînd clasei $C_2(a, b)$ şi satisfăcînd în acest interval inegalitatea diferenţială $L(u) > 0$ nu poate avea în (a, b) mai mult de două rădăcini distincte. Să presupunem prin absurd contrariu, că există o funcţie $u(x)$ aparţinînd clasei $C_2(a, b)$, care satisface în intervalul (a, b) inegalitatea diferenţială $L(u) > 0$ şi care are cel puţin 3 rădăcini distincte x_1, x_2, x_3 (pe care le presupunem consecutive şi scrise în ordinea crescătoare)[1]). Întrucît operatorul diferenţial $L(y)$ posedă prin ipoteză proprietatea $T_2(a, b)$, rezultă că nici una dintre rădăcinile x_1, x_2, x_3 nu poate fi multiplă şi deci curba reprezentativă a funcţiei $u(x)$ traversează axa Ox în fiecare din punctele x_1, x_2, x_3 (fig. 2). Se pot prezenta următoarele două cazuri, după cum $u'(x_1) > 0$ sau $u'(x_1) < 0$ (cazul $u'(x_1) = 0$ nu poate avea loc, după cum s-a arătat anterior).

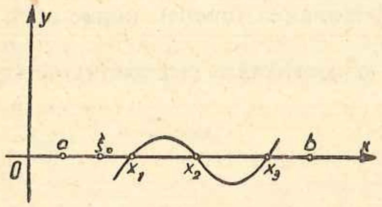

Fig. 2

Cazul 1. $u'(x_1) > 0$, (fig. 2). Fie ξ_0 un punct oarecare din (a, x_1), astfel ca să nu existe nici o rădăcină a funcţiei $u(x)$ în intervalul $[\xi_0, x_1)$. Fie $\eta(x)$ integrala ecuaţiei diferenţiale $L(y) = 1$, cu condiţiile la limită

$$\eta(\xi_0) = 0, \qquad \eta'(\xi_0) = 0$$

Conform proprietăţii $T_2(a, b)$ a operatorului diferenţial $L(y)$, rezultă că $\eta(x) > 0$ în intervalul (ξ_0, b). Să efectuăm în expresia operatorului diferenţial L, schimbarea de funcţie $y(x) = \eta(x) z(x)$. Obţinem

$$L(y) \equiv \eta(x)\left[z'' + \left(\frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)}\right) z' + \frac{L(\eta)}{\eta(x)} z\right] \equiv$$

$$\equiv \eta(x)\left[z'' + \left(\frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)}\right) z' + \frac{z}{\eta(x)}\right] \equiv \eta(x)\, L^*(z).$$

Funcţia $u(x)$ se va transforma într-o funcţie $v(x) = \dfrac{u(x)}{\eta(x)}$, care va avea aceleaşi rădăcini ca şi $u(x)$ în (ξ_0, b) şi în plus va satisface condiţia $\lim\limits_{x \to \xi_0 + 0} v(x) = -\infty$. De asemenea, funcţia $v(x)$ satisface în intervalul (ξ_0, b) inegalitatea $L^*(v) > 0$.

Se constată uşor că şi operatorul diferenţial $L^*(z)$ are proprietatea $T_2(\xi_0, b)$, întrucît operatorul $L(y)$ are această proprietate după cum rezultă din lema 5, ţinînd seamă de ipotezele făcute.

Cu aceste rezultate obţinute referitor la operatorul $L^*(z)$, să arătăm că inegalitatea $L^*(v) > 0$ în (ξ_0, b) este în contradicţie cu forma pe care o are curba reprezentativă a funcţiei $v(x)$ (fig. 3).

Într-adevăr, fie x_0 un punct din intervalul (x_2, x_3), în care funcţia $v(x)$ îşi atinge valoarea minimă din acel interval. Fie $\lambda = -v(x_0)$. Evident că $\lambda > 0$, întrucît

---

1) Se constată că funcţia $u(x)$ nu poate avea o infinitate de rădăcini în intervalul (a, b), avînd un punct de acumulare ξ în intervalul (a, b), căci în caz afirmativ, din continuitatea funcţiei $u(x)$ precum şi a derivatei sale $u'(x)$, ar rezulta că $u(\xi) = u'(\xi) = 0$ şi proprietatea $T_2(a, b)$ a operatorului L ar fi contrazisă.

în intervalul (x_2, x_3) funcţia $u(x)$ deci şi $v(x)$ ia valori negative, ceea ce rezultă din ipotezele făcute. Să efectuăm asupra curbei reprezentative (v) a funcţiei $v(x)$ o translaţie în direcţia pozitivă a axei Oy, de parametru λ. Curba (v) va lua poziţia (v^*) indicată în figura 3 cu linie punctată. Această nouă curbă va fi tangentă la axa Ox în punctul x_0 şi va traversa axa Ox într-un punct situat în intervalul (ξ_0, x_1). Ecuaţia acestei curbe (v^*) va fi $y = v^*(x) = v(x) + \lambda$.

Dar după cum s-a arătat anterior, are loc în intervalul (ξ_0, b) inegalitatea

$$L^*(v) = v'' + \frac{(2\eta' + p\eta)}{\eta(x)} v' + \frac{v}{\eta(x)} > 0, \; x \in (\xi_0, b).$$

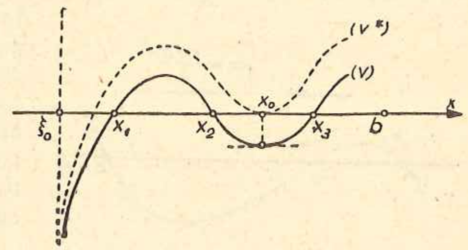

Fig. 3

De aici rezultă că şi funcţia $v^*(x)$ satisface o inegalitate de acelaşi fel în intervalul (ξ_0, b). Într-adevăr, ţinînd seama că λ este o constantă pozitivă, precum şi de inegalitatea precedentă, obţinem

$$L^*(v^*) = L^*(v) + \frac{\lambda}{\eta(x)} > 0, \; x \in (\xi_0, b).$$

Funcţia $v^*(x)$ mai verifică condiţiile $v^*(x_0) = 0$, $\left(\dfrac{dv^*}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$. Întrucît operatorul diferenţial $L^*(z)$ posedă proprietatea $T_2(\xi_0, b)$, rezultă că funcţia $v^*(x)$ trebuie să satisfacă inegalitatea $v^*(x) \geqq 0$ în intervalul (ξ_0, b), ceea ce contrazice faptul că curba (v^*) traversează axa Ox în intervalul (ξ_0, x_1). Contradicţia provine din ipoteza absurdă că funcţia $u(x)$, satisfăcînd în intervalul (a, b) inegalitatea $L(u) > 0$, ar avea în acest interval mai mult de două rădăcini distincte (în ipoteza specifică cazului 1).

Cazul 2. $u'(x_1) < 0$. În acest caz, punctul ξ_0 se alege astfel încît să fie situat în intervalul (x_3, b) şi să nu coincidă cu vreo altă rădăcină a funcţiei $u(x)$. Se procedează mai departe întocmai ca în cazul 1. Ajungem astfel la următorul rezultat:

Dacă operatorul diferenţial $L(y)$ posedă proprietatea $T_2(a, b)$, atunci orice funcţie $u(x)$ aparţinînd clasei $C_2(a, b)$ şi satisfăcînd în intervalul (a, b) inegalitatea diferenţială $L(u) > 0$ nu poate avea în intervalul (a, b) mai mult de două rădăcini distincte, ceea ce înseamnă că nu poate lua valori egale cu valorile vreunei funcţii din familia Y_0 în mai mult de două puncte distincte din (a, b).

L e m a 6'. *Dacă coeficienţii ecuaţiei diferenţiale (2) sînt continui în intervalul închis* $[a, b]$ *şi dacă operatorul diferenţial* $L(y)$ *ce intervine în membrul stîng al ecuaţiei (2) are proprietatea* $T_2[a, b]$, *atunci orice funcţie* $u(x)$ *aparţinînd clasei* $C_2[a, b]$ *şi satisfăcînd în intervalul* $[a, b]$ *inegalitatea diferenţială* $L(u) > 0$, *nu poate avea în intervalul* $[a, b]$ *mai mult de două rădăcini distincte.*

Demonstraţia acestei leme se face la fel ca în cazul lemei 6, cu singura deosebire că peste tot trebuie considerat în locul intervalului deschis (a, b), intervalul închis $[a, b]$ şi că în afară de cazurile 1 şi 2 în care se presupune că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale funcţiei $u(x)$, ce satisface în $[a, b]$ inegalitatea $L(u) > 0$, sînt interioare acestui interval, — ar mai trebui considerate cazurile cînd una sau eventual două dintre rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale acestei funcţii $u(x)$ ar coincide respectiv cu capetele intervalului $[a, b]$. Fie de exemplu cazul cînd $x_1 = a$, $x_3 = b$, $a < x_2 < b$ (fig. 4). Putem reduce acest caz la unul din cazurile 1 sau 2 astfel: Prelungim funcţia $u(x)$ în afara intervalului $[a, b]$ cu polinoame de gradul 2, care să coincidă cu $u(x)$ în capetele a, respectiv b, coincidenţa avînd loc pînă la derivatele de ordinul 2. Obţinem astfel o funcţie $\bar{u}(x)$, definită pe toată axa şi admiţînd derivate de ordinul 2 inclusiv, continue pe toată axa Ox şi în plus, $\bar{u}(x)$ coincide cu $u(x)$ în intervalul $[a, b]$.

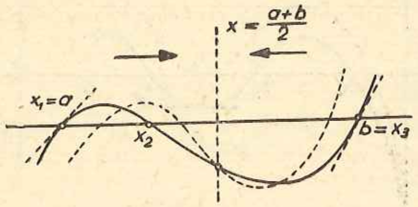

Fig. 4

Efectuăm asupra curbei de ecuaţie $y = \bar{u}(x)$ o contracţie infinitezimală în spre mediatoarea segmentului $[a, b]$ (fig. 4), astfel încît să se menţină inegalitatea strictă $L(\bar{u}) > 0$ în $[a, b]$. Putem considera de exemplu transformarea

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{a+b}{2} + \lambda\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right), \\ \eta = y, \end{cases}$$

unde λ este un număr real ce satisface inegalităţile $0 < \lambda < 1$ şi suficient de aproape de unitate. Ecuaţia curbei transformate va fi

$$y = \bar{u}^*(x) = \bar{u}\left[\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\lambda}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Această curbă va avea forma indicată prin linie punctată în figura 4 şi va tăia axa Ox în trei puncte distincte x_1, x_2, x_3, toate interioare intervalului $[a, b]$. Dacă parametrul λ se alege suficient de aproape de unitate (şi mai mic ca 1), atunci pentru motive de continuitate a coeficienţilor ecuaţiei diferenţiale, se va menţine inegalitatea $L(\bar{u}^*) > 0$ în intervalul $[a, b]$. Astfel am redus acest caz singular la cazul 1 din lema 6.

Pentru uşurinţa exprimării în cele ce urmează, vom da următoarea :

Definiţia 4. Fie dat un operator diferenţial liniar de ordinul doi

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y, \tag{6}$$

coeficienţii $p(x)$ şi $q(x)$ fiind funcţii continue într-un interval (a, b). Vom spune că operatorul $L(y)$ posedă proprietatea $P_2(a, b)$ dacă oricare ar fi numerele reale x_0, y_0', y_0'', astfel ca

$$a < x_0 < b, \quad y_0' < 0, \tag{7}$$

$$y_0'' + p(x_0)y_0' > 0 \tag{8}$$

şi dacă oricît de mic ar fi numărul ε satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon \leqq b - x_0$, atunci pentru sistemul de numere $x_0, y_0', y_0'', \varepsilon$, există cel puţin un număr $\lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

şi cel puţin o funcţie $r_\lambda(x)$, continuă în (a, b), satisfăcînd în intervalul închis $[x_0, \lambda]$ inegalitatea

$$r_\lambda(x) > 0, \quad x \in [x_0, \lambda] \tag{9}$$

astfel încît pentru această funcţie $r_\lambda(x)$, ecuaţia diferenţială

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r_\lambda(x) \tag{10}$$

să admită în intervalul (a, b) o integrală particulară $y_\lambda(x)$ care să satisfacă condiţiile

$$\begin{aligned} y_\lambda(x_0) &= y_\lambda(\lambda) = 0, \\ y_\lambda'(x_0) &= y_0', \\ y_\lambda''(x_0) &= y_0'', \end{aligned} \tag{11}$$

unde x_0, y_0', y_0'' sînt numerele alese conform condiţiilor (7) şi (8).

L e m a 7. *Dacă coeficienţii $p(x)$ şi $q(x)$ ai operatorului diferenţial $L(y)$ din* (6) *sînt continui în intervalul (a, b), atunci operatorul $L(y)$ are proprietatea $P_2(a, b)$.*

Demonstraţie. Înainte de a trece la demonstraţia propriu-zisă a acestei leme, vom face cîteva observaţii preliminare, pe care le vom folosi în demonstraţie.

Observaţia 1. Pentru a arăta că operatorul $L(y)$ are proprietatea $P_2(a, b)$ este suficient să arătăm că acel operator are proprietatea $P_2(a_1, b_1)$ oricare ar fi subintervalul (a_1, b_1) astfel ca $a < a_1 < b_1 < b$. Reducînd demonstraţia lemei 7 la cazul unui subinterval (a_1, b_1), avem avantajul de a putea dispune de proprietatea de continuitate a coeficienţilor $p(x)$ şi $q(x)$ în intervalul închis $[a_1, b_1]$ precum şi de toate proprietăţile ce decurg din aceasta.

Observaţia 2. Fie $\eta(x)$ o funcţie oarecare aparţinînd clasei $C_2(a, b)$ şi satisfăcînd inegalitatea $\eta(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (a, b)$. Efectuînd în expresia operatorului (6) schimbarea de funcţie

$$y = \eta(x)z(x) \tag{12}$$

obţinem

$$L(y) \equiv \eta(x)\left[z'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)}z' + \frac{L(\eta)}{\eta(x)}z\right] \equiv \eta(x)\bar{L}(z). \tag{13}$$

Întrucît $\eta(x) \in C_2(a, b)$, rezultă că operatorul diferenţial $\bar{L}(z)$ are coeficienţii continui în (a, b). Să notăm cu $\bar{p}(x)$ respectiv $\bar{q}(x)$ coeficienţii operatorului $\bar{L}(z)$, adică

$$\bar{p}(x) = \frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)}, \quad \bar{q}(x) = \frac{L(\eta)}{\eta(x)}. \tag{14}$$

Ţinînd seama de pozitivitatea funcţiei $\eta(x)$ în intervalul (a, b) se verifică că dacă operatorul $L(y)$ are proprietatea $P_2(a, b)$, atunci şi operatorul $\bar{L}(z)$ are proprietatea $P_2(a, b)$ şi reciproc. Pentru ilustrare, să demonstrăm de exemplu reciproca afirmaţiei de mai sus că dacă operatorul $\bar{L}(z)$ are proprietatea $P_2(a, b)$, atunci şi operatorul $L(y)$ are proprietatea $P_2(a, b)$. Fie în acest scop un sistem de numere x_0,

y'_0, y''_0 satisfăcînd condiţiile (7) şi (8) şi fie x_0, z'_0, z''_0 sistemul corespunzător de numere, obţinut cu ajutorul relaţiei (12), ţinînd seama de (11)

$$z_0' = \frac{y_0'}{\eta_0}, \quad z_0'' = \frac{1}{\eta_0^2}(\eta_0 y_0'' - 2\eta_0' y_0'). \tag{15}$$

Aici s-a notat $\eta_0 = \eta(x_0)$. Ţinînd seama de relaţiile (7), (8), (14), precum şi de pozitivitatea funcţiei $\eta(x)$, se verifică că numerele z_0', z_0'' din (15) satisfac inegalităţile $z_0' < 0$, $z_0'' + \bar{p}(x_0) z_0' > 0$, ceea ce ne arată că numerele z_0' şi z_0'' satisfac condiţiile (7) şi (8) relativ la operatorul $\bar{L}(z)$. Întrucît prin ipoteză operatorul $\bar{L}(z)$ are proprietatea $P_2(a, b)$, rezultă că oricare ar fi numărul real ε astfel ca $0 < \varepsilon \leqq b - x_0$, există cel puţin un număr $\lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ şi cel puţin o funcţie $\bar{r}_\lambda(x)$ continuă în (a, b), satisfăcînd în intervalul $[x_0, \lambda]$ inegalitatea

$$\bar{r}_\lambda(x) > 0, \quad x \in [x_0, \lambda] \tag{16}$$

astfel încît pentru această funcţie $\bar{r}_\lambda(x)$, ecuaţia diferenţială în funcţia necunoscută $z(x)$

$$\bar{L}(z) = z'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta(x)} z' + \frac{L(\eta)}{\eta(x)} z = \bar{r}_\lambda(x) \tag{17}$$

să admită în intervalul (a, b) o integrală particulară $z_\lambda(x)$ satisfăcînd condiţiile

$$\begin{aligned} z_\lambda(x_0) &= z_\lambda(\lambda) = 0, \\ z_\lambda'(x_0) &= z_0', \\ z_\lambda''(x_0) &= z_0'', \end{aligned} \tag{18}$$

unde z_0' şi z_0'' sînt numerele date de (15).

Referindu-ne acum la operatorul diferenţial $L(y)$, se verifică că funcţia

$$y_\lambda(x) = \eta(x) z_\lambda(x), \tag{19}$$

(unde $z_\lambda(x)$ este funcţia pusă în evidenţă anterior), este o integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$L(y) = \eta(x)\bar{r}_\lambda(x), \text{ unde } \eta(x)\bar{r}_\lambda(x) > 0 \text{ în } [x_0, \lambda] \tag{20}$$

şi satisface condiţiile la limită

$$\begin{aligned} y_\lambda(x_0) &= y_\lambda(\lambda) = 0, \\ y_\lambda'(x_0) &= y_0', \\ y_\lambda''(x_0) &= y_0''. \end{aligned} \tag{21}$$

Verificarea faptului că funcţia $y_\lambda(x)$ dată de (19) satisface ecuaţia (20), este imediată. Verificarea condiţiilor (21) se face ţinînd seama de relaţiile (19), (18) şi (15). Întrucît sistemul de numere x_0, y_0', y_0'' a fost presupus arbitrar satisfăcînd condiţiile (7) şi (8) şi întrucît şi numărul ε a fost presupus arbitrar satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon \leqq b - x_0$, rezultă că operatorul $L(y)$ are proprietatea $P_2(a, b)$.

Observaţia 3. Fie (a_1, b_1) un subinterval oarecare al intervalului (a, b), astfel încît $a < a_1 < b_1 < b$. Pentru intervalul (a_1, b_1) există cel puţin o funcţie $\eta(x) \in C_2(-\infty, +\infty)$, pozitivă în intervalul $(-\infty, +\infty)$ astfel încît efectuînd în expresia operatorului $L(y)$ schimbarea de funcţie (12), operatorul corespunzător $\bar{L}(z)$ să aibe coeficientul $\bar{p}(x)$ negativ în intervalul închis $[a_1, b_1]$.

Într-adevăr, fie $M = \max\limits_{[a_1, b_1]} p(x)$ şi fie $\eta(x)$ o integrală pozitivă a ecuaţiei

$$2\eta' + (M + 1)\eta = 0.$$

Putem lua $\eta(x) = e^{-\frac{M+1}{2}x}$; atunci conform formulei (14), expresia coeficientului $\bar{p}(x)$ va fi

$$\bar{p}(x) = \frac{2\eta' + p\eta}{\eta} = p(x) - M - 1 \leqq -1, \quad \text{pentru } x \in [a_1, b_1].$$

*

Să trecem acum la demonstraţia propriu-zisă a lemei 7. În baza observaţiilor 1, 2, 3 făcute mai sus, rezultă că pentru a demonstra lema 7 este suficient să arătăm că orice operator diferenţial $L(y)$ de forma (6), avînd coeficienţii continui în intervalul *închis* $[a, b]$ şi $p(x) < 0$ în acest interval, are proprietatea $P_2(a, b)$. Presupunem deci că coeficienţii operatorului $L(y)$ din (6) sînt continui în $[a, b]$ şi că $p(x) < 0$ în $[a, b]$. Fie x_0, y_0', y_0'' un sistem de numere reale satisfăcînd condiţiile (7) şi (8). Putem considera întotdeauna $x_0 = 0$, ceea ce se poate realiza efectuînd asupra variabilei independente translaţia $X = x - x_0$. O astfel de schimbare de variabilă este permisă cu condiţia ca în locul proprietăţii $P_2(a, b)$ să se considere proprietatea $P_2(a - x_0, b - x_0)$.

Vom presupune deci în cele ce urmează că $x_0 = 0$ şi că intervalul (a, b) conţine originea $x_0 = 0$. În aceste ipoteze fie ecuaţia diferenţială

$$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x), \tag{22}$$

în care termenul liber $f(x)$ îl privim ca funcţie nedeterminată în $[a, b]$. În ipoteza că $f(x)$ este continuă în $[a, b]$, ne propunem întîi să găsim forma integralei ecuaţiei (22), care să satisfacă condiţiile

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y''(0) = y_0''. \tag{23}$$

În acest scop să considerăm ecuaţia omogenă corespunzătoare

$$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{24}$$

şi fie $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ două integrale particulare ale ecuaţiei (24), formînd un sistem fundamental în $[a, b]$. Atunci, după cum se ştie, integrala generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (24) se poate scrie

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_0^x G(x, s) f(s)\, ds, \tag{25}$$

unde s-a notat

$$G(x,s) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(s) & y_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}}. \tag{26}$$

Formula (25) se poate obţine cu uşurinţă, aplicînd pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (22) metoda variaţiei constantelor.

Să luăm pentru $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ integralele care satisfac condiţiile

$$y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = y_0' < 0, \tag{27}$$
$$y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0,$$

unde y_0' este numărul dat anterior. Cu aceste precizări, ţinînd seama de (25), se obţine îndată că integrala particulară a ecuaţiei (22), care satisface primele două condiţii din (23) este dată de formula

$$y(x) = y_1(x) + \int_0^x G(x,s) f(s)\, ds. \tag{28}$$

De aici deducem

$$y''(x) = y_1''(x) + f(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} f(s)\, ds.$$

Înlocuind în această relaţie $x = 0$ şi ţinînd seamă de faptul că

$$y_1''(0) = -p(0) y_0'$$

ceea ce se obţine din ecuaţia (24), rezultă că

$$y''(0) = -p_0 y_0' + f(0),\quad p_0 = p(0).$$

Scriind că a treia condiţie din (23) este verificată, se obţine pentru funcţia $f(x)$ condiţia

$$f(0) = y_0'' + p_0 y_0'. \tag{29}$$

Fie acum λ un număr oarecare din intervalul $(x_0 = 0, b)$. Impunem integralei $y(x)$ din (28) condiţia $y(\lambda) = 0$, adică

$$y_1(\lambda) + \int_0^\lambda G(\lambda, s) f(s)\, ds = 0. \tag{30}$$

Această egalitate constituie de asemenea o condiţie pentru $f(x)$. Încercăm să satisfacem condiţiile (29) şi (30) luînd pentru $f(x)$ un polinom de gradul întîi în variabila x, adică

$$f(x) = \alpha x + \beta. \tag{31}$$

Pentru ca să fie îndeplinită condiţia (29), trebuie să luăm

$$\beta = y_0'' + p_0 y_0'.$$

Înlocuind pe $f(x)$ din (31) în (30) şi ţinînd seama de valoarea găsită pentru β, se poate determina coeficientul α. Înlocuind în (31) coeficienţii α şi β astfel determinaţi, se obţine pentru $f(x)$ expresia

$$f_\lambda(x) = -\frac{(y_0'' + p_0 y_0') \int_0^\lambda G(\lambda, s)\, ds + y_1(\lambda)}{\int_0^\lambda G(\lambda, s)\, s\, ds}\, x + y_0'' + p_0 y_0'. \tag{31'}$$

Formula (31′) are sens întrucît numitorul coeficientului lui x nu se anulează dacă λ este suficient de aproape de zero. Această afirmaţie rezultă dintr-o teoremă de existenţă relativă la probleme la limită polilocale dată de către de la Vallée Poussin [8].

Să demonstrăm acuma că dacă numărul pozitiv λ este suficient de aproape de zero, atunci funcţia $f_\lambda(x)$ din (31′) satisface inegalitatea $f_\lambda(x) > 0$ pentru $x \in [0, \lambda]$. În acest scop, ţinînd seamă că $f_\lambda(x)$ este un polinom de gradul 1, este suficient să verificăm că $f_\lambda(0) > 0$ şi $f_\lambda(\lambda) > 0$ dacă λ este suficient de aproape de zero.

Inegalitatea $f_\lambda(0) > 0$ rezultă îndată din faptul că sistemul de numere $x_0 = 0$, y_0', y_0'' ales anterior, satisface condiţia (8).

Să dovedim acuma că pentru valori pozitive λ, suficient de aproape de zero are loc inegalitatea $f_\lambda(\lambda) > 0$. În acest scop vom arăta că $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} f_\lambda(\lambda) > 0$. Primul termen din (31′) prezintă o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ cînd $\lambda \to 0^+$. Aplicînd regula lui l'Hôspital şi notînd pentru prescurtare $y_0'' + p_0 y_0' = A^2$, obţinem

$$J = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{-\lambda \left[A^2 \int_0^\lambda G(\lambda, s)\, ds + y_1(\lambda) \right]}{\int_0^\lambda G(\lambda, s)\, s ds} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{-\left[A^2 \int_0^\lambda G(\lambda, s)\, ds + y_1(\lambda) \right] - \lambda \left[A^2 \int_0^\lambda \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\lambda} ds + y_1'(\lambda) \right]}{\int_0^\lambda \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\lambda} s\, ds}.$$

Dar şi termenul din membru drept al egalităţii de mai sus prezintă o nedeterminare tot de forma $\frac{0}{0}$ cînd $\lambda \to 0^+$. Aplicînd încă o dată regula lui l'Hôspital, obţinem

$$J = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{-2\left[A^2 \int_0^\lambda \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=\lambda} ds + y_1'(\lambda)\right] - \lambda\left[A^2\left(1 + \int_0^\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{x=\lambda} ds\right) + y_1''(\lambda)\right]}{\lambda + \int_0^\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{x=\lambda} s\, ds}. \tag{32}$$

Să arătăm acuma că există un număr pozitiv δ (suficient de mic) astfel încît oricare ar fi $\lambda \in (0, \delta)$, numitorul fracţiei din (32) să fie pozitiv. Pentru aceasta este suficient să arătăm că funcţia $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{x=\lambda}$ de variabilele λ şi s este pozitivă într-un domeniu triunghiular definit de inegalităţile $0 < s < \lambda$, $0 < \lambda < \delta$, sau ceea ce este echivalent — că funcţia $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ de variabile x şi s este pozitivă într-un domeniu $0 < s < \lambda$ şi $0 < \lambda < \delta$ (δ fiind un număr pozitiv suficient de mic). Într-adevăr, din (26), ţinînd seamă de condiţiile (27) deducem

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\ s=0}} = -\frac{\begin{vmatrix} y_1''(0) & y_2''(0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_0' & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y_1''(0)}{y_0'}. \tag{33}$$

Din ecuaţia (24) deducem că $y''_1(0) = -p_0 y'_1(0) - q_0 y_1(0)$ şi ţinînd seama de (27), obţinem $y''_1(0) = -p_0 y'_0$. Înlocuind în (33) obţinem că $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\ s=0}} = -p_0$.

Deoarece prin ipoteză $p(x) < 0$, rezultă în particular $p_0 < 0$ şi deci că

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\ s=0}} > 0. \tag{34}$$

Deoarece coeficienţii $p(x)$ şi $q(x)$ sînt prin ipoteză funcţii continue în $[a, b]$, rezultă că şi $y''_1(x)$ şi $y''_2(x)$ sînt continue în $[a, b]$, ca integrale ale ecuaţiei diferenţiale (24) şi deci că şi funcţia $\frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x}$ de variabile x şi s este continuă în domeniul $\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, care conţine prin ipoteză punctul $(x = 0, s = 0)$. Rezultă în definitiv că integrala $\int_0^\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{x=\lambda} ds$ este pozitivă cînd λ este un număr pozitiv

suficient de mic, şi de asemenea că numitorul fracţiei (32) tinde către 0^+ cînd $\lambda \to 0^+$. Astfel obţinem pentru limita din (32)

$$J = \frac{-2y'_1(0)}{0^+} = \frac{-2y'_0}{0^+} = +\infty$$

întrucît prin ipoteză $y'_0 < 0$.

Rezultă deci că dacă numărul pozitiv λ este suficient de mic, atunci funcţia $f_\lambda(x)$ din (31′) satisface inegalitatea $f_\lambda(x) > 0$, cînd $x \in [0, \lambda]$. Cu aceasta lema 7 este complet demonstrată.

Absolut la fel se stabileşte proprietatea $P_2[a, b)$ în cazul cînd coeficienţii $p(x)$ şi $q(x)$ ai operatorului diferenţial $L(y)$ sînt continui în intervalul $[a, b)$. Lema 7 stabilită anterior se poate enunţa sub următoarea formă mai sugestivă:

L e m a 7′. *Fie $L(y)$ un operator diferenţial linear de forma (6), avînd coeficienţii $p(x)$ şi $q(x)$ continui într-un interval (a, b) şi fie $u(x)$ o funcţie oarecare din clasa $C_2(a, b)$, satisfăcînd într-un punct x_0 din (a, b) condiţiile:*

1° $u(x_0) = 0$,

2° $u'(x_0) < 0$,

3° $L(u)\big|_{x=x_0} > 0$.

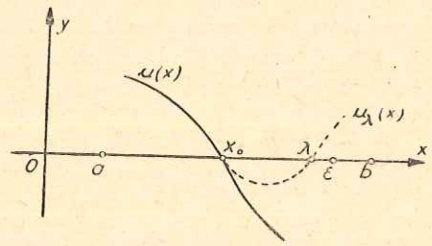

Fig. 5

Atunci oricare ar fi numărul pozitiv ε satisfăcînd inegalitatea $\varepsilon < b - x_0$, pentru aceasta există un număr $\lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ şi o funcţie $y_\lambda(x) \in C_2(a, b)$ satisfăcînd condiţiile

α) $y_\lambda(x_0) = u(x_0) = 0$, $y_\lambda(\lambda) = 0$,

β) $y'_\lambda(x_0) = u'(x_0)$,

γ) $y''_\lambda(x) = u''(x_0)$,

δ) $L(y_\lambda) > 0$ *pentru orice* $x \in [x_0, \lambda]$.

Demonstraţie. Referindu-ne la enunţul lemei 7, să considerăm sistemul de numere $x_0, y'_0 = u'(x_0)$, $y''_0 = u''(x_0)$. Conform ipotezelor 2° şi 3° din enunţul lemei 7 rezultă că numerele x_0, y'_0, y''_0 astfel alese, satisfac condiţiile (7) şi (8) relativ la operatorul $L(y)$ considerat. Atunci conform lemei 7, pentru orice număr pozitiv ε satisfăcînd inegalitatea $\varepsilon < b - x_0$ există cel puţin un număr $\lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ şi cel puţin o funcţie $r_\lambda(x)$ continuă în (a, b), satisfăcînd inegalitatea $r_\lambda(x) > 0$ pentru $x \in [x_0, \lambda]$ astfel încît pentru această funcţie $r_\lambda(x)$, ecuaţia diferenţială

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r_\lambda(x)$$

să admită în (a, b) o integrală particulară $y_\lambda(x)$, satisfăcînd condiţiile α), β), γ). Evident că această integrală aparţine clasei $C_2(a, b)$ şi satisface şi condiţia δ), întrucît $r_\lambda(x) > 0$ în intervalul $[x_0, \lambda]$.

Definiţia 5. Fie F o familie de funcţii $f(x)$ definite într-un interval oarecare J, care poate fi deschis, închis sau semi-închis. Spunem că o funcţie $u(x)$ definită în intervalul J este convexă în acest interval față de familia F, dacă satisface următoarelor condiții:

1° Nu poate lua valori egale cu valorile vreunei funcții $f(x) \in F$ în mai mult de două puncte distincte ale intervalului J.

2° Dacă $u(x)$ ia valori egale cu valorile vreunei funcții $f(x) \in F$ în două puncte distincte $x_1 < x_2$ din intervalul J, adică $u(x_i) = f(x_i)$, $i = 1,2$, atunci să aibe loc inegalitățile $u(x) < f(x)$ în intervalul (x_1, x_2) și $u(x) > f(x)$ pe mulțimea punctelor din intervalul J care nu aparțin intervalului $[x_1, x_2]$.

O definiție analoagă cu aceasta, într-un sens mai general, a fost considerată de E. Moldovan în lucrarea « *O generalizare a noțiunii de convexitate* », comunicată la Congresul al IV-lea al Matematicienilor Romîni, ținut la București, 27 mai — 4 iunie 1956.

Cu această definiție are loc

L e m a 8. *Dacă operatorul diferențial $L(y)$ din (6) are proprietatea $T_2(a, b)$ atunci orice funcție $u(x) \in C_2(a, b)$, care satisface în intervalul (a, b) inegalitatea diferențială $L(u) > 0$, este în intervalul (a, b) convexă față de familia integralelor ecuației diferențiale omogene $L(y) = 0$.*

Demonstrație. Pentru demonstrarea acestei leme, observăm că este suficient să arătăm că în ipoteza că $L(y)$ are proprietatea $T_2(a, b)$, atunci oricare ar fi funcția $u(x)$ aparținînd clasei $C_2(a, b)$ și satisfăcînd în intervalul (a, b) inegalitatea diferențială $L(u) > 0$, — funcția $u(x)$ nu poate avea în (a, b) mai mult de două rădăcini distincte și în cazul cînd s-ar anula în două puncte $x_1 < x_2$ din (a, b), atunci au loc inegalitățile:

$$\begin{aligned} &u(x) < 0 \text{ în } (x_1, x_2), \\ &u(x) > 0 \text{ în } (a, x_1) \text{ și în } (x_2, b). \end{aligned} \tag{35}$$

Faptul că o astfel de funcție $u(x)$ nu se poate anula în intervalul (a, b) în mai mult de două puncte, rezultă din lema 6. Să presupunem acum că o funcție $u(x) \in C_2(a, b)$, satisfăcînd în (a, b) inegalitatea diferențială $L(u) > 0$, se anulează în intervalul (a, b) în două puncte $x_1 < x_2$. Să arătăm că în aceste condiții au loc inegalitățile (35). În acest scop să presupunem prin absurd că funcția $u(x)$ nu ar satisface inegalitățile (35). Atunci întrucît rădăcinile x_1 și x_2 sînt simple, conform proprietății $T_2(a, b)$ a operatorului $L(y)$, și întrucît prin ipoteză x_1 și x_2 sînt singurele rădăcini ale funcției $u(x)$ în (a, b), rezultă că $u(x)$ satisface următoarele inegalități, contrarii inegalităților (35)

$$\begin{aligned} &u(x) > 0 \text{ în } (x_1, x_2), \\ &u(x) < 0 \text{ în } (a, x_1) \text{ și în } (x_2, b) \end{aligned} \tag{36}$$

și are deci forma indicată din figura 6. Observăm că funcția $u(x)$ satisface în punctul x_2 condițiile 1°, 2°, 3° din enunțul lemei 7′. Atunci conform lemei 7′, există un număr $\lambda \in (x_2, b)$ și o funcție $y_\lambda(x) \in C_2(a, b)$ satisfăcînd condițiile:

$$\begin{aligned} y_\lambda(x_2) &= y_\lambda(\lambda) = 0 \\ y'_\lambda(x_2) &= u'(x_2) \\ y''_\lambda(x_2) &= u''(x_2) \\ L(y_\lambda) &> 0 \text{ pentru } x \in [x_2, \lambda]. \end{aligned} \tag{37}$$

Considerăm funcția $U(x)$ definită în (a, b) precum urmează:

$$U(x) = \begin{cases} u(x) \text{ dacă } x \in (a, x_2), \\ y_\lambda(x) \text{ dacă } x \in [x_2, b). \end{cases}$$

Ținînd seama de (37), rezultă că $U(x) \in C_2(a,b)$ și deci că $L(U)$ este o funcție continuă în (a, b) și în particular în punctul $x_2 \in (a, b)$. Ținînd seama de definiția funcției $U(x)$ precum și de ultima relație din (37), rezultă că $L(U) > 0$ în intervalul semiînchis $(a, \lambda]$ și cum funcția $L(U)$ de variabilă x este continuă în (a, b), rezultă că ea continuă să ia valori pozitive și la dreapta punctului $x = \lambda$ într-o vecinătate de forma $[\lambda, b_1)$, unde b_1 satisface inegalitățile $\lambda < b_1 < b$. Rezultă în definitiv că funcția $U(x)$ satisface inegalitatea $L(U) > 0$ în întreg intervalul (a, b_1). Întrucît prin ipoteză operatorul $L(y)$ are proprietatea $T_2(a, b)$, rezultă că el va avea și proprietatea $T_2(a, b_1)$, întrucît intervalul (a, b_1) este un subinterval al intervalului (a, b). Demonstrația acestei afirmații se face întocmai ca demonstrația lemei 5. Dar funcția $U(x)$ se anulează în 3 puncte distincte din intervalul (a,b_1), anume în punctele x_1, x_2, λ. Această circumstanță contrazice însă enunțul lemei 6. Rezultă deci că inegalitățile (36) trebuie excluse, rămînînd valabile (în ipotezele făcute) inegalitățile (35), ceea ce demonstrează afirmația lemei 8.

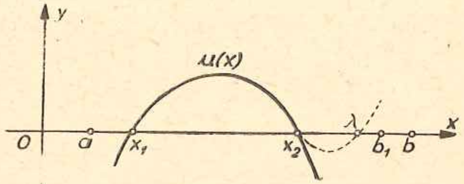

Fig. 6

Observație. Lema 8 se menține adevărată și în cazul cînd în locul intervalului deschis (a, b) se consideră un interval semiînchis $[a, b)$.

L e m a 9. *Fie dată o ecuație diferențială liniară și omogenă*

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

avînd coeficienții $p(x)$ și $q(x)$ continui într-un interval (a, b), respectiv $[a, b)$. Condiția necesară și suficientă ca familia Y_0 a integralelor ecuației diferențiale considerate să aibe proprietatea $I_2(a, b)$, respectiv $I_2[a, b)$ este ca oricare ar fi funcția $u(x)$ aparținînd clasei $C_2(a, b)$, respectiv $C_2[a, b)$ și satisfăcînd în (a, b) respectiv $[a, b)$ inegalitatea diferențială $L(u) > 0$, să fie convexă (în sensul definiției 5) față de mulțimea Y_0 în (a, b) resp. $[a, b)$[1].

Demonstrația o vom da pentru cazul unui interval deschis (a, b), ea rămînînd în linii mari aceeași pentru cazul unui interval semi-închis $[a, b)$.

Condiția este necesară. Această afirmație rezultă îndată din aplicarea succesivă a lemelor 4 și 8.

Condiția este suficientă. Presupunem că ecuația diferențială considerată are proprietatea: pentru orice funcție $u(x) \in C_2(a, b)$, inegalitatea diferențială $L(u) > 0$ în (a, b), atrage după sine convexitatea în (a, b) a funcției $u(x)$ față de familia Y_0 a integralelor ecuației diferențiale considerate. Să arătăm că în această ipoteză, Y_0 are proprietatea $I_2(a, b)$. În acest scop să presupunem prin absurd că ecuația

[1]) Ideea acestei proprietăți aparține E l e n e i M o l d o v a n și a fost comunicată în [1] pentru cazul ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul n, într-o formulare puțin diferită de aceea pe care o are în enunțul lemei 9. Autorul prezentei lucrări și-a permis de a da o demonstrație proprie pentru cazul particular $n = 2$.

diferențială $L(y) = 0$ ar admite o integrală particulară $\tilde{y}(x)$ *neidentic nulă*, care s-ar anula în intervalul (a, b) în două puncte $x_1 < x_2$. Fără a restrînge generalitatea raționamentului, putem presupune că rădăcinile x_1 și x_2 ale integralei particulare $\tilde{y}(x)$ sînt consecutive și că în intervalul (x_1, x_2) această integrală satisface inegalitatea $\tilde{y}(x) > 0$ (o astfel de inegalitate în cazul cînd nu este satisfăcută, se poate realiza prin înmulțirea integralei particulare considerate cu factorul constant -1).

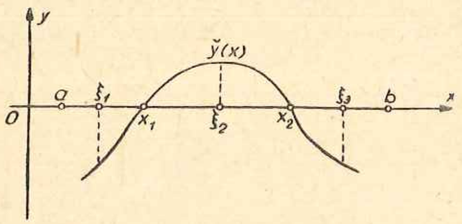

Fig. 7

Întrucît $\tilde{y}(x)$ este o integrală neidentic nulă a ecuației $L(y) = 0$, rezultă că $\tilde{y}'(x)$ nu se poate anula în punctele x_1 și x_2 și deci curba de ecuație $y = \tilde{y}(x)$ traversează axa Ox în punctele x_1 și x_2. De aici rezultă că există trei numere ξ_1, ξ_2, ξ_3, satisfăcînd inegalitățile

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < b$$

și pentru care mai au loc inegalitățile

$$\tilde{y}(\xi_1) < 0, \quad \tilde{y}(\xi_2) > 0, \quad \tilde{y}(\xi_3) < 0. \tag{38}$$

În altă ordine de idei, se constată că există funcții $\eta(x) \in C_2(\xi_1, \xi_3)$, satisfăcînd condițiile

$$\eta(x) > 0 \text{ în } [\xi_1, \xi_3] \text{ și } L(\eta) > 0 \text{ în } [\xi_1, \xi_3]. \tag{39}$$

Putem lua de exemplu $\eta(x) = e^{Cx}$, unde C este o constantă suficient de mare. Să efectuăm în expresia operatorului $L(y)$ schimbarea de funcție

$$y = \eta(x)\, z(x), \tag{40}$$

unde $\eta(x)$ este funcția considerată anterior. Obținem

$$L(y) \equiv \eta(x)\left[z'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta} z' + \frac{L(\eta)}{\eta} z\right]. \tag{41}$$

Fie $\tilde{z}(x) = \dfrac{\tilde{y}(x)}{\eta(x)}$. Din (41) rezultă în particular că

$$L(\tilde{y}) \equiv \eta(x)\left[\tilde{z}'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta}\tilde{z}' + \frac{L(\eta)}{\eta}\tilde{z}\right] \equiv 0. \tag{42}$$

Ținînd seama de (38) și (39), rezultă

$$\tilde{z}(\xi_1) < 0, \quad \tilde{z}(\xi_2) > 0, \quad \tilde{z}(\xi_3) < 0. \tag{43}$$

Fie ε un număr pozitiv suficient de mic astfel încît funcția $\tilde{\tilde{z}}(x) = \tilde{z}(x) + \varepsilon$ să satisfacă următoarele inegalități analoage cu (43)

$$\tilde{\tilde{z}}(\xi_1) < 0, \quad \tilde{\tilde{z}}(\xi_2) > 0, \quad \tilde{\tilde{z}}(\xi_3) < 0. \tag{44}$$

Fie apoi $\tilde{\tilde{y}} = \eta(x)\tilde{\tilde{z}}(x)$. Înlocuind în (41) și ținînd seama de egalitatea $\tilde{\tilde{z}}(x) = \tilde{z}(x) + \varepsilon$ precum și de relațiile (42) și (39), obținem

$$L(\tilde{\tilde{y}}) = \eta(x)\left[\tilde{\tilde{z}}'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta}\tilde{\tilde{z}}' + \frac{L(\eta)}{\eta}\tilde{\tilde{z}}\right] = \eta(x)\left[\tilde{z}'' + \frac{2\eta' + p\eta}{\eta}\tilde{z}' + \right. \tag{45}$$

$$\left. + \frac{L(\eta)}{\eta}\tilde{z}\right] + \varepsilon L(\eta) = 0 + \varepsilon L(\eta) > 0 \qquad \text{pentru } x \in [\xi_1, \xi_3].$$

Apoi din (44), ținînd seama că $\eta(x) > 0$ în intervalul $[\xi_1, \xi_3]$, deducem

$$\tilde{\tilde{y}}(\xi_1) < 0, \quad \tilde{\tilde{y}}(\xi_2) > 0, \quad \tilde{\tilde{y}}(\xi_3) < 0. \tag{46}$$

După cum s-a arătat anterior în demonstrația lemei 5, funcția $\tilde{\tilde{y}}(x)$ definită în intervalul $[\xi_1, \xi_2]$ se poate prelungi în tot intervalul (a, b), menținînd în tot acest interval continuitatea derivatelor de ordinul 1 și 2 precum și inegalitatea diferențială (45). În acest mod obținem o funcție $\tilde{\tilde{y}}(x) \in C_2(a, b)$ care satisface inegalitatea diferențială $L(\tilde{\tilde{y}}) > 0$ în (a, b) și care se anulează în două puncte din intervalul (a, b) satisfăcînd inegalitățile (46). Aceasta contrazice însă ipoteza făcută. Rezultă în definitiv că ecuația diferențială $L(y) = 0$ nu poate avea nici o integrală $y(x)$, care să se anuleze în două puncte din intervalul (a, b) și deci că familia Y_0 a integralelor ecuației $L(y) = 0$ are proprietatea $N_2\,(a, b)$. De aici, conform lemei 2 rezultă că Y_0 are proprietatea $I_2\,(a, b)$, q.e.d.

★

Demonstrația teoremei 1. Necesitatea condiției exprimate de această teoremă este stabilită în enunțul lemei 4. Suficiența acestei condiții rezultă din aplicarea succesivă a lemelor 8 și 9.

Observare. Teorema 1 rămîne adevărată și în cazul cînd în enunțul ei se consideră în loc de intervalul deschis (a, b), unul dintre intervalele $[a, b)$ sau $(a, b]$. Această afirmație se stabilește prin extinderea lemelor 4, 8, 9 la cazul intervalelor $[a, b)$ și $(a, b]$.

Menționăm faptul că teorema 1 ar putea să nu subsiste dacă enunțul ei se referă la un interval *închis* $[a, b]$. Aceasta se poate constata pe exemplul dat de ecuația diferențială $L(y) = y'' + y = 0$. Operatorul diferențial corespunzător are proprietatea $T_2\,[0, \pi]$, iar familia Y_0 a integralelor ecuației diferențiale $L(y) = 0$ nu are proprietatea $I_2\,[0, \pi]$. Faptul că familia Y_0 nu are proprietatea $I_2\,[0, \pi]$ se constată îndată, ținînd seamă că ecuația diferențială considerată admite integrala particulară $y = \sin x$, care se anulează în punctele $x = 0$ și $x = \pi$.

Faptul că operatorul diferențial $L(y)$ are proprietatea $T_2\,[0, \pi]$ se constată scriind funcția $u(x)$ care satisface inegalitatea diferențială $L(u) > 0$ precum și condițiile la limită $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ (unde x_0 este un număr din intervalul $[0, \pi]$) sub forma

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} L[u(s)] \sin(x - s)\, ds = \int_{x_0}^{x} [u''(s) + u(s)] \sin(x - s)\, ds.$$

Aplicații referitoare la teoria inegalităților diferențiale a lui S. A. Ciaplîghin

Se cunosc numeroase criterii referitoare la coeficienții ecuației diferențiale (1), care asigură într-un interval dat, proprietatea de neoscilație sau proprietatea de interpolație (în sensul definițiilor 2 respectiv 1 din lucrarea de față) a integralelor ecuației diferențiale (1). Conform teoremei 1 stabilită anterior, toate aceste criterii devin criterii care asigură aplicabilitatea teoremei inegalităților diferențiale a lui S. A. Ciaplîghin pentru ecuația (1) (în sensul definiției 3). În această ordine de idei ne permitem să enunţăm următorul criteriu de aplicabilitate a teoremei inegalităţilor diferenţiale a lui S. A. Ciaplîghin, criteriu ce rezultă îndată din teorema 1 şi din lema 3, stabilite anterior:

T e o r e m a 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul diferenţial* $L(y)$ *din* (1) *avînd coeficienţii continui în intervalul semi-închis* $[a, b)$ *să aibe proprietatea* $T_2[a, b)$, *este ca următoarea ecuaţie a lui Riccati*

$$\sigma' + \sigma^2 + p(x)\sigma + q(x) = 0 \tag{47}$$

să admită cel puţin o integrală particulară $\sigma(x)$ *continuă în* (a, b).

Demonstraţie. Stabilim întîi necesitatea condiţiei. Presupunem că operatorul diferenţial $L(y)$ are proprietatea $T_2[a, b)$. Conform teoremei 1 rezultă că familia Y_0 a ecuaţiei diferenţiale (2) posedă proprietatea $I_2[a, b)$. Atunci conform lemei 3, ecuaţia diferenţială (2) trebuie să admită o integrală $\eta(x)$, pozitivă şi continuă în (a, b). Efectuînd în ecuaţia (2) schimbarea de funcţie

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \sigma(s)\,ds}, \quad x_0 \in (a, b) \tag{48}$$

ecuaţia (2) se transformă în ecuaţia (47). Prin transformarea (48), integralei $\eta(x) > 0$ în (a, b) îi va corespunde pentru ecuaţia (47) integrala $\sigma_\eta(x) = \dfrac{\eta'(x)}{\eta(x)}$ care va fi evident continuă în (a, b), întrucît $\eta(x)$ nu se anulează în acest interval. Astfel, necesitatea condiţiei este stabilită.

Suficienţa condiţiei se constată îndată, ţinînd seama că integrala $y_\sigma(x)$ a ecuaţiei (2), care corespunde unei integrale $\sigma(x)$, presupusă continuă în intervalul (a, b), a ecuaţiei (47), este pozitivă în (a, b) după cum arată formula de transformare (48). Apoi se ţine seamă de afirmaţiile lemelor 3 şi 4.

Observaţii. 1° Ecuaţia diferenţială (47) se aseamănă cu aşa-numita „ecuaţie protectoare a lui Riccati"

$$\sigma' + \sigma^2 - p(x)\sigma - p'(x) + q(x) = 0 \tag{49}$$

pusă în evidenţă de S. A. Ciaplîghin cu ocazia elaborării metodei sale de integrare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea (a se consulta de exemplu [3]). Existenţa unei soluţii continue în $[a, b)$ a ecuaţiei (49) constituie după cum a arătat S. A. Ciaplîghin o condiţie suficientă, pentru ca operatorul diferenţial $L(y)$ să posede proprietatea $T_a^{(2)}[a, b)$ (în punctul $x = a$). Această condiţie suficientă dată de S. A. Ciaplîghin, presupune derivabilitatea coeficientului $p(x)$ în $[a, b)$.

2° Menţionăm faptul că fiind dat punctul x_0, problema determinării celui mai mare interval de forma $[x_0, x_0 + h)$, în care familia integralelor unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n posedă proprietatea $T_{x_0}^{(n)}[x_0, x_0 + h)$ (în punctul x_0), a fost recent rezolvată de N. A. K a s c e e v în lucrarea [4]. Rezultate analoage pentru cazul unor ecuaţii particulare liniare şi neliniare de ordinul al doilea au fost obţinute de V. N. P e t r o v în lucrările [5] şi [6]. Toate aceste rezultate se referă la o proprietate de tipul $T_a^{(2)}[a, b)$ într-un punct dat a, fără să fie vorba de proprietăţi de tipul $T_2[a, b)$ (a se vedea definiţia 3).

Altă caracterizare a proprietăţii $I_2(a, b)$ a familiei Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale (1)

În cele ce urmează vom încerca să dăm o altă caracterizare a proprietăţii $I_2(a, b)$ (deci şi a proprietăţii $I_2[a, b))$ a familiei Y, decît aceea dată de teorema 1. În acest scop dăm mai întîi

Definiţia 6. Spunem că operatorul diferenţial $L(y)$, ce figurează în membrul stîng al ecuaţiei (1), definit pe mulţimea funcţiilor din clasa $C_2(a, b)$, posedă proprietatea $\overline{T}_{x_0}^{(2)}(a, b)$, x_0 fiind un punct din intervalul (a, b), dacă oricare ar fi funcţia $u(x) \in C_2(a, b)$, satisfăcînd condiţia $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, din inegalitatea $L(u) \geqq 0$ valabilă în tot intervalul (a, b), să rezulte inegalitatea $u(x) \geqq 0$ în $(a\ b)$. Vom spune că operatorul $L(y)$ posedă proprietatea $\overline{T}_2(a, b)$, dacă acel operator posedă proprietatea $\overline{T}_{x_0}^{(2)}(a, b,)$ oricare ar fi punctul $x_0 \in (a, b)$.

L e m a 10. *Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul diferenţial* $L(y)$ *ce figurează în membrul stîng al ecuaţiei* (1) *să aibe proprietatea* $\overline{T}_2(a, b)$ *respectiv* $\overline{T}_2[a, b]$ *este ca acel operator* $L(y)$ *să aibe proprietatea* $T_2(a, b)$ *respectiv* $T_2[a, b]$.

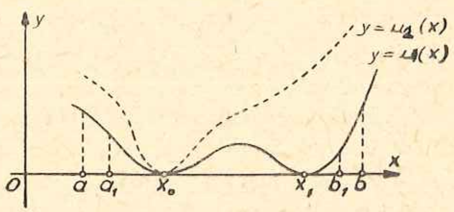

Fig. 8

Demonstraţie. Presupunem că operatorul $L(y)$ are proprietatea $\overline{T}_2(a, b)$. Să arătăm că în această ipoteză, operatorul $L(y)$ are şi proprietatea $T_2(a, b)$. Într-adevăr, fie $u(x)$ o funcţie aparţinînd clasei $C_2(a, b)$ şi satisfăcînd condiţiile $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, unde x_0 este un punct din intervalul (a, b), precum şi inegalitatea diferenţială $L(u) > 0$ în (a, b) (aceste condiţii intervin în definirea proprietăţii $T_2(a, b)$). Prin ipoteză, proprietatea $\overline{T}_2(a, b)$, avînd loc, rezultă că $u(x) \geqq 0$ în (a, b). Vom demonstra că în ipotezele făcute asupra funcţiei $u(x)$, are loc inegalitatea strictă $u(x) > 0$ în intervalele (a, x_0) şi (x_0, b). Într-adevăr să presupunem prin absurd că $u(x)$ se anulează în afară de punctul x_0, în încă un punct $x_1 \in (a, b)$, diferit de x_0 (fig. 8). Fie a_1 şi b_1 nişte numere satisfăcînd inegalităţile $a < a_1 < \min\{x_0, x_1\} < \max\{x_0, x_1\} < b_1 < b$. Fie apoi $u_1(x)$ o funcţie din clasa $C_2(a_1, b_1]$, satisfăcînd condiţia $u_1(x_0) = u_1'(x_0) = 0$ şi fiind pozitivă în intervalele $[a_1, x_0)$, $(x_0, b_1]$.

Considerăm combinaţia liniară

$$v(x) = u(x) + \lambda\, u_1(x),$$

unde λ este o constantă. Din ipoteza $L(u) > 0$ în (a, b) şi din proprietatea de continuitate a funcţiilor $u(x)$, $u_1(x)$ precum şi a derivatelor de ordinul 1 şi 2 ale acestor funcţii în intervalul inchis $[a_1, b_1]$ şi de asemenea a coeficienţilor $p(x)$ şi $q(x)$ a operatorului $L(y)$, rezultă că pentru valori negative şi suficient de mici în valoare absolută ale parametrului λ, are loc în întreg intervalul $[a_1, b_1]$ inegalitatea strictă $L(v) > 0$. Fie λ_0 o astfel de valoare şi $v_0(x)$ funcţia corespunzătoare. Întrucît λ_0 este un număr negativ şi $u(x_1) = 0$, rezultă că $v_0(x_1) < 0$. Apoi din condiţiile pe care le satisfac funcţiile $u(x)$ şi $u_1(x)$ în punctul x_0, rezultă că $v_0(x_0) = v_0'(x_0) = 0$. În definitiv pentru funcţia $v_0(x)$ sînt îndeplinite următoarele condiţii care intervin în proprietatea $\overline{T}_2\ [a_1, b_1]$:

$$v_0(x_0) = v_0'(x_0) = 0 \quad \text{şi} \quad L(v_0) > 0 \quad \text{în } [a_1, b_1]. \tag{50}$$

Dar întrucît prin ipoteză operatorul $L(y)$ are proprietatea $\overline{T}_2\ (a, b)$, rezultă că el va avea şi proprietatea $\overline{T}_2\ [a_1, b_1]$, oricare ar fi subintervalul $[a_1, b_1]$ conţinut în intervalul (a, b)[1]). De aici şi din (50) ar rezulta că $v_0(x) \geqq 0$ în $[a_1, b_1]$ ceea ce

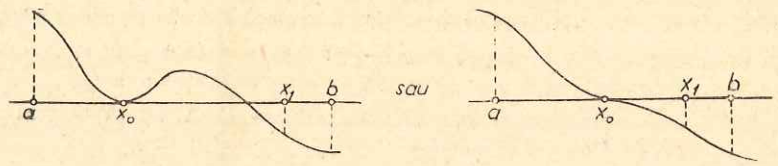

Fig. 9

contrazice inegalitatea $v_0(x_1) < 0$ stabilită anterior. Rezultă în definitiv că funcţia $u(x)$ este nenegativă în intervalul (a, b) şi nu se anulează decît în punctul x_0, q.e.d.

Demonstraţia lemei în cazul cînd în loc de proprietăţile $T_2\ (a, b)$ şi $\overline{T}_2\ (a,b)$ se consideră respectiv proprietăţile $T_2\ [a, b]$ şi $\overline{T}_2\ [a,b]$, se face ca mai sus, cu simplificarea că se poate lua $a_1 = a$ şi $b_1 = b$.

Să stabilim acum suficienţa condiţiei exprimate de lemă. Presupunem în acest scop că operatorul $L(y)$ are proprietatea $T_2\ (a, b)$ şi să arătăm că în această ipoteză el are şi proprietatea $\overline{T}_2\ (a, b)$. Într-adevăr, fie $u(x)$ o funcţie satisfăcînd condiţia $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, unde x_0 este un punct din intervalul (a, b), şi de asemenea inegalitatea diferenţială $L(u) \geqq 0$ în tot intervalul (a, b), (aceste condiţii intervin în proprietatea $\overline{T}_2\ (a, b)$). Vom demonstra că în aceste ipoteze are loc inegalitatea $u(x) \geqq 0$ în intervalul (a, b). Într-adevăr, să presupunem prin absurd că ar exista un punct x_1 din intervalul (a, b) astfel încît să aibe loc inegalitatea

$$u(x_1) < 0. \tag{51}$$

Evident că $x_1 \neq x_0$ (fig. 9). Fie $u_1(x)$ integrala în intervalul (a, b) a ecuaţiei diferenţiale $L(y) = 1$, satisfăcînd condiţiile la limită $u_1(x_0) = u_1'(x_0) = 0$. Fie apoi λ o valoare pozitivă suficient de mică, astfel încît să avem satisfăcută inegalitatea

$$\lambda\, |u_1(x_1)| < |u(x_1)|. \tag{52}$$

Atunci funcţia $v(x) = u(x) + \lambda u_1(x)$ are proprietăţile

$$v(x_0) = v'(x_0) = 0, \tag{53}$$

$$L(v) = L(u) + \lambda L(u_1) = L(u) + \lambda \geqq \lambda > 0 \quad \text{în } (a, b).$$

Dar întrucît prin ipoteză operatorul $L(y)$ are proprietatea $T_2(a, b)$, rezultă din (53) că $v(x) > 0$ în (a, b). Pe de altă parte, din (51) şi (52) rezultă că $v(x_1) < 0$. Am obţinut astfel o contradicţie. În definitiv rezultă că $u(x) \geqq 0$ în intervalul (a, b), q. e. d.

[1]) Demonstraţia acestei afirmaţii se face întocmai ca în cazul lemei 5.

Stabilirea suficienţei condiţiei exprimate de lemă, în cazul unui interval închis $[a, b]$ se face în mod analog.

Definiţia 6'. Definiţia 6 dată anterior, se extinde îndată la cazul operatorilor diferenţiali liniari şi omogeni de ordinul n,

$$L_n(y) = y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} \tag{54}$$

avînd coeficienţii $a_i(x)$ continui într-un interval (a, b). Vom spune că operatorul diferenţial $L_n(y)$ posedă proprietatea $\overline{T}_n\ (a, b)$, dacă oricare ar fi funcţia $u(x)$ aparţinînd clasei $C_n(a, b)$ (adică avînd derivate pînă la ordinul n inclusiv, continue în intervalul (a, b)), satisfăcînd condiţiile

$$u(x)_0 = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

unde x_0 este un punct din intervalul (a, b), atunci din inegalitatea $L_n(u) \geqq 0$, valabilă în intervalul (a, b), să rezulte inegalitatea $u(x) \geqq 0$ în acelaşi interval (a, b).

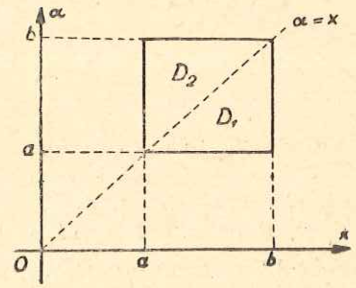

Fig. 10

Definiţia 7. Funcţia $\varphi(x)$ se spune că este funcţia lui Cauchy asociată operatorului $L_n(y)$ şi nodului $\alpha \in (a, b)$, dacă $\varphi(x)$ este o integrală în intervalul (a, b), a ecuaţiei diferenţiale $L_n(y) = 0$ şi dacă mai satisface condiţiile la limită

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(\alpha) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 1.$$

Vom nota o astfel de funcţie cu $\varphi(x, \alpha)$, punînd în evidenţă nodul în care au loc condiţiile la limită scrise mai sus.

Cu aceste două definiţii, stabilim următoarea proprietate, analogă cu aceea stabilită de N. A. K a s c e e v în lucrarea [4]:

L e m a 11. *Condiţia necesară şi suficientă ca operatorul $L_n(y)$ să aibe proprietatea $\overline{T}_n\ (a, b)$ este ca funcţia lui Cauchy $\varphi(x, \alpha)$ asociată operatorului $L_n(y)$ să fie nenegativă în triunghiul (D_1), mărginit de dreptele $\alpha = x$, $\alpha = a$, $x = b$, şi în acelaşi timp să fie nepozitivă în triunghiul (D_2), mărginit de dreptele $\alpha = x$, $\alpha = b$, $x = a$ (fig. 10).*

Demonstraţie. Condiţia este suficientă. Într-adevăr, să presupunem că funcţia $\varphi(x, \alpha)$ satisface condiţiile din lemă. Fie $u(x)$ o funcţie din clasa $C_n(a, b)$, satisfăcînd într-un punct x_0 din (a, b) condiţiile:

$$u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{55}$$

În plus mai presupunem că funcţia $u(x)$ verifică inegalitatea

$$L(u) \geqq 0, \quad x \in (a, b). \tag{56}$$

Să arătăm că în aceste condiţii are loc inegalitatea $u(x) \geqq 0$, oricare ar fi $x \in (a, b)$. Într-adevăr, se ştie că integrala ecuaţiei $L_n(y) = f(x)$, care satisface în punctul x_0 condiţiile

$$y(x_0) = u(x_0), \quad y'(x_0) = u'(x_0), \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}(x_0)$$

are expresia

$$y(x) = u(x) - \int_{x_0}^{x} \{L_n[u(\alpha)] - f(\alpha)\}\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Din această formulă, luînd $f(x) \equiv 0$ în (a, b) și ținînd seama de faptul că funcția $u(x)$ verifică condițiile (55), rezultă că integrala $y(x)$ corespunzătoare este identic nulă în (a, b) și are loc în consecință identitatea

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} L_n[u(\alpha)]\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha. \tag{57}$$

Din această identitate, ținînd seamă de inegalitatea (56), precum și de ipotezele făcute asupra funcției $\varphi(x, \alpha)$, rezultă că $u(x) \geqq 0$ cînd $x \in (a, b)$, q. e. d.

Condiția este necesară. Să presupunem că operatorul $L_n(y)$ are proprietatea $\overline{T}_n(a, b)$. Să dovedim că funcția $\varphi(x, \alpha)$ este nenegativă în domeniul (D_1) și nepozitivă în (D_2). Într-adevăr, să presupunem prin absurd că ar exista un punct $(x^*, \alpha^*) \in (D_1)$, astfel încît să aibe loc inegalitatea strictă $\varphi(x^*, \alpha^*) < 0$. Fie x_0 un punct oarecare, satisfăcînd inegalitățile $a < x_0 < x^* < b$. Atunci evident că se poate alege o funcție $h(x)$, pozitivă în (a, b), astfel încît integrala $\int_{x_0}^{x} h(\alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$, privită ca funcție de variabila x, să aibe o valoare negativă pentru $x = x^*$. Alegînd astfel funcția $h(x)$, să notăm cu $u(x)$ integrala ecuației diferențiale $L_n(y) = h(x)$, satisfăcînd condițiile inițiale

$$u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Atunci conform formulei (57), avem

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} L_n[u(\alpha)]\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{x_0}^{x} h(\alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$$

și de aici, conform felului în care a fost aleasă funcția $h(x)$, rezultă inegalitatea $u(x^*) < 0$. Pe de altă parte, $L_n(u) = h(x) > 0$ cînd $x \in (a, b)$ și $u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$. Atunci întrucît prin ipoteză s-a presupus că $L_n(y)$ are proprietatea $\overline{T}_n(a, b)$, rezultă că $u(x) \geqq 0$ cînd $x \in (a, b)$. Această inegalitate contrazice însă inegalitatea $u(x^*) < 0$, stabilită anterior. Rezultă în definitiv că nu poate să existe nici un punct (x^*, α^*) din domeniul (D_1), în care $\varphi(x, \alpha)$ să fie negativă.

În mod analog se arată că în ipoteza că $L_n(y)$ are proprietatea $\overline{T}_n(a,b)$, funcția $\varphi(x, \alpha)$ este nepozitivă în domeniul (D_2).

Observație. Lema 11 se extinde și la cazul cînd în locul unui interval deschis (a, b), se consideră un interval închis $[a, b]$, sau un interval semiînchis $[a, b)$.

*

Ținînd seama de teorema 1 precum și de lemele 10 și 11, putem enunța următoarea

T e o r e m a 3. *Fie ecuația diferențială* (1), *avînd coeficienții* $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ *continui în intervalul* (a, b). *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y *a integralelor acestei ecuații să aibe proprietatea* $I_2(a, b)$ *sau* $N_2(a, b)$, *este ca funcția lui Cauchy* $\varphi(x, \alpha)$, *corespunzătoare operatorului diferențial liniar și omogen* $L(y)$ *asociat ecuației* (1), *să fie nenegativă în domeniul* (D_1) *și nepozitivă în domeniul* (D_2) *(fig.* 10).

Observație. Se știe că funcția lui Cauchy corespuntătoare operatorului diferențial $L_n(y)$ considerat în (54) admite reprezentarea

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{\alpha}^{x} \Gamma(t, \alpha)(x - t)^{n-1}\, dt + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{58}$$

unde $\Gamma(x, \alpha)$ este sîmburele rezolvant al sîmburelui

$$K(x,\alpha) = a_1(x) + a_2(x)(x - \alpha) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{59}$$

în cazul ecuației lui Volterra:

$$\Gamma(x,\alpha) - \int_{\alpha}^{x} K(x,s)\, \Gamma(s,\alpha)\, ds = K(x,\alpha).$$

În cazul particular al operatorului diferențial $L_2(y)$ ce intervine în (1), funcția lui Cauchy corespunzătoare admite reprezentarea

$$\varphi(x, \alpha) = \int_{\alpha}^{x} \Gamma(t, \alpha)(x - t)\, dt + (x - \alpha), \tag{60}$$

unde $\Gamma(x, \alpha)$ este sîmburele rezolvant al sîmburelui

$$K(x, \alpha) = -p(x) - q(x)(x - \alpha) \tag{61}$$

în cazul ecuației lui Volterra

$$\Gamma(x, \alpha) - \int_{\alpha}^{x} K(x, s)\, \Gamma(s, \alpha)\, ds = K(x, \alpha).$$

Se arată [1]) în teoria ecuațiilor integrale că soluția acestei ecuații integrale admite reprezentarea:

$$\Gamma(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x, \alpha), \tag{62}$$

[1]) A se consulta, de exemplu, manualul S. G. M i h l i n, *Integralnîie Uravnenia*, Moscova-Leningrad, p. 22—27.

unde $K_i(s,\alpha)$ se definește din aproape în aproape, cu ajutorul formulei

$$K_i(x,\alpha)=\int_\alpha^x K(x,t)\,K_{i-1}(t,\alpha)\,dt;\quad K_1(x,\alpha)=K(x,\alpha).$$

Teorema 3, împreună cu formulele (60) și (62), ne dă o rezolvare prinicpială a problemei determinării unor limite exacte a intervalelor (a,b) ale axei Ox, în care familia Y a integralelor ecuației (1) are proprietatea $I_2(a,b)$.

Ținînd seama de formula (60), observăm că dacă $\Gamma(x,\alpha)$ este nenegativă în domeniul (D_1) și nepozitivă în domeniul (D_2) (fig. 10), atunci funcția $\varphi(x,\alpha)$ va fi nenegativă în (D_1) și nepozitivă în (D_2), și deci familia Y a integralelor ecuației diferențiale (1) va avea proprietatea $I_2(a,b)$. Rezultă de aici că îndeplinirea simultană a inegalităților $\Gamma(x,\alpha)\geqq 0$ în (D_1) și $\Gamma(x,\alpha)\leqq 0$ în (D_2) constituie o *condiție suficientă* pentru ca familia Y a integralelor ecuației (1) să aibe proprietatea $I_2(a,b)$.

Observație generală. Teoremele 1, 2, 3 se mențin adevărate și în cazul cînd în locul intervalului finit (a,b) respectiv $[a,b)$ se consideră un *interval infinit* (a,∞) respectiv $[a,\infty)$. Această afirmație rezultă din faptul că proprietățile $I_2(a,\infty)$, $N_2(a,\infty)$, $T_2(a,\infty)$ atrag după sine respectiv proprietățile $I_2(a,b)$, $N_2(a,b)$, $T_2(a,b)$ oricare ar fi numărul finit $b>a$ și reciproc.

Metode aproximative de delimitare a intervalelor maximale $[a, a+h)$, pentru care familia Y a integralelor ecuației (1) are proprietatea $I_2\,[a, a+h)$

În cele ce urmează vom presupune că coeficienții ecuației (1) sînt continui într-un interval suficient de mare, conținînd punctul $x=a$. Din lema 3, rezultă îndată următoarea

L e m a 3′. *Fiind dat numărul $x=a$, intervalul maxim de forma $[a, a+h)$ pentru care familia Y a integralelor ecuației* (1) *are proprietatea $I_2\,[a, a+h)$, este intervalul semiînchis cuprins între două rădăcini consecutive ale unei integrale oarecare neidentic nule ale ecuației omogene asociate* (2), *integrala fiind supusă la singura condiție de a trece prin punctul $A\,(a,0)$, — prima rădăcină din pereche luîndu-se $x=a$.*

Această lemă ne dă posibilitatea de a aproxima cu orice precizie numărul $a+h$, atunci cînd se dă numărul a. Într-adevăr, să considerăm de exemplu integrala particulară $y(x)$ a ecuației omogene (2), satisfăcînd în punctul $x=a$ condițiile $y(a)=0$, $y'(a)=1$. Prima rădăcină a ecuației $y(x)=0$, situată la dreapta punctului $x=a$ (în cazul cînd există), ne va da numărul $a+h$. Să presupunem că printr-un procedeu oarecare de aproximație s-a reușit să se obțină un șir infinit de funcții $\{y_n(x)\}$ care să conveargă uniform către funcția $y(x)$, într-un interval ce conține intervalul $[a, a+h)$ în interiorul său și de asemenea derivatele acestor funcții să conveargă către $y'(x)$ (de exemplu prin metoda aproximațiilor succesive a lui E. Picard). Atunci notînd cu r_n cea mai mică rădăcină, situată la dreapta punctului $x=a$, a ecuației $y_n(x)=0$ (în cazul cînd există), șirul $\{r_n\}$ va converge către numărul $a+h$ căutat.

Observație. Din lema 3′, ținînd seama de faptul că o curbă integrală a ecuației (2) ce nu coincide cu axa Ox, nu poate avea cu această axă un contact mai mare sau egal cu 1, și de asemenea de faptul că o astfel de curbă se deformează uniform continuu într-un interval finit dat, atunci cînd coeficienții ecuației diferențiale $p(x)$, $q(x)$ suferă variații continue în acel interval, păstrîndu-se însă condițiile inițiale, — se poate arăta cu ușurință că menținînd numărul $x=a$ fix și făcînd să varieze funcțiile $p(x)$, $q(x)$ în spațiul funcțiilor continue, atunci numărul h, ce intervine în enunțul lemei 3′, este o funcțională continuă de argumentele $p(x)$ și $q(x)$.

Această proprietate a fost stabilită pe altă cale de C. F o i a ș, G. G u s s i și V. P o e n a r u în lucrarea [9].

*

În cele ce urmează ne vom ocupa cu aproximarea bilaterală a numărului $a+h$, atunci cînd se dă numărul a. Stabilim în acest scop următoarea

L e m a 12. *Fie $u(x)$ și $v(x)$ două funcții aparținînd clasei $C_2\,[a, a+\lambda)$ unde intervalul $[a, a+\lambda)$ este suficient de mare pentru ca să conțină intervalul $[a, a+h)$* [1]) *și satisfăcînd condițiile*:

$$u(a)=v(a)=0,\quad u'(a)>0,\quad v'(a)>0$$

precum și inegalitațile diferențiale

$$L(u)\leqq 0 \text{ și } L(v)\geqq 0 \text{ în intervalul } [a, a+\lambda).$$

Atunci notînd cu $y_u(x)$ integrala particulară a ecuației (2), *care satisface condițiile $y_u(a)=0$, $y_u'(a)=u'(a)>0$, are loc inegalitatea*

$$u(x)\leqq y_u(x),\ x\in[a, a+h).$$

La fel notînd cu $y_v(x)$ integrala particulară a ecuației (2), *care satisface condițiile $y_v(a)=0$, $y_v'(a)=v'(a)>0$, are loc inegalitatea*

$$y_v(x)\leqq v(x),\ x\in[a, a+h).$$

Notînd cu r_u și r_v cele mai mici rădăcini situate în intervalul $(a, a+\lambda)$ ale funcțiilor $u(x)$ respectiv $v(x)$, (dacă bineînțeles există astfel de rădăcini), au loc delimitările:

$$r_u\leqq a+h\leqq r_v.$$

Demonstrația acestei leme este imediată dacă se ține seamă de teorema 1 și de lema 3′.

Observație. Inegalitatea $r_u\leqq a+h$ rezultă și dintr-un rezultat obținut de V. A. K o n d r a t i e v în lucrarea [2].

Institutul de calcul, Academia R.P.R.—Filiala Cluj

[1]) Intervalul $[a, a+h)$ reprezintă intervalul maxim, avînd extremitatea stîngă $x=a$ dată, în care familia Y_0 și deci și familia Y are proprietatea I_2.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ТЕОРЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СОВПАДАЮЩИМИ УЗЛАМИ С. А. ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка (1), коэффициенты которого непрерывны в некотором промежутке (a, b). Через Y обозначается семейство интегралов этого уравнения в промежутке (a, b). Даются следующие определения:

Определение 1. Говорят, что Y обладает свойством $I_2(a, b)$, если для любых несовпадающих узлов x_1 и x_2 в (a, b) и для любых вещественных значений y_1 и y_2 существует один и только один частный интеграл $y(x) \in Y$, удовлетворяющий условиям $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$.

Определение 2. Говорят, что семейство Y обладает свойством $N_2(a, b)$, если любые несовпадающие частные интегралы $y_1(x)$ и $y_2(x)$, принадлежащие этому семейству могут принимать равные значения в промежутке (a, b) не более чем в одной точке.

Определение 3. Говорят, что линейный и однородный дифференциальный оператор $L_2(y)$, определенный на классе $C_2(a, b)$ функций дважды непрерывно дифференцируемых в промежутке (a, b), обладает свойством $T_{x_0}^{(2)}(a, b)$, если для любой функции $u(x) \in C_2(a, b)$ из условий $L_2(u) > 0$ в (a, b) и $u(x_0) = u(x_0) = 0$ следует неравенство $u(x) \geqq 0$ в (a, b), причем знак равенства имеет место только в точке x_0. Здесь предполагается, что x_0 принадлежит промежутку (a, b).

Определение 4. Говорят, что дифференциальный оператор $L_2(y)$ обладает свойством $T_2(a, b)$, если этот оператор обладает свойством $T_{x_0}^{(2)}(a, b)$ при любом $x_0 \in (a, b)$.

На основании этих определений устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием выполнения свойства $I_2(a, b)$ или свойства $N_2(a, b)$ для семейства Y интегралов рассматриваемого дифференциального уравнения (1), является выполнение свойства $T_2(a, b)$ для соответствующего линейного и однородного дифференциального оператора $L_2(y)$.*

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием выполнения свойства $T_2[a, b)$ для линейного и однородного дифференциального оператора $L_2(y)$ с непрерывными коэффициентами в замкнутом слева промежутке $[a, b)$ является существование хотя бы одного частного интеграла $\sigma(x)$ уравнения Риккати (47), непрерывного в промежутке (a, b).*

Далее рассматривается в (59) линейный и однородный дифференциальный оператор $L_n(y)$ порядка n, определенный на классе $C_n(a, b)$, коэффициенты которого непрерывны в промежутке (a, b).

Определение 5. Говорят, что оператор $L_n(y)$ обладает свойством $\overline{T}_{x_0}^{(n)}(a, b)$, если для любой функции $u(x) \in C_n(a, b)$, удовлетворяющей условиям $u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$, $L_n(u) \geqq 0$ при $x \in (a, b)$, имеет место неравенство $u(x) \geqq 0$ в (a, b).

Определение 6. Говорят, что дифференциальный оператор $L_n(y)$ обладает свойством $\overline{T}^{(n)}(a, b)$, если этот оператор обладает свойством $\overline{T}_{x_0}^{(n)}(a, b)$ при любом $x_0 \in (a, b)$.

Определение 7. Говорят, что функция $\varphi(x)$ является функцией Коши, соответствующей дифференциальному оператору $L_n(y)$ и узлу $\alpha \in (a, b)$, если $\varphi(x)$ является частным интегралом в промежутке (a, b) линейного и однородного дифференциального уравнения $L_n(y) = 0$, удовлетворяющим граничным условиям

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(\alpha) = 0; \ \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 1.$$

Ниже такая функция обозначается через $\varphi(x, \alpha)$ для выделения узла α, в котором имеют место вышеприведенные граничные условия.

Этими определениями устанавливается следующее свойство, аналогичное свойству, установленному Н. А. Кащеевым в [4].

Теорема 3. *Для того чтобы дифференциальный оператор $L_n(y)$ обладал свойством $\overline{T}_n(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы функция Коши $\varphi(x, \alpha)$, соответствующая этому оператору, была неотрицательной в области D_1 и неположительной в области D_2, причем области D_1 и D_2 указаны на рис. 10.*

Доказывается также, что в случае дифференциального уравнения (2) свойства $T_2(a, b)$ и $\overline{T}_2(a, b)$ эквивалентны. Из этого замечания вытекает теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы семейство Y интегралов дифференциального уравнения (1) обладало свойством $I_2(a, b)$ или $N_2(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы функция Коши $\varphi(x, \alpha)$, соответствующая соответствующему дифференциальному оператору $L_2(y)$, была неотрицательной в области D_1 и неположительной в области D_2 (рис. 10).*

Общее замечание. Теоремы 1, 2, 3, 4 остаются действительными и для полузамкнутых промежутков $[a, b)$ и непосредственно распространяются на бесконечные промежутки вида (a, ∞) соответственно $[a, \infty)$.

Теорема 5. *Предполагая, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ дифференциального оператора $L_2(y)$ в (1) непрерывны в замкнутом слева промежутке $[a, b)$, пусть $u(x)$ и $v(x)$ две функции, принадлежащие классу $C_2[a, b)$ и удовлетворяющие условиям:*

$$u(a) = 0, \ u'(a) > 0, \ L_2(u) \leqslant 0 \qquad \text{при } x \in (a, b)$$

$$v(a) = 0, \ v'(a) > 0, \ L_2(v) \geqq 0 \qquad \text{при } x \in (a, b).$$

Пусть r_u и r_v наименьшие корни функций $u(x)$ и $v(x)$, находящиеся в промежутке (a, b) (если, конечно, такие корни существуют). Тогда, обозначая через $[a, a + h)$ максимальный промежуток, содержащийся в $[a, b)$, в котором общий интеграл уравнения (1) является интерполирующим второго порядка (то есть, в котором Y обладает свойством I_2), имеют место неравенства

$$r_u \leqq a + h \leqq r_v.$$

Эта теорема позволяет апроксимировать число h с любой степенью точности.

LE PROBLÈME BILOCAL ET LE THÉORÈME DES INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES À NŒUDS CONFONDUS DE S. A. TCHAPLYGUINE POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 2e ORDRE

RÉSUMÉ

On considère, dans ce travail, l'équation différentielle linéaire du 2e ordre (1), aux coefficients continus dans un intervalle quelconque (a, b). On désigne par Y la famille des intégrales de cette équation dans l'intervalle (a, b). On commence par donner les définitions suivantes:

Définition 1. On dit que Y jouit de la propriété $I_2(a, b)$ si, quels que soient les nœuds distincts x_1 et x_2 dans (a, b) et quelles que soient les valeurs réelles y_1 et y_2, il existe une intégrale particulière $y(x) \in Y$, et une seule, qui puisse satisfaire aux conditions $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Définition 2. On dit que la famille Y jouit de la propriété $N_2(a, b)$ si, quelles que soient deux intégrales particulières distinctes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ dans Y, celles-ci ne peuvent prendre de valeurs égales dans l'intervalle (a, b) que tout au plus en un point.

Définition 3. On dit que l'opérateur différentiel linéaire et homogène $L_2(y)$ défini sur la classe $C_2(a, b)$ des fonctions admettant des dérivées du second ordre, continues dans l'intervalle (a, b), jouit de la propriété $T^{(2)}_{x_0}(a, b)$ si, quelle que soit la fonction $u(x) \in C_2(a, b)$, dans les conditions $L_2(u) > 0$ dans (a, b) et $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, il en résultera l'inégalité $u(x) \geqq 0$ dans (a, b), le signe égal ne pouvant se trouver qu'au point x_0. On a supposé ici que x_0 est un point de l'intervalle (a, b).

Définition 4. On dit que l'opérateur différentiel $L_2(y)$ jouit de la propriété $T_2(a, b)$, si cet opérateur a la propriété $T^{(2)}_{x_0}(a, b)$ quel que soit $x_0 \in (a, b)$.

Ces définitions permettent d'établir les théorèmes suivants:

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la famille Y des intégrales de l'équation différentielle considérée* (1) *jouisse de la propriété $I_2(a, b)$ ou de la propriété $N_2(a, b)$, est que l'opérateur différentiel, linéaire et homogène, $L_2(y)$, respectif, ait la propriété $T_2(a, b)$.*

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur différentiel, linéaire et homogène, $L_2(y)$, aux coefficients continus dans l'intervalle demi-fermé $[a, b)$, jouisse de la propriété $T_2[a, b)$ est que l'équation de Riccati* (47) *admette au moins une intégrale particulière $\sigma(x)$ continue dans l'intervalle (a, b).*

On considère ensuite en (59) un opérateur différentiel, linéaire et homogène, $L_n(y)$, d'ordre n, aux coefficients continus dans l'intervalle (a, b) et défini dans la classe $C_n(a, b)$.

Définition 5. On dit que l'opérateur $L_n(y)$ jouit de la propriété $\overline{T}^{(n)}_{x_0}(a, b)$ si, quelle que soit la fonction $u(x) \in C_n(a, b)$ satisfaisant aux conditions

$$u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad L_n(u) \geqslant 0 \text{ pour } x \in (a, b)$$

pour une telle fonction $u(x)$, il résulte l'inégalité $u(x) \geqslant 0$ dans (a, b).

Définition 6. On dit que l'opérateur différentiel $L_n(y)$ jouit de la propriété $\overline{T}_n(a, b)$, si cet opérateur possède la propriété $\overline{T}^{(n)}_{x_0}(a, b)$, quel que soit $x_0 \in (a, b)$.

Définition 7. On dit que la fonction $\varphi(x)$ est la fonction de Cauchy associée à l'opérateur différentiel $L_n(y)$ et au nœud $\alpha \in (a, b)$, si $\varphi(x)$ est une intégrale particulière dans l'intervalle (a, b) de l'équation différentielle, linéaire et homogène, $L_n(y) = 0$, satisfaisant aux conditions à la limite

$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(\alpha) = 0; \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 1$$

Dans ce qui suit, on désignera une telle fonction par $\varphi(x, \alpha)$, en mettant ainsi en évidence le nœud α où se trouvent les conditions à la limite ci-dessus.

Ces conditions permettent d'établir la propriété suivante, analogue à celle établie par N. A. Kastchéév [4]:

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur différentiel $L_n(y)$ jouisse de la propriété $\overline{T}_n(a, b)$ est que la fonction de Cauchy $\varphi(x, \alpha)$, associée à cet opérateur, soit non négative dans le domaine D_1 et non positive dans le domaine D_2 (les domaines D_1 et D_2 sont indiqués sur la figure* 10).

Dans ce travail, on montre aussi que, dans le cas de l'équation différentielle (2), les propriétés $T_2(a, b)$ et $\overline{T}_2(a, b)$ sont équivalentes. Il résulte de cette observation le

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante pour que la famille Y des intégrales de l'équation différentielle* (1) *jouisse de la propriété $I_2(a, b)$ ou $N_2(a, b)$ est que la fonction de Cauchy $\varphi(x, \alpha)$ associée à l'opérateur différentiel $L_2(y)$ respectif, soit non négative dans le domaine D_1 et non positive dans le domaine D_2 (fig.* 10).

Observation générale. Les théorèmes 1, 2, 3, 4 restent vrais dans des intervalles demi-fermés $[a, b)$ et en outre s'étendent immédiatement à des intervalles infinis, de la forme (a, ∞), respectivement $[a, \infty)$.

Théorème 5. *En supposant que l'opérateur différentiel $L_2(y)$ dans* (1) *a les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ continus dans l'intervalle demi-fermé $[a, b)$, soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions appartenant à la classe $C_2[a, b)$ et satisfaisant aux conditions:*

$$u(a) = 0, \ u'(a) > 0, \ L_2(u) \leqslant 0 \text{ pour } x \in (a, b)$$

$$v(a) = 0, \ v'(a) > 0, \ L_2(v) \geqslant 0 \text{ pour } x \in (a, b).$$

Soient r_u et r_v les plus petites racines situées dans l'intervalle (a, b) des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ (à conditions toutefois que de telles racines existent). Dans ce cas, en désignant par $[a, a + h)$, l'intervalle maximum contenu dans $[a, b)$ dans lequel l'intégrale générale de l'équation (1) *est interpolatrice du deuxième ordre (c'est-à-dire où Y jouit de la propriété I_2), on aura les inégalités*

$$r_u \leqslant a + h \leqslant r_v.$$

Ce théorème permet l'approximation du nombre h avec la précision voulue.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Moldovan, *Asupra unor teoreme de medie.* Comunicările Acad. R.P.R., **6**, 7—12 (1956).
2. В. А. Кондратиев, *Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.* Успехи математических наук, **12**, *3*, 159—160 (1957).

3. Н. Н. Лузин, *О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина*. Успехи матем. наук, **6**, 6 (1951).
4. Н. А. Кащеев, *Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения*. Доклады Акад. Наук СССР, **111**, 937—940 (1956).
5. V. N. Petrov, *The Limits of Applicability of S. Tchaplygin's Theorem on Differential Inequalities to Linear Equations with Usual Derivatives of the Second Order*. C. R. Acad. Sc. URSS, **51**, 255—258 (1946).
6. — *Inapplicability of the Theorem on the Differential Inequality of S. Tchaplygin to Certain Non-linear Differential Equations of the Second Order*. C.R. Acad. Sc. URSS, **5**, 497—499 (1946).
7. G. Polya, *On the Mean Value Theorem Corresponding to Given Homogeneous Differential Equations*. Trans. of the Amer. Math. Soc., **24**, 312—324 (1922).
8. Ch. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre*. Journ. de Math. pure et appl., **8**, 125—144 (1929).
9. C. Foiaş, G. Gussi, V. Poenaru, *Despre problema polilocală la ecuaţii diferenţiale lineare de ordinul al doilea*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, 699—721 (1955).