ASUPRA DELIMITĂRII ERORILOR ÎN UNELE PROCEDEE DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

DE

E. SCHECHTER

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 17 aprilie 1957

1. Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

în care funcţia $f(x,y)$ este astfel, ca pe un anumit domeniu să existe o singură integrală ce trece printr-un punct al acesteia. Problema intregrării numerice pe un interval I al unei astfel de ecuaţii constă în a găsi valorile integralei pe n puncte ale acestui interval. Procedeele numerice nu furnizează în general valori exacte, de aceea se impune un studiu al erorilor comise. Aceste erori pot fi împărţite în două categorii: erori ale metodei, care provin din caracterul aproximativ al metodei folosite, şi erori de rotunjire, comise în timpul calculului efectiv, cînd se fac diferite rotunjiri pentru a păstra numai un anumit număr de zecimale. Pe lîngă acestea, procedeele de integrare numerică, bazîndu-se în general pe formule de iteraţie, dau naştere la fenomene de acumulare a erorilor.

Scopul lucrării de faţă este tocmai de a aduce unele contribuţii la studiul acestor acumulări şi de a da delimitări practice pentru o anumită categorie de procedee de integrare numerică în general neliniare.

2. Fie x_i, n puncte ale intervalului I şi $\widetilde{y}_i$ cele n valori aproximative calculate pe aceste puncte ($i = 1,2, \ldots, n$). În cele ce urmează ne vom ocupa de formule de tipul [1])

$$\widetilde{y}_{m+1} = \Phi\,[x_m, \widetilde{y}_m, h_m; f] + \delta_m \qquad (m = 0,1,\ldots, n-1), \tag{2}$$

---

[1]) Vom considera incluse aici şi relaţii de forma (2) în care $\widetilde{y}_{m+1}$ este funcţională nu numai de f, ci şi de derivatele sale parţiale pînă la un anumit ordin (a se vedea formula (14)).

în care $h_m = x_{m+1} - x_m$ iar δ_m este eroarea de rotunjire comisă la pasul $m+1$ $(\tilde{y}_0 = y_0)$.

Să considerăm integrala ecuației (1), $\tilde{y}_m(x)$, care satisface condiției inițiale $\tilde{y}_m(x_m) = \tilde{y}_m$, și să notăm

$$\rho_m = \tilde{y}_m - y(x_m), \quad \Delta_m(x) = \tilde{y}_m(x) - \tilde{y}_{m-1}(x), \quad \Delta_m = \tilde{y}_m - \tilde{y}_{m-1}(x_m).$$

Presupunem acum că integralele $y(x)$, $\tilde{y}_m(x)$ satisfac inegalităților

$$Y_1(x) \leqslant y(x) \leqslant Y_2(x), \tag{3}$$

$$Y_1(x) \leqslant y_m(x) \leqslant Y_2(x) \quad (m = 1,2, \ldots, n). \tag{4}$$

Delimitările acestea pot fi mult mai grosolane decît cele cerute pentru eroarea finală ρ_n. De exemplu, inegalitățile de forma (3), (4), pot fi obținute prin aplicarea o dată sau de două ori a cunoscutei metode de integrare aproximativă a lui Ciaplîghin.

T e o r e m a 1. *Dacă pentru* $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$, $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$, *are loc inegalitatea*

$$f'_y(x,y) \leqslant A(x), \tag{5}$$

unde $f'_y(x,y)$ *este o funcție continuă iar* $A(x)$ *este integrabilă, atunci*

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |\Delta_m| \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx. \tag{6}$$

Demonstrație. Vom porni de la egalitățile evidente

$$\rho_n = \sum_{m=1}^{n} (\tilde{y}_m(x_n) - \tilde{y}_{m-1}(x_n)) = \sum_{m=1}^{n} \Delta_m \frac{\Delta_m(x_n)}{\Delta_m} \tag{7}$$

și vom căuta să delimităm raportul $\Delta_m(x_n)/\Delta_m$, ce figurează în ultima expresie. Avem

$$\tilde{y}'_m(x) - \tilde{y}'_{m-1}(x) = f(x, \tilde{y}_m(x)) - f(x, \tilde{y}_{m-1}(x)) = f'_y(x, \xi(x))\,(\tilde{y}_m(x) - \tilde{y}_{m-1}(x))$$

$$(Y_1(x) \leqslant \xi(x) \leqslant Y_2(x)).$$

și, prin urmare,

$$\frac{\Delta'_m(x)}{\Delta_m(x)} = f'_y(x, \xi(x)). \tag{8}$$

Integrînd ecuația diferențială (8), găsim

$$\Delta_m(x) = C \exp \int_{x_m}^{x} f'_y(x, \xi(x))\,dx;$$

făcînd apoi $x = x_m$, obținem $C = \Delta_m(x_m) - \Delta_m$.

Folosindu-ne acum de ipoteza (5), obținem pentru raportul sus-amintit delimitarea

$$\frac{\Delta_m(x_n)}{\Delta_m} = \exp \int_{x_m}^{x_n} f'_y(x, \xi(x))\,dx \leqslant \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx;$$

cu ajutorul ei și a identității (7) se găsește (6).

La rîndul ei, Δ_m se compune din două erori; eroarea metodei și eroarea de rotunjire

$$\Delta_m = \tilde{y}_m - \tilde{y}_{m-1}(x_m) = \Phi[x_{m-1}, \tilde{y}_{m-1}, h_{m-1}; f] - \tilde{y}_{m-1}(x_m) + \delta_{m-1}.$$

Diferența din prima paranteză este eroarea metodei la primul pas pentru integrala $y_{m-1}(x)$ cu condiția inițială $y_{m-1}(x_{m-1}) = y_{m-1}$, care se delimitează pentru fiecare metodă în parte.

Dacă, de exemplu, este vorba de cunoscuta metodă a lui Runge-Kutta, se poate folosi delimitarea dată de L. B i e b e r b a c h [4], sub forma

$$\bar{\varepsilon}_m \leqslant B h^5 \qquad (h = x_m - x_{m-1})$$

și atunci (6) devine

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |B h^5 + \delta_{m-1}| \exp M(b-a).$$

Dacă facem calculele cu destulă precizie, putem considera și

$$\delta_m < Ch^5 \qquad (m = 0,1, \ldots, n-1)$$

(h se consideră constant în cursul integrării) și atunci

$$|\rho_n| < D\,|h|^4 \tag{9}$$

unde D este constantă pozitivă ce depinde de delimitarea la primul pas.

Evaluarea (9) este totuși prea grosolană, ea neținînd seama decît foarte puțin de forma membrului doi $f(x,y)$. Vom distinge două cazuri;

1°. $A(x) \geqslant 0$; atunci dacă

$$\mu_m = \sup_{[x_m, x_n]} A(x)$$

și $[a,b]$ este un interval ce conține punctele x_i,

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} e^{\mu_m(b-a)} (B + C)\,|h|^5. \tag{10}$$

În particular dacă $\mu \geqslant \sup_{[a,b]} A(x)$,

$$|\rho_n| < (b-a)\,(B+C)\,h^4 \cdot e^{\mu(b-a)}. \tag{11}$$

2°. $A(x) < 0$; atunci dacă

$$A(x) < -\alpha \quad (\alpha > 0),$$

$$|\rho_n| < \sum_{m=1}^{n} \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx\,(B+C)|h|^5 < \frac{b-a}{e^{\alpha h}}(B+C)|h|^4. \tag{12}$$

Avantajul acestei delimitări față de cele cunoscute pînă acum ([1], [7] etc.) reiese și din faptul că acolo cazul favorabil (12) nu putea fi considerat separat.

În ambele cazuri se verifică din nou că pentru rețele echidistante erorile sînt de ordinul lui h^4. Se știe însă că un avantaj mare al formulelor de tip (2) este tocmai faptul că în procesul integrării numerice pasul se poate schimba după voie. Pentru cazul cînd punctele x_i nu sînt echidistante, formulele cunoscute pînă acum nu pot da decît evaluări recurente. La fel, în acest caz formulele cunoscute pînă acum nu ne permit să conchidem asupra ordinului de convergență.

Să notăm $h = \sup_i h_i$; inegalitatea (11) devine atunci

$$|\rho_n| \leqslant (B+C)\,e^{\mu(b-a)} \sum_{m=1}^{n} |h_i|^5 \leqslant (b-a)(B+C)\,|h|^5\,e^{\mu(b-a)}, \tag{13}$$

inegalitate din care rezultă și ordinul erorilor.

Considerațiile pe care le-am făcut mai sus se extind și la alte procedee, cum ar fi cel a lui Vlasov-Cearnîi [8],

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i \pm \frac{[f(x_i, \tilde{y}_i) - f(x_i + h_i, \tilde{y}_i)]\,h_i}{2 - f'_y(x_i + h_i, \tilde{y}_i)\,h_i} + \delta_i \tag{14}$$

totul revenind la calculul erorii la primul pas.

Încheiem acest paragraf cu un exemplu. Fie

$$y' = x^2 - y^3 \quad (y(0) = 0).$$

Se cere să se integreze numeric această ecuație pe intervalul [0,1], cu pasul $h = 0{,}1$. Pe întreg intervalul $f'_y(x,y) = -3y^2 \leqslant 0$. Prin urmare, în (11) $\mu = 0$. Făcînd calculele după formulele indicate în [4] și luînd $C = 1$, obținem

$$|\rho_{10}| < 0{,}052.$$

Dacă folosim însă, de exemplu, delimitarea din [7], găsim

$$|\varepsilon_{10}| < 14{,}29,$$

ceea ce este cu totul inacceptabil.

3. Extinderea rezultatelor obținute la punctul precedent pentru sisteme de ecuații prezintă anumite dificultăți – în primul rînd din cauză că erorile nu vor mai satisface unei simple ecuații cu variabile separabile, ci unui sistem de ecuații liniare.

Să notăm cu $\tilde{y}_{jm}(x)$ integralele ecuațiilor

$$y'_j = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, \nu).$$

care satisfac condițiilor inițiale

$$y_{jm}(x_m) = y_{jm}$$

și să punem

$$\rho_{jm} = \tilde{y}_{jm} - y_j(x_m);\quad \Delta_{jm}(x) = \tilde{y}_{jm}(x) - \tilde{y}_{j,m-1}(x)$$

$$\Delta_{jm} = \tilde{y}_{jm} - \tilde{y}_{j,m-1}(x_m).$$

Dacă printr-un procedeu oarecare am obținut pentru integralele $y_j(x), \tilde{y}_{j,m}(x)$ inegalități analoage lui (3), (4),

$$\begin{gathered} Y_{j1}(x) \leqslant f_j(x) \leqslant Y_{j2}(x), \\ Y_{j1}(x) \leqslant \tilde{y}_{jm}(x) \leqslant Y_{j2}(x), \end{gathered} \tag{15}$$

iar funcțiile f_j satisfac în domeniul $x_0 \leqslant x \leqslant x_\nu$, $Y_{j1}(x) \leqslant y_j \leqslant Y_{j2}(x)$, condițiile lui Lipschitz

$$\begin{gathered} |f_j(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) - f_j(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x))| \leqslant \\ \leqslant K_j\,\{|y_1(x) - \bar{y}_1(x)| + \ldots + |y_n(x) - \bar{y}_n(x)|\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{16}$$

putem enunța

T e o r e m a 2. *Dacă* $x_0 \leqslant x \leqslant x_\nu$, $Y_{j1}(x) \leqslant y_j \leqslant Y_{j2}(x)$, *atunci*

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)| < e^{nk(x-xm)} \sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}|, \tag{17}$$

unde $K = \max_j K_j$.

Demonstrație. Ne vom folosi de identitatea

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j\nu} = \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} (\tilde{y}_{jm}(x_\nu) - y_{j,m-1}(x_1)) = \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{jm}(x_\nu)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{jm}} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jm}.$$

Trebuie deci delimitat raportul

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x_\nu)|}{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{jm}}.$$

Deoarece avem egalitatea

$$\left|\frac{d(\tilde{y}_{jm}(x) - y_{j,m-1}(x))}{dx}\right| = \left|\frac{d\,|\tilde{y}_{jm}(x) - y_{j,m-1}(x)|}{dx}\right|,$$

care este peste tot adevărată, în afară poate de cîteva puncte izolate [6], găsim

$$\left|\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{jm}(x)|\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} K_j \sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)| \leqslant nK \sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)|.$$

Împărţind cu $\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)|$ $(\neq 0)$, găsim inegalitatea diferenţială

$$\left| \frac{\frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)|}{\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{jm}(x)|} \right| < nK,$$

pe care, dacă o integrăm, găsim (17). Din nou Δ_{jm} se compune din eroarea metodei la primul pas şi eroarea de rotunjire. Dacă ne referim iarăşi la metoda lui Runge-Kutta, avem

$$\sum_{j=1}^{n} |\rho_{j\nu}| < \sum_{m=1}^{n} e^{nk(x_\nu - x_m)} \sum_{j=1}^{n} |B_j h^5 + \delta_{j,m-1}| <$$
$$< n\nu (Bh^5 + Ch^5)\, e^{nK(x_\nu - x_0)}, \tag{18}$$

în care B este coeficientul lui h^5 din delimitarea dată de Bieberbach [4], iar C este dat de inegalitatea

$$\delta_{j,m-1} < Ch^5.$$

Dacă mai ţinem seama că $\nu = \dfrac{x_\nu - x_0}{h}$, avem în definitiv

$$|\rho_{j\nu}| < n(x - x_0)\, h^4 (B + C)\, e^{nK(x_\nu - x_0)} = Dh^4, \tag{19}$$

de unde rezultă ordinul de mărime al erorilor.

În sfîrşit, amintim că tot de categoria (2) sînt şi formulele date de D. V. Ionescu [5]. Delimitări pentru primul pas au fost date aici de O. Aramă [2].

Universitatea « V. Babeş», Catedra de analiză

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе приводятся некоторые оценки для погрешностей, допускаемых при интегрировании дифференциальных уравнений при помощи формул вида (2).

Приведенные оценки основаны на следующей теореме.

Теорема 1. *Если при* $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$; $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$ *имеет место неравенство* (15), *где* $f'_y(x, y)$ *непрерывна, а* $A(x)$ *— интегрируема, то имеем оценку* (6).

Здесь $\widetilde{y}_m(x)$ суть интегралы дифференциального уравнения (1) с начальным условием

$$\widetilde{y}_m(x_m) = \widetilde{y}_m,$$

а ρ_m — полная погрешность в узле (x_m).

Оценки (10), (11,) и (12) показывают, каким образом можно приспособить неравенство (6) для различных частных случаев.

Затем теорема и ее следствия распространяются на системы дифференциальных уравнений.

Среди методов, подходящих под (2), отметим метод Рунге — Кутта и Власова — Чарного.

DE LA DÉLIMITATION DES ERREURS DANS CERTAINS PROCÉDÉS D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on indique quelques délimitations des erreurs qui surviennent lors de l'intégration des équations différentielles, au moyen de formules du type (2).

Les délimitations indiquées sont basées sur le

Théorème 1. *Si pour* $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$; $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$, *on a l'inégalité* (15), *où* $f'(x, y)$ *est une fonction continue et* $A(x)$ *est intégrable, on a la délimitation* (6).

Ici, $\widetilde{y}_m(x)$ sont des intégrales de l'équation différentielle (1), satisfaisant à la condition initiale

$$\widetilde{y}_m(x_m) = \widetilde{y}_m$$

et ρ_m est l'erreur totale sur le nœud x_m.

Les délimitations (10), (11) et (12) indiquent la manière d'adapter l'inégalité (6) aux divers cas particuliers.

Le théorème et ses conséquences sont ensuite étendus à des systèmes d'équations différentielles.

Parmi les méthodes qu'on peut ranger dans (2), l'auteur mentionne surtout celles de Runge-Kutta et de Vlassov-Tcharnyi.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Albrecht, *Beiträge zum Runge-Kutta Verfahren*. ZAMM, 35, 100—110 (1955).
2. O. Aramă, *Asupra restului unor formule de integrare numerică de tip Runge-Kutta* (sub tipar).
3. Н. С. Бахвалов, *К оценке ошибки при численном интегрировании дифференциальных уравнений экстраполяционным методом Адамса*. ДАН, 104, 683—686 (1955).

4. L. Bieberbach, *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations* ZAMP, **2**, 233—248 (1951).

5. D. V. Ionescu, *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge şi Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **8**, 65—100 (1956).

6. В. В. Немыцки, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*. Москва, 1947, 14—15.

7. E. Schechter, *Asupra erorii în procedeul de integrare numerică a lui Runge-Kutta*. Studii şi cercetări matematice şi fizice, Cluj, **8**, 115—126 (1957).

8. И. О. Власов, И. А. Чарный, *Об одном методе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. Инженерный Сборник, **8**, 181—186 (1950).