APLICAREA FORMULELOR DE DERIVARE NUMERICĂ LA INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

DE

D. V. IONESCU

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

şi fie $y(x)$ integrala ei care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea integralei $y(x)$ în intervalul $[x_0, x_0 + a]$.

În intervalul $(x_0, x_0 + a)$ luăm nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ şi presupunem că integrala $y(x)$ este cunoscută pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Problema integrării numerice a ecuaţiei diferenţiale (1) constă în a da formula practică de calcul a integralei $y(x)$, într-un punct din intervalul $(x_0, x_0 + a]$, cu ajutorul valorilor lui $y(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi de a studia restul formulei de integrare numerică.

Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul n, continue în domeniul D în care sînt îndeplinite condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea integralei $y(x)$, atunci aplicînd formula lui Taylor vom avea

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} y^{(n+1)}(s)\, ds. \tag{2}$$

Problema integrării numerice a ecuaţiei diferenţiale (1), aşa cum a fost pusă mai sus, se reduce prin formula (2) la problema derivării numerice a unei funcţii, care se formulează astfel: fiind dată funcţia $f(x)$ continuă în intervalul $[x_0, x_0 + a]$ şi avînd derivate continue în acest interval de toate ordinele, care vor interveni în calcule, să se dea formule practice pentru calculul derivatelor $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ în nodul x_0, cu ajutorul valorilor lui $f(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi să se calculeze restul formulei de derivare numerică.

Lucrarea este împărţită în două capitole. În primul se tratează despre formule de derivare numerică, iar în al doilea se tratează despre aplicarea lor la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de forma (1).

Capitolul I

FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ

§ 1. Formule de derivare numerică care provin din expresia unei diferenţe divizate sub formă de integrală definită

1. Într-o lucrare de ansamblu asupra formulelor de cuadratură, care se pot obţine cu ajutorul formulei generalizate de integrare prin părţi, aşa cum a făcut J. R a d o n [1], am dat o expresie a diferenţei divizate de ordinul n pe noduri repetate sub formă de integrală [2], arătînd că

$$[\underbrace{a, \ldots, a}_{\alpha \text{ ori}}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1 \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{x_p, \ldots, x_p}_{k_p \text{ ori}}, \underbrace{b, \ldots, b}_{\beta \text{ ori}}; f(x)] =$$

$$= \int_a^b \varphi(x) f^{(k_1+\ldots+k_p+\alpha+\beta-1)}(x)dz, \tag{3}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ este determinată de un anumit sistem de ecuaţii diferenţiale care se integrează cu anumite condiţii la limită în $a, x_1, \ldots x_p$ şi b. Rezolvînd ecuaţia (3) în raport cu $f^{(\alpha-1)}(a)$ se obţine o formulă de derivare numerică, din care se deduce $f^{(\alpha-1)}(a)$ cu ajutorul valorilor funcţiei $f(x)$ şi a derivatelor ei succesive, care intră în ecuaţia (3), pe nodurile $a, x_1, \ldots, x_p, b$.

În acelaşi mod a procedat prof. T. P o p o v i c i u [3] şi Ş. E. M i k e l a d z e [4], pornind însă de la alte expresii ale diferenţei divizate din membrul întîi al formulei (3).

Vom rezuma rezultatul din lucrarea [2], în cazul unui singur nod multiplu, aducînd cîteva completări.

2. Fie $f(x)$ o funcţie de clasa C^{n+p}, definită în intervalul $[a, b]$[1]) în care luăm nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ astfel ca să avem $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. La intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ ataşăm funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ şi constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi formăm ecuaţiile diferenţiale

$$\varphi_1^{(n+p-1)}(x) = \lambda_1, \quad \varphi_2^{(n+p-1)}(x) = \lambda_2, \ldots, \varphi_n^{(n+p-1)}(x) = \lambda_n \tag{4}$$

1) Adică funcţia $f(x)$ are în intervalul $[a, b]$ derivate succesive pînă la ordinul $n + p$, ultima fiind continuă în acest interval.

care se integrează cu următoarele condiţii la limită:

$$\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi_1'(x_0) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

$$\varphi_1^{(n-1)}(x_0) = (-1)^p \frac{\nu_p}{p!}, \; \varphi_1^{(n)}(x_0) = (-1)^{p-1} \frac{\nu_{p-1}}{(p-1)!}, \ldots, \varphi^{(n+p-2)}(x_0) = -\frac{\nu_1}{1!},$$

$$\varphi_2(x_1) = \varphi(x_1), \; \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(n+p-2)}(x_1) = \varphi_1^{(n+p-2)}(x_1), \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(x_{n-1}), \; \varphi_n'(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}'(x_{n-1}), \ldots, \varphi_n^{(n+p-2)}(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}^{(n+p-2)}(x_{n-1}),$$

$$\varphi_n(x_n) = 0, \quad \varphi_n'(x_n) = 0, \ldots, \varphi_n^{(n+p-2)}(x_n) = 0.$$

Constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ se determină astfel ca integralele ecuaţiilor diferenţiale (4) să verifice ecuaţiile la limită (5).

Este evident că fiecare integrală

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^{(n+p)}(x) f(x)\, dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(n+p)}(x) f(x)\, dx, \ldots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi^{(n+p)}(x) f(x)\, dx$$

este nulă. Aplicînd la fiecare, formula generalizată de integrare prin părţi şi făcînd suma lor, se obţine, ţinînd seama de condiţiile la limită (5), *formula de derivare numerică*

$$-\left[\lambda_1 f(x_0) + \frac{\nu_1}{1!} f'(x_0) + \frac{\nu_2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{\nu_p}{p!} f^{(p)}(x_0)\right] +$$

$$+ K_1 f(x_1) + K_2 f(x_2) + \ldots + K_n(x_n) = (-1)^{n+p-1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(n+p)}(x)\, dx, \tag{6}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ în intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ şi unde

$$\lambda_1 - \lambda_2 = K_1, \quad \lambda_2 - \lambda_3 = K_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n = K_{n-1}, \; \lambda_n = K_n. \tag{7}$$

Funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt date de formulele

$$\varphi_n(x) = K_n \frac{(x - x_n)^{n+p-2}}{(n+p-1)!}$$

$$\varphi_{n-1}(x) = K_{n-1} \frac{(x - x_{n-1})^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + K_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_1(x) = K_1 \frac{(x - x_1)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + K_2 \frac{(x - x_2)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \ldots + K_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!}.$$

Cu formulele (8) sînt verificate ecuațiile diferențiale (4) și condițiile la limită (5) din nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Scriind că și condițiile la limită din nodul x_0 sînt satisfăcute, avem sistemul de ecuații

$$\begin{array}{llll}
K_1(x_1 - x_0) & + K_2(x_2 - x_0) & + \ldots + K_n(x_n - x_0) = \nu_1 & \\
K_1(x_1 - x_0)^2 & + K_2(x_2 - x_0)^2 & + \ldots + K_n(x_n - x_0)^2 = \nu_2 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
K_1(x_1 - x_0)^p & + K_2(x_2 - x_0)^p & + \ldots + K_p(x_n - x_0)^p = \nu_p & (9) \\
K_1(x_1 - x_0)^{p+1} & + K_2(x_2 - x_0)^{p+1} & + \ldots + K_n(x_n - x_0)^{p+1} = 0 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
K_1(x_1 - x_0)^{n+p-1} & + K_2(x_2 - x_0)^{n+p-1} & + \ldots + K_n(x_n - x_0)^{n+p-1} = 0, &
\end{array}$$

care determină $K_1, K_2, \ldots, K_n$ și $\nu_1, \nu_1, \ldots, \nu_p$.

Ținînd seama de ecuațiile (7), ecuațiile (9) se mai scriu sub forma

$$\begin{array}{l}
-\lambda_1 + K_1 + \cdots + K_n = 0 \\
-\lambda_1 x_0 - C_1^1 \nu_1 + K_1 x_1 + \cdots + K_n x_n = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (10) \\
-\lambda_1 x_0^p - C_p^1 \nu_1 x_0^{p-1} - \cdots - C_p^p \nu_p + K_1 x_1^p + \cdots + K_n x_n^p = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
-\lambda_1 x_0^{n+p-1} - C_{n+p-1}^1 \nu_1 x_0^{n+p-2} - \cdots - C_{n+p-1}^p \nu_p x_0^{n-1} + K_1 x_1^{n+p-1} + \cdots + K_n x_n^{n+p-1} = 0.
\end{array}$$

Ecuațiile (9) exprimă că membrul al doilea al formulei de derivare numerică (6) este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu

$$x - x_0, \; (x - x_0)^2, \ldots, (x - x_0)^{n+p-1},$$

iar ecuațiile (10) exprimă că membrul al doilea al formulei de derivare numerică (6) este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu

$$1, \; x, \; x^2, \ldots, x^{n+p-1}.$$

Să considerăm matricea formată cu coeficienții sistemului (10), adică

$$\begin{Vmatrix}
1 & 0 & & \ldots\; 0 & 1 & \ldots\; 1 \\
x_0 & C_1^1 & & \ldots\; 0 & x_1 & \ldots\; x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_0^p & C_p^1 & x_0^{p-1} & \ldots\; C_p^p & x_1^p & \ldots\; x_n^p \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_0^{n+p-1} & C_{n+p-1}^1 & x_0^{n+p-2} & \ldots\; C_{n+p-1}^p x_0^{n-1} & x_1^{n+p-1} & \ldots\; x_n^{n+p-1}
\end{Vmatrix}$$

și să notăm cu A_i determinantul care are aceleași linii și aceleași coloane afară de coloana a i-a. Toți acești determinanți sînt diferiți de zero și rezolvînd sistemul (10) în raport cu $-\lambda_1, -\nu_1, \ldots, -\nu_p, K_1, K_2, \ldots, K_n$ se obține

$$\frac{-\lambda_1}{A_1} = \frac{-\nu_1}{-A_2} = \ldots = \frac{-\nu_p}{(-1)^p A_{p+1}} = \\
= \frac{K_1}{(-1)^{p+1} A_{p+2}} = \ldots = \frac{K_n}{(-1)^{p+n} A_{p+n+1}}. \qquad (11)$$

Ținînd seama că membrul întîi al formulei de derivare numerică (6) este o combinație liniară de numărătorii din formulele (11), deducem că formulele (11) se mai scriu sub forma

$$\frac{-\lambda_1}{A_1} = \frac{-\nu_1}{-A_2} = \ldots = \frac{-\nu_p}{(-1)^p A_{p+1}} = \\
= \frac{K_1}{(-1)^{p+1} A_{p+2}} = \ldots = \frac{K_n}{(-1)^{p+n} A_{p+n+1}} = \frac{-\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+p)}(x)\, dx}{\Delta}, \qquad (12)$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 & 0 & & \ldots\; 0 & 1 & \ldots\; 1 \\
x_0 & C_1^1 & & \ldots\; 0 & x_1 & \ldots\; x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_0^p & C_p^1 & x_0^{p-1} & \ldots\; C_p^p & x_1^p & \ldots\; x_n^p \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_0^{n+p-1} & C_{n+p-1}^1 & x_0^{n+p-2} & \ldots\; C_{n+p-1}^p x_0^{n-1} & x_1^{n+p-1} & \ldots\; x_n^{n+p-1} \\
f(x_0) & \frac{f'(x_0)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} & f(x_1) & \ldots\; f(x_n)
\end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Determinantul Δ_1 care se obține din Δ înlocuind pe $f(x)$ cu x^{n+p}, este diferit de zero, deoarece

$$\Delta_1 = (x_1 - x_0)^p (x_2 - x_0)^p \ldots (x_n - x_0)^p \, V(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad (14)$$

unde $V(x_0, x_1, \ldots x_n)$ este determinantul lui Vandermonde al numerelor $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Egalînd rapoartele din (12) cu $-\dfrac{1}{\Delta_1}$, deducem că *formula de derivare numerică se mai scrie sub forma*

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(n+p)}(x)\, dx, \qquad (15)$$

sau, sub forma

$$[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{p+1 \text{ ori}}, \; x_1, \ldots, x_n; \; f(x)] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(n+p)}(x)\, dx, \qquad (16)$$

căci diferența divizată a funcției $f(x)$ din membrul întîi al formulei (16) *este egală cu* $\frac{\Delta}{\Delta_1}$.

3. *Calculul coeficienților $\lambda_1, \nu_1, \ldots, \nu_p, K_1, \ldots, K_n$ din formula de derivare numerică* (6). Din ecuația (12) deducem că avem

$$K_1 = (-1)^p \frac{A_{p+2}}{\Delta_1}$$

$$K_2 = (-1)^{p+1} \frac{A_{p+3}}{\Delta_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n = (-1)^{p+n-1} \frac{A_{n+p+1}}{\Delta_1}.$$

Fără greutate se arată că în general

$$A_{p+i+1} = (x_1 - x_0)^p \ldots (x_{i-1} - x_0)^p (x_{i+1} - x_0)^p \ldots (x_n - x_0)^p \times$$
$$\times V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

de unde rezultă că avem

$$K_1 = (-1)^p \frac{1}{(x_1 - x_0)^p} \cdot \frac{V(x_0, x_2, \ldots, n_n)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)}$$

$$K_2 = (-1)^{p+1} \frac{1}{(x_2 - x_0)^p} \cdot \frac{V(x_0, x_1, x_3, \ldots, x_n)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \qquad (17)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n = (-1)^{p+n-1} \frac{1}{(x_n - x)_p} \cdot \frac{V(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Dacă se ține seama că în general avem

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i) \ldots (x_n - x_i) \times$$
$$\times V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

formulele (17) se reduc la

$$K_1 = \frac{(-1)^p}{(x_1 - x_0)^{p+1} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1)}$$

$$K_2 = \frac{(-1)^{p+1}}{(x_2 - x_0)^{p+1} (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (18)$$

$$K_n = \frac{(-1)^{p+n-1}}{(x_n - x_0)^{n+1} (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Din aceste expresii se vede că toți numitorii fiind pozitivi, *coeficienții $K_1, K_2, \ldots, K_n$ au semnele alternate, K_1 avînd semnul lui $(-1)^p$.*

Coeficienții $\lambda_1, \nu_1, \ldots, \nu_p$ sînt dați de prima ecuație (10) și de primele p ecuații (9). Ținînd seamă de formulele (17), vom avea în general

$$\nu_j = \frac{(-1)^p}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \left[\frac{1}{(x_1 - x_0)^{p-j}} V(x_0, x_2, \ldots, x_n) - \right.$$
$$- \frac{1}{(x_2 - x_0)^{p-j}} V(x_0, x_1, x_3, \ldots, x_n) + \ldots +$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{(x_n - x_0)^{p-j}} V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \right]$$

sau

$$\nu_j = \frac{(-1)^{p+n-1}}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ 0 & \frac{1}{(x_1 - x_0)^{p-j}} & \ldots & \frac{1}{(x_n - x_0)^{p-j}} \end{vmatrix}$$

sau încă

$$\nu_j = (-1)^{p+n-1} \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \ldots (x_n - x_0)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 - x_0 & \ldots & x_n - x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1 - x_0)^{n-2} & \ldots & (x_n - x_0)^{n-2} \\ \frac{1}{(x_1 - x_0)^{p-j+1}} & \ldots & \frac{1}{(x_n - x_0)^{p-j+1}} \end{vmatrix},$$

unde $j = 0, 1, \ldots, p$. $(\lambda_1 = \nu_0)$.

Se ştie că

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-2} & & y_n^{n-2} \\ \frac{1}{y_1^l} & \dots & \frac{1}{y_n^l} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{V(y_1 y_2 \dots y_n)}{(y_1, y_2, \dots y_n)} Q_{-1}\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots, \frac{1}{y_n}\right),$$

unde $Q_{l-1}\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots, \frac{1}{y_n}\right)$ este un polinom omogen de gradul $l-1$ în $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots, \frac{1}{y_n}$, cu coeficienţii egali cu 1.

Ţinînd seama de aceasta, expresia definitivă a coeficienţilor ν_j este

$$\nu_j = \frac{(-1)^p}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\dots(x_n - x_0)} Q_{p-j}\left(\frac{1}{x_1 - x_0}, \frac{1}{x_2 - x_0}, \dots, \frac{1}{x_n - x_0}\right), \qquad (19)$$

unde $j = 0, 1, \dots, n$. ($\lambda_1 = \nu_0$).

Se constată că *toţi coeficienţii* ν_j *au semnul lui* $(-1)^p$.

4. *Altă formă a formulei de derivare numerică* (6). Să considerăm funcţia raţională

$$\frac{1}{(x - x_0)^{p+1}(x - x_1)\dots(x - x_n)}$$

pe care s-o descompunem în funcţii raţionale simple punînd în evidenţă reziduurile $A_1, A_2, \dots, A_n$ relative la nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vom avea

$$\frac{1}{(x - x_0)^{p+1}(x - x_1)\dots(x - x_n)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n} + \dots, \qquad (20)$$

unde

$$A_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(x_1 - x_0)^{p+1}(x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)}$$

$$A_2 = \frac{(-1)^{n-2}}{(x_2 - x_0)^{p+1}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\dots x_n - x_2)}$$

. . . .

$$A_n = \frac{1}{(x_n - x_0)^{p+1}(x_n - x_1)\dots(x - x_{n-1})}.$$

Ţinînd seamă de acestea, formulele (18) arată că avem

$$\begin{aligned} K_1 &= (-1)^{n+p-1} A_1 \\ K_2 &= (-1)^{n+p-1} A_2 \\ &\dots\dots\dots \\ K_n &= (-1)^{n+p-1} A_n. \end{aligned} \qquad (21)$$

Din prima ecuaţie (10) şi din primele p ecuaţii (9) se deduce că

$$\lambda_1 f(x_0) + \frac{\nu_1}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{\nu_p}{p!} f^{(p)}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} K_i \left[f(x_0) + \frac{x_i - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x_i - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0)\right].$$

Formula de derivare numerică (6) se poate deci scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \left\{ f(x_i) - \left[f(x_0) + \frac{x_i - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x_i - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0)\right]\right\} = (-1)^{n+p-1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+p)}(x)\,dx, \qquad (22)$$

în care figurează numai coeficienţii K_i, daţi de formulele (18), atît în membrul întîi, cît şi în membrul al doilea, din cauza formulelor (8).

Însă formulele (21) arată că coeficienţii $K_1, K_2, \dots, K_n$ sînt proporţionali cu $A_1, A_2, \dots, A_n$, ceea ce înseamnă că formulele de derivare numerică (6) sau (22) se pot scrie şi sub forma

$$\sum_{i=1}^{i} A_i \left\{ f(x_i) - \left[f(x_0) + \frac{x_i - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x_i - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0)\right]\right\} = (-1)^{n+p-1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+p)}(x)\,dx. \qquad (22')$$

În această formulă funcţia $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ în intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ unde, după formulele (8), avem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A_1 \frac{(x - x_1)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + A_2 \frac{(x - x_2)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \dots + A_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} \\ \varphi_2(x) &= \qquad\qquad A_2 \frac{(x - x_2)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \dots + A_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad A_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!}. \end{aligned} \qquad (23)$$

În formulele (22) și (22′) factorul pe care-l înmulțește K_i este diferența dintre $f(x_i)$ și primii $p+1$ termeni din dezvoltarea lui $f(x)$ după puterile lui $x_i - x_0$ cu ajutorul formulei lui Taylor. Această observare dă un procedeu practic pentru scrierea formulelor de derivare numerică de forma (6).

Exemplu. Să presupunem $n = 3$ și $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$ iar $p = 2$. Pentru a găsi formula de derivare numerică corespunzătoare, se pornește de la descompunerea în funcții raționale simple

$$\frac{1}{(x-x_0)^3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \ldots,$$

unde

$$A_1 = \frac{1}{2h^5},\quad A_2 = -\frac{1}{8h^5},\quad A_3 = \frac{1}{54h^5}.$$

Formula de derivare numerică este deci

$$\frac{1}{2h^5}\left[f(x_1) - f(x_0) - hf'(x_0) - \frac{h^2}{2!}f''(x_0)\right] -$$

$$-\frac{1}{8h^5}\left[f(x_2) - f(x_0) - 2hf'(x) - \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_0)\right] +$$

$$+\frac{1}{54h^5}\left[f(x_3) - f(x_0) - 3hf'(x_0) - \frac{(3h)^2}{2!}f''(x_0)\right] = \int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) f^{(5)}(x)dx,$$

adică

$$\frac{1}{216h^5}\left[108 f(x_1) - 27 f(x_2) + 4 f(x_3) - 85 f(x_0) - 66hf'(x_0) - 18h^2 f''(x)\right] =$$

$$= \int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) f^{(5)}(x)dx. \tag{24}$$

În această formulă avem

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2h^5}\frac{(x-x_1)^4}{4!} - \frac{1}{8h^5}\frac{(x-x_2)^4}{4!} + \frac{1}{54h^5}\frac{(x-x_3)^4}{4!}$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{8h^5}\frac{(x-x_2)^4}{4!} + \frac{1}{54h^5}\frac{(x-x_3)^4}{4!} \tag{24′}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{54h^5}\frac{(x-x_2)^4}{4!}.$$

5. *Constantele* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *din ecuațiile diferențiale* (4) *sînt toate diferite de zero.* Pentru a demonstra aceasta, să observăm că din formulele (7) și (21) avem

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-1)^{p+n-1}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \\ \lambda_2 &= (-1)^{p+n-1}(A_2 + A_3 + \ldots + A_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= (-1)^{p+n-1}A_n. \end{aligned} \tag{25}$$

Deci a demonstra că constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt diferite de zero, este tot una cu a demonstra că $A_1, A_2, \ldots A_n$ *fiind reziduurile funcției raționale* (20) *relativ la polurile* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *sumele* $A_j + A_{j+1} + \ldots + A_n$ *sînt diferite de zero.*

Să considerăm polinomul

$$h_k(x) = \frac{(x-x_0)^{p+1}(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)^{p+1}(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)},$$

care se anulează în nodul x_0 împreună cu primele p derivate și în nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ și care ia valoarea 1 în nodul x_k. Polinomul $h_k(x)$ este un polinom de gradul $p+n$ al cărui prim termen este $A_k x^{p+n}$, A_k fiind reziduul polului x_k al funcției raționale (20).

Polinomul

$$h(x) = h_j(x) + h_{j+1}(x) + \ldots + h_n(x) = (A_j + A_{j+1} + \ldots + A_n)x^{p+n} + \ldots$$

are rădăcina x_0 multiplă de ordinul $p+1$ și avem

$$h(x_j) = 1,\ h(x_{j+1}) = 1, \ldots, h(x_n) = 1$$

iar

$$h(x_1) = 0,\ h(x_2) = 0, \ldots, h(x_{j-1}) = 0.$$

Aplicînd la polinomul $h(x)$ teorema lui Rolle la intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_{j-2}, x_{j-1}]$ și la intervalele $[x_j, x_{j+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, deducem că $h(x)$ are rădăcina x_0 multiplă de ordinul p și alte $n-1$ rădăcini distincte la dreapta lui x_0. Repetînd acest raționament la polinomul $h'(x)$, apoi la $h''(x), \ldots$ deducem că polinomul $h^{(p)}(x)$ are rădăcina x_0 și alte $n-1$ rădăcini distincte la dreapta lui x_0. Avem

$$h^{(p)}(x) = (n+p)(n+p-1)\ldots(p+1)(A_j + A_{j+1} + \ldots + A_n)x^n + \ldots$$

Dacă $A_j + A_{j+1} + \ldots + A_n = 0$, atunci $h(x)$ este un polinom de grad mai mic decît n, care avînd n rădăcini distincte este identic nul. Se deduce că $h^{(p-1)}(x) = 0$, deoarece $h^{(p-1)}(x_0) = 0$. În mod analog se deduce că $h^{(p-2)}(x) = 0 \ldots$ și așa mai departe că $h'(x) = 0$. Ar urma deci ca polinomul $h(x)$ să fie o constantă, ceea ce este imposibil căci $h(x_0) = 0$, pe cînd $h(x_n) = 1$.

Deci avem $A_j + A_{j+1} + \ldots + A_n \neq 0$ și prin urmare toate constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt diferite de zero.

Putem preciza semnul sumei $A_j + A_{j+1} + \dots + A_n$. Pentru aceasta, observăm că în intervalul $[x_{j-1}, x_j]$ polinomul $h(x)$ este pozitiv. Rezultă că $h(x)$ are un maxim în intervalul $[x_j, x_{j+1}]$, un minim în intervalul $[x_{j+1}, x_{j+2}]$, ... şi că în ultimul interval $[x_{n-1}, x_n]$, $h(x)$ are un maxim sau un minim după cum $(-1)^{n-j}$ este -1 sau $+1$.

Dacă $h(x)$are un maxim în intervalul $[x_{n-1}, x_n]$, atunci $h(x)$ tinde către $-\infty$ cînd x tinde către $+\infty$; deci $A_j + A_{j+1} + \dots + A_n < 0$.

Dacă $h(x)$ are un minim în intervalul $[x_{n-1}, x_n]$, atunci $h(x)$ tinde către $+\infty$ cînd x tinde către $+\infty$, deci $A_j + A_{j+1} + \dots + A_n > 0$.

Prin urmare *suma* $A_j + A_{j+1} + \dots + A_n$ *are semnul lui* $(-1)^{n-j}$ şi putem adăuga după formulele (25) că λ_j *are semnul lui* $(-1)^{p+j+1}$.

6. *Funcţia* $\varphi(x)$ *din formula de derivare numerică* (6) *sau* (22) *sau* (22′) *este pozitivă în intervalul* (x_0, x_n). Pentru $n = 1$, acest lucru este evident căci formula (6) se reduce în acest caz la formula lui Taylor cu restul scris sub forma lui Lagrange.

Să presupunem deci $n \geqslant 2$. Funcţia $\varphi(x)$ satisface în nodurile x_0 şi x_n la următoarele condiţii

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-2)}(x_0) = 0.$$

$$\varphi(x_n) = 0, \quad \varphi'(x_n) = 0, \dots, \varphi^{(n+p-2)}(x_n) = 0.$$

iar în intervalul $[x_{n-1}, x_n]$ ea coincide cu

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \frac{(x - x_n)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} = (-1)^{n+p-1} \lambda_n \frac{(x_n - x)^{n+p-1}}{(n+p-1)!}.$$

Însă s-a arătat la nr. 4, că λ_n are semnul lui $(-1)^{n+p+1}$, de unde rezultă că $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ *este pozitivă în intervalul* $[x_{n-1}\ x_n)$.

Funcţia $\varphi(x)$ este continuă în intervalul $[x_0, x_n]$ şi are derivate continue pînă la ordinul $n + p - 2$, derivata $\varphi^{(n+p-1)}(x)$ fiind discontinuă în nodurile $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Funcţia $\varphi(x)$ anulîndu-se în nodurile x_0 şi x_n, conform teoremei lui Rolle, derivata ei $\varphi'(x)$ are cel puţin un zero în intervalul (x_0, x_n). Să arătăm că ea nu poate avea decît un singur zero.

Într-adevăr, dacă $\varphi'(x)$ ar avea două zerouri în intervalul (x_0, x_n), aplicînd succesiv teorema lui Rolle ar rezulta ca $\varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-2)}(x)$ să aibă $3, \dots, n-1$ zerouri în intervalul (x_0, x_n). Continuînd acelaşi raţionament, ar urma ca $\varphi^{(n-1)}(x), \varphi^{(n)}(x), \dots, \varphi^{(n+p-2)}(x)$ să aibă n zerouri în intervalul (x_0, x_n). Să arătăm că aceasta este o imposibilitate.

Observăm întîi că nici un zero al lui $\varphi^{(n+p-2)}(x)$ nu se găseşte în intervalul $[x_{n-1}, x_n)$. De asemenea observăm că într-un interval. $(x_{k-1}, x_k]$, unde $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi^{(n+p-2)}(x)$ nu poate să aibă două zerouri, căci aplicînd teorema lui Rolle ar urma ca $\varphi^{(n+p-1)}(x)$ să se anuleze într-un

punct din intervalul (x_{k-1}, x_k), ceea ce este imposibil căci în acest interval avem $\varphi^{(n+p-1)}(x) = \varphi_k^{(n+p-1)}(x) = \lambda_k \neq 0$. Deci în intervalul (x_0, x_{n-1}) derivata $\varphi^{(n+p-2)}(x)$ nu poate să aibă decît cel mult $n-1$ zerouri, pe cînd mai sus s-a arătat că în acelaşi interval $\varphi^{(n+p-2)}(x)$ are n zerouri.

Deci ipoteza că $\varphi'(x)$ ar avea două zerouri în intervalul (x_0, x_n) ducînd la o contradicţie, deducem că $\varphi'(x)$ are un singur zero în intervalul (x_0, x_{n-1}). Funcţia $\varphi(x)$ fiind pozitivă în intervalul (x_{n-1}, x_n) şi derivata ei $\varphi'(x)$ avînd un singur zero în intervalul (x_0, x_{n-1}), este pozitivă în intervalul (x_0, x_n).

Graficul funcţiei $\varphi(x)$ este dat în fig. 1.

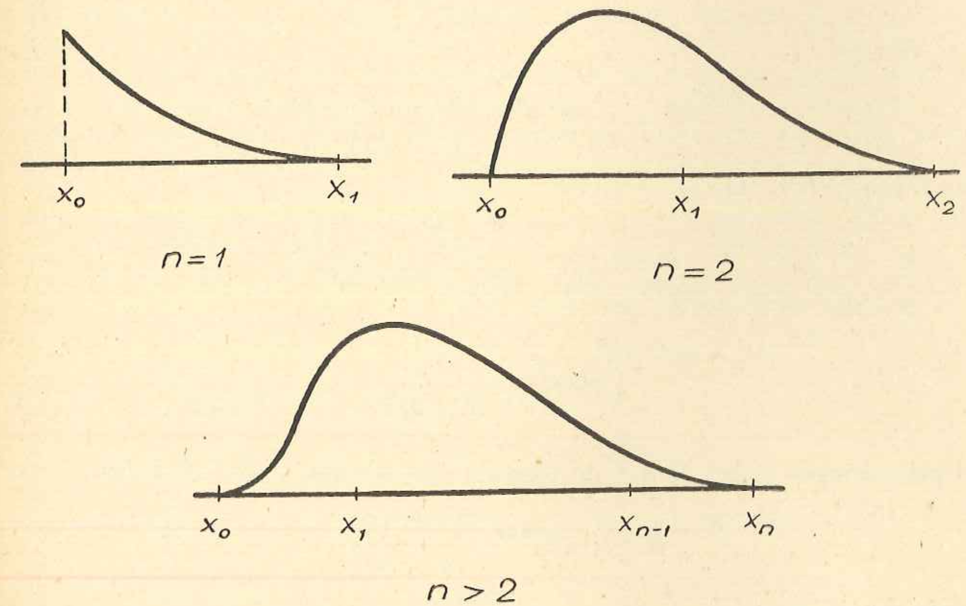

Fig. 1

7. *Restul în formula de derivare numerică* (6), (22) *sau* (22′). Membrul al doilea al formulei de derivare numerică este

$$R = (-1)^{n+p+1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+p)}(x) dx \tag{26}$$

şi se numeşte *restul* formulei.

Deoarece s-a demonstrat că $\varphi(x)$ este o funcţie pozitivă în intervalul (x_0, x_n), restul se mai poate scrie sub forma

$$R = (-1)^{n+p+1} f^{(n+p)}(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx,$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$. Integrala din membrul al doilea se calculează cu ajutorul formulei de derivare numerică (6), înlocuind pe $f(x)$ cu polinomul

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^p (x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+p)!}.$$

Formula (6) ne dă

$$(-1)^{n+p+1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = -\frac{\nu_p}{p!} f^{(p)}(x_0).$$

Avem

$$\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} = (-1)^n \frac{(x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0)}{(n+p)!}$$

iar formula (19) dă

$$\nu_p = \frac{(-1)^p}{(x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0)}.$$

Rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = \frac{1}{(n+p)!}$$

şi prin urmare restul R dat de formula (26) se mai scrie sub forma

$$R = (-1)^{n+p+1} \frac{f^{(n+p)}(\xi)}{(n+p)!}, \tag{26'}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Dacă formula de derivare numerică (6) este scrisă sub forma (16) şi notăm cu R_1 membrul al doilea al acestei formule, atunci avem conform calculelor de mai sus

$$R_1 = \frac{f^{(n+p)}(\xi)}{(n+p)!}$$

şi regăsim aici o teoremă bine cunoscută asupra diferenţei divizate din membrul întîi al formulei (16).

Dacă notăm cu M_{n+p} o margine superioară a lui $|f^{(n+p)}(x)|$ în intervalul $[a, b]$, atunci din formula (26') deducem următoarea evaluare a lui $|R|$

$$|R| \leqslant \frac{M_{n+p}}{(n+p)!}. \tag{27}$$

§ 2. Generalizarea formulelor lui A. A. Markov şi punerea restului acestor formule sub formă de integrală definită

8. Fie $f(x)$ o funcţie de clasă C^{n+1} în intervalul $[a, b]$ şi $x_0, x_1, \dots, x_n$ noduri din acest interval, astfel ca $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Dacă nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu relaţia h, *formulele lui Markov* [4],

$$h^p f^{(p)}(x_0) = \sum_{i=p}^{n} A_i \Delta^i f(x_0) \tag{28}$$

dau derivata $f^{(p)}(x_0)$ cu ajutorul valorilor lui $f(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$, unde $p = 1, 2, \dots, n$.

În acest paragraf vom stabili formule de tipul formulelor lui Markov, *fără însă să presupunem că nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt în progresie aritmetică* şi vom studia restul acestor formule pe care-l vom pune sub formă de integrală definită.

9. Presupunem deci nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ oricum în intervalul $[a, b]$ şi ordonate astfel ca $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. La intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ataşăm funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ şi constantele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ şi apoi considerăm ecuaţiile diferenţiale

$$\varphi_1^{(n)}(x) = \lambda_1, \ \varphi_2^{(n)}(x) = \lambda_2, \dots, \varphi_n^{(n)}(x) = \lambda^n \tag{29}$$

pe care le integrăm cu condiţiile la limită

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0) = 0, \ \varphi_1'(x_0) = 0, \dots, \varphi_1^{(n-p-1)}(x_0) = 0 \\
&\varphi_1^{(n-p)}(x_0) = (-1)^p \frac{\mu}{p!}, \ \varphi_1^{(n-p+1)}(x_0) = 0, \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
&\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \ \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \dots, \varphi_2^{(n-1)}(x_1) = \varphi_1^{(n-1)}(x_1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\varphi_n(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(x_{n-1}), \ \varphi_n'(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}'(x_{n-1}), \dots, \\
&\qquad \varphi_n^{(n-1)}(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_{n-1}) \\
&\varphi_n(x_n) = 0, \ \varphi_n'(x_n) = 0, \dots, \varphi_n^{(n-1)}(x_n) = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Constantele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ şi μ din ecuaţiile diferenţiale (29) şi din condiţiile la limită (30) se determină astfel ca funcţiile $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ să verifice atît ecuaţiile diferenţiale cît şi condiţiile la limită.

Fiecare integrală

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^{(n+1)}(x) f(x)\, dx, \ \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(n+1)}(x) f(x) dx, \dots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n^{(n+1)}(x) f(x)\, dx$$

este nulă. Aplicînd la fiecare formula generalizată de integrare prin părţi şi făcînd suma lor, obţinem *formula de derivare numerică*

$$-\mu\frac{f^{(p)}(x_0)}{p\,!}-\lambda_1 f(x_0)+K_1 f(x_1)+\dots+K_n f(x_n)=$$

$$=(-1)^n\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)f^{(n+1)}(x)\,dx, \tag{31}$$

unde

$$K_1=\lambda_1-\lambda_2,\quad K_2=\lambda_2-\lambda_3,\ \dots,K_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\ K_n=\lambda_n. \tag{32}$$

În stabilirea formulei (31) s-a presupus că $1\leqslant p\leqslant n$.

Pentru a arăta că formula (31) are sens, trebuie să determinăm funcţiile $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ care verifică ecuaţiile diferenţiale (29) şi condiţiile la limită (30).

Ecuaţiile diferenţiale (29) şi condiţiile la limită din nodurile $x_1, x_2,\dots,x_n$ ne dau

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x)&=K_n\frac{(x-x_n)^n}{n\,!}\\
\varphi_{n-1}(x)&=K_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^n}{n\,!}+K_n\frac{(x-x_n)^n}{n\,!}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varphi_1(x)&=K_1\frac{(x-x_1)^n}{n\,!}+K_2\frac{(x-x_2)^n}{n\,!}+\dots+K_n\frac{(x-x_n)^n}{n\,!}\,.
\end{aligned}\tag{33}$$

Scriind că şi condiţiile la limită din punctul x_0 sînt satisfăcute, avem sistemul de ecuaţii liniare şi omogene

$$\begin{aligned}
&K_1(x_1-x_0)+K_2(x_2-x_0)+\dots+K_n(x_n-x_0)=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&K_1(x_1-x_0)^{p-1}+K_2(x_2-x_0)^{p-1}+\dots+K_n(x_n-x_0)^{p-1}=0\\
&K_1(x_1-x_0)^{p}+K_2(x_2-x_0)^{p}+\dots+K_n(x_n-x_0)^{p}=\mu\\
&K_1(x_1-x_0)^{p+1}+K_2(x_2-x_0)^{p+1}+\dots+K_n(x_n-x_0)^{p+1}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&K_1(x_1-x_0)^{n}+K_2(x_2-x_0)^{n}+\dots+K_n(x_n-x_0)^{n}=0,
\end{aligned}\tag{34}$$

care determină pe $K_1, K_2,\dots,K_n$, sau sistemul

$$\begin{aligned}
&-\lambda_1 \qquad\qquad\quad +K_1+\dots+K_n=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-\lambda_1x_0^p-C_p^p\,\mu+K_1x_1^p+\dots+K_n\,x_n^p=0\\
&-\lambda_1x_0^{p+1}-C_{p+1}^p\,\mu x_0+K_1x_1^{p+1}+\dots+K_n\,x_n^{p+1}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-\lambda_1x_0^n-C_n^p\,\mu\,x_0^{n-p}+K_1\,x_1^n+\dots+K_n\,x_n^n=0,
\end{aligned}\tag{35}$$

care determină pe $K_1, K_2,\dots K_n$, λ şi μ.

Considerăm matricea

$$\left\|\begin{matrix}
1 & 0 & 1 & \dots & 1\\
x_0 & 0 & x_1 & \dots & x_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_0^p & C_p^p & x_1^p & \dots & x_n^p\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_0^n & C_n^px_0^{n-p} & x_1^n & \dots & x_n^n
\end{matrix}\right\|$$

şi notăm cu $A_1, A_2,\dots,A_{n+2}$ determinanţii care au aceleaşi linii şi coloane afară de 1-a, a 2-a, ..., a $(n+2)$-a. Toţi aceşti determinanţi sînt diferiţi de zero, şi rezolvînd sistemul (35) în $-\lambda_1, -\mu, K_1,\dots,K_n$ vom avea

$$\frac{-\lambda_1}{A_1}=\frac{-\mu}{-A_2}=\frac{K_1}{A_3}=\dots=\frac{(-1)^{n+1}}{A_{n+2}}. \tag{36}$$

Membrul întîi al formulei de derivare numerică fiind o combinaţie liniară de numărătorii din formulele (36), aceste formule se mai scriu sub forma

$$\frac{-\lambda_1}{A_1}=\frac{-\mu}{-A_2}=\frac{K_1}{A_3}=\dots=\frac{K_n}{(-1)^{n+1}A_{n+2}}=\frac{-\displaystyle\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)f^{(n+1)}(x)dx}{\Delta}, \tag{37}$$

unde

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & \dots & 1\\
x_0 & 0 & x_1 & \dots & x_n\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_0^p & C_p^p & x_1^p & \dots & x_n^p\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_0^n & C_n^p\,x_0^{n-p} & x_1^n & \dots & x_n^n\\
f(x_0) & \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p\,!} & f(x_1) & \dots & f(x_n)
\end{vmatrix}. \tag{38}$$

Să demonstrăm că *determinantul* Δ_1 *care se obține din* Δ *înlocuind pe* $f(x)$ *cu* x^{n+1} *este diferit de zero.* Pentru aceasta, considerăm determinantul lui Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^p & x^p & x_1^p & \dots & x_n^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n+1} & x^{n+1} & x_1^{n+1} & \dots & x_n^{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \times \times V(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

unde $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ este determinantul lui Vandermonde al numerelor distincte $x_0, x_1, \dots, x_n$. Derivînd ambii membrii în raport cu x de p ori, împărțind cu $p\,!$ și făcînd apoi $x = x_0$, obținem valoarea determinantului Δ_1. Să notăm

$$h(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Vom avea

$$\frac{h^{(p)}(x_0)}{p\,!} = \sum (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_{n-p+1}).$$

Notînd în general

$$\mu_k(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) = \sum (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\dots(x_k - x_0) > 0, \quad (39)$$

vom avea

$$\frac{h^{(p)}(x_0)}{p\,!} = (-1)^{n-p+1} \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0).$$

Rezultă că

$$\Delta_1 = (-1)^{p-1} V(x_0, x_1, \dots, x_n)\, \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) \neq 0. \quad (40)$$

Egalînd rapoartele (37) cu $-\dfrac{1}{\Delta_1}$, deducem că *formula de derivare numerică* (31) *se mai poate scrie sub forma*

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(n+1)}(x)\,dx, \quad (41)$$

unde Δ *este determinantul* (38), *iar* Δ_1 *se obține din* Δ *înlocuind pe* $f(x)$ *cu* x^{n+1}.

10. *Calculul coeficienților* $\lambda_1, \mu, K_1, K_2, \dots, K_n$. Din formulele

$$\frac{-\lambda_1}{A_1} = \frac{-\mu}{-A_2} = \frac{K_1}{A_3} = \dots = \frac{K_n}{(-1)^{n+1} A_{n+2}} = -\frac{1}{\Delta_1}$$

se deduce că

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{\Delta_1},\ \mu = -\frac{A_2}{\Delta_1},\ K_1 = -\frac{A_3}{\Delta_1},\ \dots,\ K_n = (-1)^n \frac{A_{n+2}}{\Delta_1}.$$

Însă

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^p V(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0) \\ A_2 &= V(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ A_3 &= (-1)^{p-1} V(x_0, x_2, x_3, \dots, x_n)\, \mu_{n-p}(x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0) \\ A_4 &= (-1)^{p-1} V(x_0, x_1, x_3, \dots, x_n)\, \mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n+2} &= (-1)^{p-1} V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\, \mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_{n-1} - x) \end{aligned}$$

Ținînd seama de formula (40) se deduce că

$$\mu = \frac{(-1)^p}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)}, \quad (42)$$

iar

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)} \\ K_1 &= -\frac{V(x_0, x_2, x_3, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\mu_{n-p}(x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)} \quad (43) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_n &= (-1)^n \frac{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)}. \end{aligned}$$

Însă

$$\begin{aligned} \frac{V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\dots(x_n - x_0)} \\ \frac{V(x_0, x_2, x_3, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{-1}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{V(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{(-1)^n}{(x_0 - x_n)(x_1 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n)}, \end{aligned}$$

iar dacă se consideră funcția rațională

$$\frac{1}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)} = \frac{B_0}{x - x_0} + \frac{B_1}{x - x_1} + \dots + \frac{B_n}{x - x_n} \quad (44)$$

dezvoltată în funcții raționale simple, avem

$$B_0 = \frac{(-1)^n}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\dots(x_n - x_0)}$$

$$B_1 = \frac{(-1)^n}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B_n = \frac{(-1)^n}{(x_0 - x_n)(x_1 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n)}.$$

Revenind la formulele (43), vom avea

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 &= (-1)^n B_0 \frac{\mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)} \\
K_1 &= (-1)^n B_1 \frac{\mu_{n-p}(x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_n &= (-1)^n B_n \frac{\mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_0)}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Deoarece semnul lui B_i este semnul lui $(-1)^{n+i}$, din formulele (45) deducem că $-\lambda_1 > 0$, $K_1 < 0$, $K_2 > 0, \dots, (-1)^n K_n > 0$, adică $-\lambda_1, K_1, \dots, K_n$ *au semnele alternate,* $-\lambda_1$ *fiind pozitiv.*

Din formulele (45) deducem că *formula de derivare numerică* (31) *se mai scrie sub forma*

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+p+1} \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} &+ B_0 \mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0) f(x_0) \\
&+ B_1 \mu_{n-p}(x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0) f(x_1) \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ B_n \mu_{n-p}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_0) f(x_n) \\
&= \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx.
\end{aligned} \tag{46}$$

Avem prin urmare o regulă practică pentru a se scrie formula de derivare numerică (46). Se calculează reziduurile $B_0, B_1, \dots, B_n$ din formula (44), apoi se calculează sumele μ_{n-p} și μ_{n-p+1} și în fine se scrie formula (46).

Exemplu. Să presupunem că $n = 4$ și $p = 2$, iar nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sînt în progresie aritmetică cu rația h. Avem

$$\frac{1}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)} = \frac{B_0}{x - x_0} + \frac{B_1}{x - x_1} + \frac{B_2}{x - x_2} + \frac{B_3}{x - x_3} + \frac{B_4}{x - x_4},$$

unde

$$B_0 = \frac{1}{24h^4}, \quad B_1 = -\frac{1}{6h^4}, \quad B_2 = \frac{1}{4h^4}, \quad B_3 = -\frac{1}{6h^4}, \quad B_4 = \frac{1}{24h^4}.$$

Pe de altă parte din șirul

$$x_1 - x_0 = h, \quad x_2 - x_0 = 2h, \quad x_3 - x_0 = 3h, \quad x_4 - x_0 = 4h$$

deducem că

$$\mu_3(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0, x_4 - x_0) = 50h^3,$$

iar

$$\begin{aligned}
\mu_2(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0, x_4 - x_0) &= 35h^2 \\
\mu_2(x_2 - x_0, x_3 - x_0, x_4 - x_0) &= 26h^2 \\
\mu_2(x_1 - x_0, x_3 - x_0, x_4 - x_0) &= 19h^2 \\
\mu_2(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_4 - x_0) &= 14h^2 \\
\mu_2(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0) &= 11h^2.
\end{aligned}$$

Aplicînd formula (46), vom avea următoarea formulă de derivare numerică

$$\frac{f''(x_0)}{2} = \frac{1}{24h^2}[35 f(x_0) - 104 f(x_1) + 114 f(x_2) - 56 f(x_3) + 11 f(x_4)] - 50h^3 \int_{x_0}^{x_4} \varphi(x) f^{(5)}(x) dx. \tag{47}$$

11. *O nouă formă a formulei de derivare numerică* (31) *sau* (46). Din definiția diferențelor divizate ale funcției $f(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$, rezultă că putem scrie

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0)[x_0, x_1; f(x)] \\
f(x_2) &= f(x_0) + (x_2 - x_0)[x_0, x_1; f(x)] + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)[x_0, x_1, x_2; f(x)] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(x_n) &= f(x_0) + (x_n - x_0)[x_0, x_1; f(x)] + (x_n - x_0)(x_n - x_1)[x_0, x_1, x_2; f(x)] + \\
&+ \dots + (x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n; f(x)].
\end{aligned}$$

Înlocuind în formula (46) pe $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ cu ajutorul diferențelor divizate, această formulă ia următoarea formă

$$(-1)^{n+p+1}\frac{f^{(p)}(x_0)}{p\,!} + D_0 f(x_0) + D_1\,[x_0, x_1; f(x)] + \ldots +$$
$$+ D_p\,[x_0, x_1, \ldots, x_p; f(x)] + \ldots + D_n\,[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)] =$$
$$= \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0)\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)\, f^{(n+1)}(x)\,dx. \qquad (48)$$

Coeficienții $D_0, D_1, \ldots, D_n$ se determină în modul următor: înlocuind pe $f(x)$ cu $1, x, \ldots x^{p-1}$ se constată că $D_0, D_1, \ldots, D_{p-1}$ sînt nuli. Apoi pentru a determina pe D_{p+i}, unde $i = 0, 1, \ldots, n-p$, înlocuim pe $f(x)$ cu

$$f_{p+i}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{p+i-1}).$$

Toate diferențele divizate din formula (48) sînt atunci nule, afară de diferența divizată $[x_0, x_1, \ldots, x_{p+i}; f_{p+i}(x)]$ care este egală cu 1. Se deduce că

$$D_{p+i} = (-1)^{n+p}\frac{f^{(p)}_{p+i}(x_0)}{p\,!}.$$

Însă

$$\frac{f^{(p)}_{p+i}(x_0)}{p\,!} = (-1)^i\,\mu_i(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+i-1} - x_0)$$

și prin urmare vom avea

$$D_{p+i} = (-1)^{n+p+i}\,\mu_i(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+i-1} - x_0)$$

adică

$$\begin{aligned}
D_p\ \ &= (-1)^{n+p}\\
D_{p+1} &= (-1)^{n+p+1}\mu_1(x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0)\\
D_{p+2} &= (-1)^{n+p+2}\mu_2(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+1} - x_0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D_n\ \ &= (-1)^{n+n}\mu_{n-p}(x_1 - x_0, \ldots, x_{n-1} - x_0).
\end{aligned}$$

Formula de derivare numerică (46) *poate fi scrisă deci sub forma*

$$\frac{f^{(p)}(x_0)}{p\,!} = [x_0, x_1, \ldots, x_p; f(x)] - \mu_1(x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0)\,[x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}; f(x)]$$
$$+ \mu_2(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+1} - x_0)\,[x_0, x_1, \ldots, x_{p+2}; f(x)] - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-p}\mu_{n-p}(x_1 - x_0, \ldots, x_{n-1} - x_0)\,[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)]$$
$$+ (-1)^{n-p+1}\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x) f^{(n+1)}(x)dx,$$

unde în membrul al doilea s-au pus în evidență diferențele divizate ale funcției $f(x)$ *pe nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

În particular, cînd nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu rația h, avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_q; f(x)] = \frac{\Delta^q f(x)}{q\,!\,h^q},$$

iar

$$\mu_i(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+i-1} - x_0) = h^i \sum 1\,.\,2 \ldots i,$$

unde suma din membrul al doilea este extinsă la toate produsele de i factori luați dintre numerele $1, 2, \ldots, p + i - 1$. Dacă notăm această sumă cu $\theta_i(1, 2, \ldots, p + i - 1)$, vom putea scrie

$$\mu_i(x_1 - x_0, \ldots, x_{p+i-1} - x_0) = h^i\,\theta_i(1, 2, \ldots, p + i - 1)$$

și formula de derivare numerică devine

$$\frac{h^p f^{(p)}(x_0)}{p\,!} = \frac{\Delta^{(p)} f(x_0)}{p\,!} - \theta_1(1, 2, \ldots, p)\frac{\Delta^{p+1} f(x_0)}{(p+1)\,!} +$$
$$+ \theta_2(1, 2, \ldots, p+1)\frac{\Delta^{p+2} f(x_0)}{(p+2)\,!} - \ldots + (-1)^{n-p}\,\theta_{n-p}(1, 2, \ldots, n-1)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} +$$
$$+ (-1)^{n-p+1}\,\theta_{n-p+1}(1, 2, \ldots, n)\,h^{n+1}\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x) f^{(n+1)}(x)dx. \qquad (50)$$

Această formulă este cunoscută sub numele de *formula lui Markov*: ea exprimă derivata de ordinul p a funcției $f(x)$ în nodul x_0, cu ajutorul diferențelor succesive ale funcției $f(x)$ în nodul x_0, pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, începînd cu diferența de ordinul p și terminînd cu diferența de ordinul n. Stabilind formula lui Markov, *am pus în evidență și restul ei scris sub formă de integrală definită.*

Formula de derivare numerică (31) sau (46) sau (49) apare astfel ca o generalizare a formulei lui Markov, în sensul că în formula (49) nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nu mai sînt în progresie aritmetică.

Ne rămîne să studiem restul formulelor de derivare numerică (49) și (50).

12. *O proprietate importantă a coeficienților* K_i. Să demonstrăm că *sumele* $K_j + K_{j+1} + \ldots + K_n$, unde $j = 1, 2, \ldots, n$ *sînt diferite de zero.*

Pentru aceasta, să considerăm polinoamele

$$h_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

pentru $k = j, j+1, \ldots, n$, și suma lor

$$h(x) = h_j(x) + h_{j+1}(x) + \ldots + h_n(x).$$

Polinomul $h(x)$ este de gradul n și coeficientul lui x^n are semnul lui $(-1)^{n-j}$. (nr. 4). Avem

$$h(x_0) = 0, \quad h(x_1) = 0, \ldots, h(x_{j-1}) = 0$$
$$h(x_j) = 1, \quad h(x_{j+1}) + 1, \ldots, h(x_n) = 0.$$

Înlocuind în formula de derivare numerică (31) pe $f(x)$ cu $h(x)$, vom avea

$$K_j + K_{j+1} + \ldots + K_n = \frac{h^{(p)}(x_0)}{p\,!}\,\mu.$$

S-a văzut (nr. 4) că $h'(x)$ are $n - 1$ rădăcini distincte în intervalul (x_0, x_n). Aplicînd teorema lui Rolle, se deduce că $h''(x)$ are $n - 2$ rădăcini distincte în intervalul $(x_0, x_n), \ldots$ și că $h^{(p)}(x)$ are $n - p$ rădăcini distincte în intervalul $x_0, x_n)$. Însă $h^{(p)}(x)$ este un polinom de *gradul* $n-p$ și prin urmare $h^{(p)}(x_0) \neq 0$, ceea ce dovedește că suma $K_j + K_{j+1} + \ldots + K_n$ este diferită de zero. Putem preciza și semnul acestei sume. Pentru aceasta, observăm că semnul lui $h^{(p)}(x_0)$ este semnul lui $h^{(p)}(x)$ cînd $x \to -\infty$, adică semnul lui $(-1)^{n-j} . (-1)^{n-p} = (-1)^{p+j}$. Pe de altă parte, din formula (42), semnul lui μ este semnul lui $(-1)^p$. Deci *semnul sumei* $K_j + K_{j+1} + \ldots + K_n$ *este semnul lui* $(-1)^j$.

C o n c l u z i e. *Constantele* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *din ecuațiile diferențiale* (29) *sînt diferite de zero*. Într-adevăr, din formulele (32) rezultă că

$$\lambda_1 = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_j = K_j + K_{j+1} + \ldots + K_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_n = K_n$$

și ținînd seama de proprietatea de mai sus a coeficienților $K_1, K_2, \ldots, K_n$ deducem că λ_j *este diferit de zero și are semnul lui* $(-1)^j$.

13. *Funcția* $\varphi(x)$ *din formula de derivare numerică* (31) *este pozitivă în* (x_0, x_n). Să observăm întîi că funcția $\varphi_n(x)$ este pozitivă în intervalul $[x_{n-1}, x_n)$. Într-adevăr, după formulele (33) avem

$$\varphi_n(x) = K_n \frac{(x - x_n)^n}{n\,!} = (-1)^n K_n \frac{(x_n - x)^n}{n\,!}.$$

Însă s-a arătat la nr. **12** că $(-1)^n K_n > 0$, de unde rezultă că funcția $\varphi_n(x)$ este pozitivă în intervalul $[x_{n-1}, x_n)$,

Funcția $\varphi(x)$ este continuă și are derivate continue pînă la ordinul $n-1$ în intervalul $[x_0, x_n]$. În plus $\varphi^{(n)}(x)$ este o funcție continuă în fiecare interval parțial (x_{i-1}, x_i) și avem $\varphi_i^{(n)}(x) = \lambda_i \neq 0$.

Condițiile la limită în nodurile x_0 și x_n sînt diferite după cum $p = 1$, $1 < p < n - 1$, $p = n - 1$, $p = n$.

1°. $p = 1$. Condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0) = 0, \ \varphi'(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-2)}(x_0) = 0, \ \varphi^{(n-1)}(x_0) = -\mu \neq 0\\ &\varphi(x_n) = 0, \ \varphi'(x_n) = 0, \ldots, \varphi^{(n-2)}(x_n) = 0, \ \varphi^{(n-1)}(x_n) = 0.\end{aligned} \tag{51}$$

2°. $1 < p < n - 1$. Condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0) = 0, \ \varphi'(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-p-1)}(x_0) = 0, \ \varphi^{(n-p)}(x_0) = (-1)^p \frac{\mu}{p!} \neq 0,\\ &\qquad \varphi^{(n-p+1)}(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0\\ &\varphi(x_n) = 0, \ \varphi'(x_n) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_n) = 0.\end{aligned} \tag{52}$$

3°. $p = n - 1$. Condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0) = 0, \ \varphi'(x_0) = (-1)^{n-1} \frac{\mu}{(n-1)\,!} \neq 0, \ \varphi''(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0\\ &\varphi(x_n) = 0, \ \varphi'(x_n) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_n) = 0.\end{aligned} \tag{53}$$

4°. $p = n$. Condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0) = (-1)^n \frac{\mu}{n!} \neq 0, \ \varphi'(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0\\ &\varphi(x_n) = 0, \ \varphi'(x_n) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_n) = 0.\end{aligned} \tag{54}$$

În primele trei cazuri $\varphi(x)$ anulîndu-se în x_0 și x_n, după teorema lui Rolle, $\varphi'(x)$ are cel puțin un zero în intervalul (x_0, x_n). Să dovedim că $\varphi'(x)$ *nu poate să aibă decît un zero în intervalul* (x_0, x_{n-1}).

Să presupunem că derivata $\varphi'(x)$ ar avea două zerouri cuprinse între x_0 și x_{n-1} și să dovedim că aceasta este imposibil.

Aplicînd succesiv teorema lui Rolle, se arată din condițiile la limită (51), (52) și (53) că $\varphi^{(n-1)}(x)$ *are* n *zerouri în intervalul* (x_0, x_{n-1}) *în cazul* $p = 1$, *sau* $n - 1$ *zerouri în intervalul* (x_0, x_{n-1}) *cînd* $1 < p \leqslant n - 1$. Într-un interval parțial $(x_{i-1}, x_i]$ nu se pot găsi două zerouri ale lui $\varphi^{(n-1)}(x)$, căci dacă aceasta s-ar întîmpla, aplicînd teorema lui Rolle ar urma ca $\varphi^{(n)}(x)$ să se anuleze în intervalul (x_{i-1}, x_i) ceea ce este imposibil căci în acest interval $\varphi^{(n)}(x) = \varphi_i^{(n)}(x) = \lambda_i \neq 0$.

Dacă $p = 1$, cele n zerouri ale lui $\varphi^{(n-1)}(x)$ din intervalul (x_0, x_{n-1}) nu se pot repartiza decît cîte unul în intervalele $(x_0, x_1]$, $(x_1, x_2], \ldots$, (x_{n-2}, x_{n-1}) și aceasta este imposibil căci avem numai $n - 1$ intervale. S-a ajuns astfel la o contradicție.

Dacă $1 < p \leqslant n - 1$, nici un zero al lui $\varphi^{(n-1)}(x)$ nu se găsește în intervalul $(x_0, x_1]$, căci dacă s-ar găsi un zero, avînd $\varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$, putem aplica teorema lui Rolle și ar urma ca $\varphi^{(n)}(x)$ să se anuleze în intervalul

(x_0, x_1), ceea ce este imposibil deoarece $\lambda_1 \neq 0$. Cele $n-1$ zerouri ale lui $\varphi^{(n-1)}(x)$ se găsesc deci în intervalul (x_1, x_{n-1}). Însă s-a văzut mai sus că în fiecare din cele $n-2$ intervale $(x_1, x_2], \ldots, (x_{n-2}, x_{n-1})$ nu se găsește decît un singur zero al lui $\varphi^{(n-1)}(x)$. Deci din nou s-a ajuns la o contradicție.

Rezultă că în cazul $p < n$, $\varphi'(x)$ nu are decît un singur zero în intervalul (x_0, x_{n-1}) și funcția $\varphi(x)$ fiind pozitivă în intervalul $[x_{n-1}, x_n)$, este pozitivă în tot intervalul (x_0, x_n).

Să examinăm și cazul $p = n$. Observăm că $\varphi(x_0) = (-1)^n \dfrac{\mu}{n!} > 0$. Funcția $\varphi'(x)$ se anulează în x_0 și x_n, așa cum arată formulele (54). Aplicînd teorema lui Rolle rezultă că $\varphi''(x)$ are cel puțin un zero în intervalul (x_0, x_n). Să demonstrăm că $\varphi''(x)$ *nu are decît un singur zero în intervalul* (x_0, x_n).

Dacă $\varphi''(x)$ ar avea două zerouri în intervalul (x_0, x_n), ținînd seama de condițiile la limită (54) și aplicînd succesiv teorema lui Rolle ar urma ca $\varphi^{(n-1)}(x)$ să aibă $n-1$ zerouri în intervalul (x_0, x_{n-1}), ceea ce este imposibil după cum rezultă din raționamentele făcute mai sus.

Derivata $\varphi''(x)$ avînd un singur zero în intervalul (x_0, x_{n-1}), rezultă că derivata $\varphi'(x)$ nu se anulează în intervalul (x_0, x_{n-1}), căci dacă s-ar anula, ținînd seama că $\varphi'(x_0) = 0$, $\varphi'(x_n) = 0$, ar urma că $\varphi''(x)$ să se anuleze cel puțin în două puncte din intervalul (x_0, x_{n-1}), ceea ce este imposibil. Deci funcția $\varphi'(x)$ nu se anulează în intervalul (x_0, x_n) și fiind negativă în intervalul $[x_{n-1}, x_n)$, este negativă în tot intervalul (x_0, x_n). Rezultă că funcția $\varphi(x)$ este descrescătoare în intervalul $[x_0, x_n]$; fiind pozitivă în x_0 și nulă în x_n, ea este pozitivă în intervalul (x_0, x_n).

Graficul funcției $\varphi(x)$ în intervalul $[x_0, x_n]$ este redat în fig. 2.

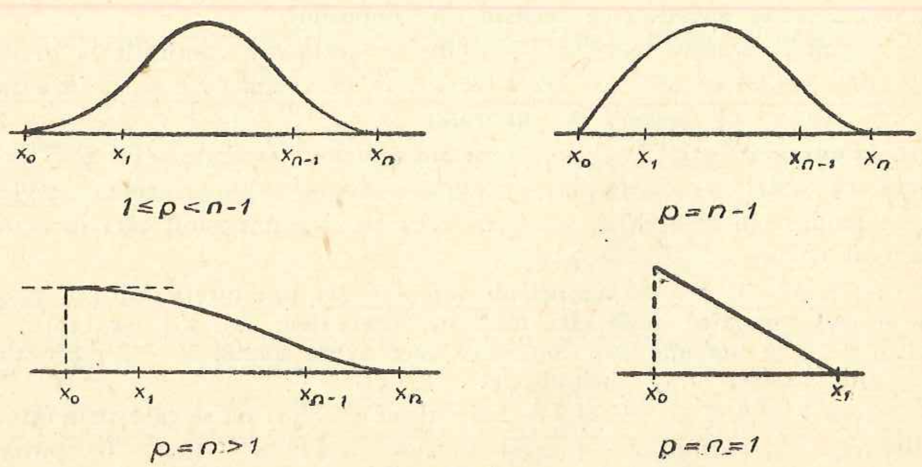

Fig. 2

14. *Restul în formula de derivare numerică* (46). Să notăm cu R, restul în formula de derivare numerică (46), adică

$$R = \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x)\, dx.$$

Pentru că s-a demonstrat că funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (x_0, x_n), putem aplica formula mediei, și vom avea

$$R = \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, dx,$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Integrala din membrul al doilea se calculează cu ajutorul formulei de derivare numerică (46), înlocuind pe $f(x)$ cu

$$g(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!}.$$

Vom avea

$$(-1)^{n+p+1} \frac{g^{(p)}(x_0)}{p!} = \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, dx.$$

Însă

$$\frac{g^{(p)}(x_0)}{p!} = \frac{(-1)^{n-p+1}}{(n+1)!} \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0),$$

de unde rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(n+1)!}. \tag{55}$$

Prin urmare *restul* R *din formula de derivare numerică* (46) *se mai scrie sub forma*

$$R = \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{56}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$.

De asemenea, *restul* R_1 *din formula de derivare numerică* (49) *se mai scrie sub forma*

$$R_1 = (-1)^{n-p+1} \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{57}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Din formulele (56), (57) rezultă o evaluare a restului R sau R_1. Avem

$$|R| = |R_1| \leqslant \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

În cazul formulei lui Markov (50), *restul*

$$R_2 = (-1)^{n-p+1}\, \theta_{n-p+1}(1, 2, \ldots, n)\, h^{n+1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(n+1)}(x)\, dx$$

se mai poate scrie sub forma

$$R_2 = (-1)^{n-p+1}\, \theta_{n-p+1}(1, 2, \ldots, n)\, h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{58}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Capitolul II

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

§ 1. Formule de integrare numerică rezultînd din aplicarea formulelor de derivare numerică (6)

15. Înainte de a trece la stabilirea formulelor de integrare numerică *să considerăm formula lui Taylor*

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^p}{p!} y^{(p+1)}(s)\, ds \tag{59}$$

şi să vedem ce devine ea, cînd se înlocuiesc $y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$, *din formulele de derivare numerică* (6).

În formula de derivare numerică

$$-\left[\lambda_1 f(x_0) + \frac{\nu_1}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{\nu_p}{p!} f^{(p)}(x_0)\right]$$

$$+ K_1 f(x_1) + K_2 f(x_2) + \ldots + K_n f(x_n) = (-1)^{n+p-1} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+p)}(x) dx$$

în care reamintim că $\nu_p \neq 0$, deoarece avem

$$\nu_p = \frac{(-1)^p}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \ldots (x_n - x_0)},$$

să înlocuim pe $f(x)$ cu $y(x)$, iar funcţia $\varphi(x)$ s-o notăm cu $\Phi_p(x)$, pentru a pune în evidenţă indicele p care este ordinul cel mai înalt al derivatelor din formula (6). Mai reamintim că

$$\int_{x_0}^{x_n} \Phi_p(x)\, dx = \frac{1}{(n+p)!}. \tag{60}$$

Înlocuind în formula (6), p cu $1, 2, 3, \ldots$ şi rezolvînd aceste ecuaţii în raport cu $y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$, vom obţine formule de forma

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &= B_{10} y(x_0) + B_{11} y(x_1) + \ldots + B_{1n} y(x_n) + \\
&\quad + C_{11} \int_{x_0}^{x_n} \Phi_1(x)\, y^{(n+1)}(x)\, dx, \\
y''(x_0) &= B_{20} y(x_0) + B_{21} y(x_1) + \ldots + B_{2n} y(x_n) + \\
&\quad + C_{21} \int_{x_0}^{x_n} \Phi_1(x)\, y^{(n+1)}(x)\, dx + C_{22} \int_{x_0}^{x_n} \Phi_2(x)\, y^{(n+2)}(x) dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(p)}(x_0) &= B_{p0} y(x_0) + B_{p1} y(x_1) + \ldots + B_{pn} y(x_n) + \\
&\quad + C_{p1} \int_{x_0}^{x_n} \Phi_1(x)\, y^{(n+1)}(x)\, dx + \ldots + C_{pp} \int_{x_0}^{x_n} \Phi_p(x)\, y^{(n+p)}(x)\, dx,
\end{aligned} \tag{61}$$

unde B_{ik} şi C_{jl} sînt numere bine determinate, iar

$$C_{11} \neq 0, \quad C_{22} \neq 0, \ldots, C_{pp} \neq 0. \tag{62}$$

Dacă înlocuim în formula lui Taylor (59) pe $y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$ cu membrii ai doilea ai formulelor (61), obţinem formule de forma

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= B_0(x)\, y(x_0) + B_1(x)\, y(x_1) + \ldots + B_n(x)\, y(x_n) + \\
&\quad + C_1(x) \int_{x_0}^{x_n} \Phi_1(x)\, y^{(n+1)}(x)\, dx + C_2(x) \int_{x_0}^{x_n} \Phi_2(x)\, y^{(n+2)}(x)\, dx + \ldots + \\
&\quad + \ldots + C_p(x) \int_{x_0}^{x_n} \Phi_p(x)\, y^{(n+p)}(x)\, dx + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^p}{p!} y^{(p+1)}(s)\, ds.
\end{aligned} \tag{63}$$

Rămîne să determinăm polionoamele $B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x)$ şi $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_p(x)$.

Determinarea polinoamelor $B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x)$. Vom deosebi două cazuri, după cum $p < n$ sau $p \geqslant n$.

1°. *Cazul* $p < n$. Pentru a determina pe $B_0(x)$, înlocuim în formula (63) pe $y(x)$ cu

$$y_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Vom obţine

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)\, B_0(x) = y_0(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^p}{p!} y_0^{(p+1)}(s) ds.$$

Diferența din membrul al doilea este dată de formula lui Taylor (59), în care înlocuim pe $y(x)$ cu $y_0(x)$. Avem

$$\frac{y_0^{(k)}(x_0)}{k!} = (-1)^{n-k}\,\mu_{n-k}(x_1 - x_0,\ x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0),$$

de unde rezultă că vom avea

$$\begin{aligned} B_0(x) = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)\ldots(x_n-x_0)} & \{\mu_n(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots, x_n-x_0) - \\ & -\mu_{n-1}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (-1)^{(p)}\,\mu_{n-p}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots, x_n-x_0)(x-x_0)^p\}. \end{aligned} \tag{64}$$

Pentru a determina polinomul $B_i(x)$, înlocuim în formula (63) pe $y(x)$ cu

$$y_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$$

și obținem

$$(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)\,B_i(x) =$$

$$= y_i(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^p}{p!}\, y_i^{(p+1)}(s)ds.$$

Membrul al doilea se calculează tot cu formula lui Taylor (59), în care înlocuim pe $y(x)$ cu $y_i(x)$. Avem $y_i(x_0) = 0$, iar

$$\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} = (-1)^{n-k}\,\mu_{n-k}(x_1-x_0, \ldots, x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0, \ldots, x_n-x_0).$$

Rezultă că polinomul $B_i(x)$ este

$$\begin{aligned} B_i(x) = & \frac{(-1)^{n-1}}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \\ & \{\mu_{n-1}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0) - \\ & - \mu_{n-2}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0)^2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{p-1}\,\mu_{n-p}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0)^p\}. \end{aligned} \tag{65}$$

Dacă notăm cu $A_0, A_1, \ldots, A_n$ reziduurile funcției raționale

$$\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

relativ la polii $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, formulele (64) și (65) se mai scriu sub forma

$$\begin{aligned} B_0(x) = (-1)^n A_0 & \{(\mu_n(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots,x_n-x_0) \\ & - \mu_{n-1}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^p\,\mu_{n-p}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0)^p\} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} B_i(x) = (-1)^{n-1}A_i\{ & \mu_{n-1}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0) \\ & - \mu_{n-2}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0)^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{p-1}\,\mu_{n-p}(x_1-x_0,\ldots,x_{i-1}-x_0,\ x_{i+1}-x_0,\ldots,x_n-x_0)(x-x_0)^p\}, \end{aligned}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, n$.

2°. *Cazul* $p \geqslant n$. Procedînd ca mai sus, se obține

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ B_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}, \end{aligned} \tag{67}$$

de unde rezultă că

$$B_0(x)y(x_0) + B_1(x)y(x_1) + \ldots + B_n(x)y(x_n) = L[x_0, x_1, \ldots, x_n;\ y(x)], \tag{67'}$$

membrul al doilea fiind polinomul lui Lagrange relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Determinarea polinoamelor $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_p(x)$. Ca mai sus, deosebim două cazuri, după cum $p < n$ sau $p \geqslant n$.

1°. *Cazul* $p < n$. Pentru a determina polinomul $C_k(x)$ înlocuim în formula (63) pe $y(x)$ cu polinomul

$$y_k(x) = \frac{(x-x_0)^k(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+k)!},$$

unde $k = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Funcţia $y_k(x)$ anulîndu-se pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi avînd $y_k'(x_0)=0$, $y_k''(x_0)=0, \ldots, y^{(k-1)}(x_0)=0$, din formulele (61) deducem că

$$\int_{x_0}^{x_n}\Phi_1(x)y_k^{(n+1)}(x)dx=0,\ \int_{x_0}^{x_n}\Phi_2(x)y_k^{(n+2)}(x)dx=0,\ldots,\ \int_{x_0}^{x_n}\Phi_{k-1}(x)y_k^{(n+k-1)}(x)dx=0,$$

pe cînd

$$\int_{x_0}^{x_n}\Phi_k(x)\,y_k^{(n+k)}(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_n}\Phi_k(x)\,dx=\frac{1}{(n+k)!}.$$

Atunci, formula (63) ne dă

$$\frac{C_k(x)}{(n+k)!}=y_k(x)-\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^p}{p!}\,y_k^{(p+1)}(s)\,ds.$$

Membrul al doilea se calculează cu ajutorul formulei lui Taylor (59), în care înlocuim pe $y(x)$ cu $y_k(x)$.

Avem

$$y_k(x_0)=0,\quad y_k'(x_0)=0,\ \ldots,\ y_k^{(k-1)}(x_0)=0,$$

şi

$$\frac{y^{(k+l)}(x_0)}{(k+l)!}=\frac{(-1)^{n-l}}{(n+k)!}\,\mu_{n-l}\,(x_1-x_0,\ldots,x_n-x_0).$$

Vom avea în definitiv

$$\begin{aligned}C_k(x)=(-1)^n(x-x_0)^k\{&\mu_n(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)-\\&-\mu_{n-1}\,(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+(-1)^{p-k}\,\mu_{n-p+k}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)^{p-k}\}.\end{aligned}\qquad(68)$$

2°. *Cazul* $p\geqslant n$. În acest caz avînd $n>1$, şi $n+1\leqslant p+1<n+p$, formula (63) se scrie

$$\begin{aligned}y(x)=&\,B_0(x)\,y(x_0)+B_1(x)\,y(x_1)+\ldots+B_n(x)\,y(x_n)+\\&+C_1(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_1(x)\,y^{(n+1)}(x)\,dx+\ldots+C_{p-n}(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_{p-n}(x)\,y^{(p)}(x)\,dx+\\&+C_{p-n+1}(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_{p-n+1}(x)\,y^{(p+1)}(x)\,dx+\ldots+C_p(x)\int_{x_0}^{x}\Phi_p(x)\,y^{(n+p)}(x)\,dx+\\&+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^p}{p!}\,y^{(p+1)}(s)\,ds.\end{aligned}\qquad(63')$$

Este evident că dacă $p=n$, termenii scrişi pe linia a doua a formulei (63') lipsesc. Înlocuind în formula (63') pe $y(x)$ cu

$$y_h(x)=\frac{(x-x_0)^h\,(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+h)!}$$

unde $h=1, 2, \ldots, p-n$, şi procedînd ca mai sus, se găseşte că

$$C_h(x)=(x-x_0)^h(x-x_1)\ldots(x-x_n).\qquad(69)$$

Pentru a determina polinomul $C_{p-n+l}(x)$, unde $l=1, 2, \ldots, n$, înlocuim în formula (63') pe $y(x)$ cu

$$y_{p-n+l}\,(x)=\frac{(x-x_0)^{p-n+l}\,(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(p+l)!}.$$

Procedînd ca mai sus, vom avea

$$\frac{C_{p-n+l}\,(x)}{(p+l)!}=y_{p-n+l}\,(x)-\int_{x_0}^{x_n}\frac{(x-s)^p}{p!}\,y_{p-n+l}^{(p+1)}\,(s)\,ds.$$

Membrul al doilea se calculează cu formula lui Taylor (59), în care înlocuim pe $y(x)$ cu $y_{p-n+l}\,(x)$. Se găseşte

$$\frac{C_{p-n+l}\,(x)}{(p+l)!}=\frac{y_{p-n+l}^{(p-n+l)}(x_0)}{(p-n+l)!}(x-x_0)^{p-n+l}+\frac{y_{p-n+l}^{(p-n+l+1)}(x_0)}{(p-n+l+1)!}(x-x_0)^{p-n+l+1}+\ldots+$$
$$+\frac{y_{p-n+l}^{(p)}}{p!}\,(x-x_0)^p.$$

Se arată că, în general, avem

$$\frac{y_{p-n+l}^{(j)}(x_0)}{j\,!}=\frac{(-1)^{p-j+l}}{(p+l)\,!}\,\mu_{p-j+l}\,(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0).$$

Deducem astfel că

$$\begin{aligned}C_{p-n+l}\,(x)=(-1)^n(x-x_0)^{p-n+l}\{&\mu_n(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)-\\&-\mu_{n-1}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+(-1)^{n-l}\,\mu_l(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)^{n-l}\}\end{aligned}$$

sau schimbînd pe $p-n+l$ în h, vom avea

$$\begin{aligned}C_h(x)=(-1)^n(x-x)^h\{&\mu_n\,(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)-\\&-\mu_{n-1}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+(-1)^{p-h}\,\mu_{n-p+h}(x_1-x_0,\ x_2-x_0,\ \ldots,\ x_n-x_0)\,(x-x_0)^{p-h}\}\end{aligned}\qquad(70)$$

pentru $h=p-n+1,\ p-n+2,\ \ldots,\ p$.

Exemple. 1°. Să presupunem $n = 4$, $p = 2$ şi nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 în progresie aritmetică cu rația h.

Dacă în formula lui Taylor

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x-x_0}{1\,!}\,y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}\,y''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^2}{2\,!}\,y'''(s)\,ds$$

se înlocuiesc derivatele $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ din formulele de derivare numerică, se obține

$$y(x) = B_0(x)\,y(x_0) + B_1(x)\,y(x_1) + B_2(x)\,y(x_2) + B_3(x)\,y(x_3) + B_4(x)\,y(x_4) +$$

$$+ C_1(x)\int_{x_0}^{x_4} \Phi_1(x)\,y^{(5)}(x)\,dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_4} \Phi_2(x)\,y^{(6)}(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^2}{2\,!}\,y'''(s)ds. \quad (71)$$

Pentru a scrie polinoamele $B_0(x), \ldots, B_4(x)$, vom aplica formulele (66). Facem descompunerea în funcții raționale simple

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{1} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} +$$

$$+ \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{A_4}{x-x_4}$$

şi avem

$$A_0 = \frac{1}{24h^4}, \quad A_1 = \frac{-1}{6h^4}, \quad A_2 = \frac{1}{4h^4}, \quad A_3 = \frac{-1}{6h^4}, \quad A_4 = \frac{1}{24h^4}.$$

Rezultă atunci că

$$B_0(x) = \frac{1}{24h^4}\{\mu_4(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0) -$$

$$- \mu_3(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0)(x-x_0) +$$

$$+ \mu_2(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_4)(x-x_0)^2\}$$

$$B_1(x) = \frac{1}{6h^4}\{\mu_3(x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0)(x-x_0) -$$

$$- \mu_2(x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0)(x-x_0)^2\}$$

. . . .

adică

$$B_0(x) = \frac{1}{24h^2}[24h^2 - 50h(x-x_0) + 35(x-x_0)^2]$$

$$B_1(x) = \frac{1}{6h^2}[24h(x-x_0) - 26(x-x_0)^2]$$

$$B_2(x) = \frac{-1}{4h^2}[12h(x-x_0) - 19(x-x_0)^2] \quad (72)$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6h^2}[8h(x-x_0) - 14(x-x_0)^2]$$

$$B_4(x) = \frac{-1}{24h^2}[6h(x-x_0) - 11(x-x_0)^2].$$

Aplicînd formulele (68), vom avea

$$C_1(x) = (x-x_0)[\mu_4(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0) -$$

$$- \mu_3(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0)(x-x_0)]$$

$$C_2(x) = (x-x_0)^2\,\mu_4(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0),$$

adică

$$C_1(x) = (x-x_0)[24h^4 - 50h^3(x-x_0)] \quad (73)$$

$$C_2(x) = 24h^4(x-x_0)^2.$$

2°. Să presupunem $n = 2$, $p = 2$, şi nodurile x_0, x_1, x_2 în progresie aritmetică cu rația h. Dacă în formula lui Taylor

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x-x_0}{1\,!}\,y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}\,y''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^2}{2\,!}\,y'''(s)\,ds$$

se înlocuiesc derivatele $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ din formulele de derivare numerică, se obține

$$y(x) = B_0(x)\,y(x_0) + B_1(x)\,y(x_1) + B_2(x)\,y(x_2) +$$

$$+ C_1(x)\int_{x_0}^{x_2} \Phi_1(x)\,y'''(x)\,dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_2} \Phi_2(x)\,y^{(4)}(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^2}{2\,!}\,y'''(s)ds. \quad (74)$$

Aplicînd formulele (67) avem

$$B_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} = \frac{2h^2 - 3h(x-x_0) + (x-x_0)^2}{2h^2}$$

$$B_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} = \frac{4h(x-x_0) - 2(x-x_0)^2}{2h^2} \quad (75)$$

$$B_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} = -\frac{h(x-x_0) - (x-x_0)^2}{2h^2}.$$

De asemenea, aplicînd formulele (70) avem

$$C_1(x) = (x-x_0)\,[\mu_2(x_1-x_0,\, x_2-x_0) - \mu_1(x_1-x_0,\, x_2-x_0)\,(x-x_0)\,]$$

$$C_2(x) = (x-x_0)^2\,(\mu_2(x_1-x_0,\, x_2-x_0),$$

adică

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (x - x_0)\,[2h^2 - 3h(x - x_0)\,] \\ C_2(x) &= 2h^2(x - x_0)^2. \end{aligned} \tag{76}$$

3°. Să presupunem $n = 2$ şi $p = 3$, iar nodurile x_0, x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică cu raţia h. Dacă în formula lui Taylor

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1\,!}y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3\,!}y'''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^3}{3\,!}\, y^{(4)}(s)ds$$

se înlocuiesc derivatele $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$ din formulele de derivare numerică, se obţine

$$y(x) = B_0(x)y(x_0) + B_1(x)y(x_1) + B_2(x)y(x_2) + $$

$$+ C_1(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_1(x)y'''(x)dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_2(x)y^{(4)}(x)dx + C_3(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_3(x)y^{(5)}(x)dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\frac{(x - s)^3}{3\,!}y^{(4)}(s)ds. \tag{77}$$

Aplicînd formulele (67), observăm că polinoamele $B_0(x)$, $B_1(x)$ $B_2(x)$ sînt date de formulele (75). De asemenea, aplicînd formulele (69) şi (70) avem

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ C_2(x) &= (x - x_0)^2[2h^2 - 3h\,(x - x_1)\,] \\ C_3(x) &= 2h^2\,(x - x_0)^3. \end{aligned} \tag{78}$$

16. *Restul în formula de interpolare a lui Lagrange.* S-a văzut la nr. precedent că în cazul $p \geqslant n$, polinoamele $B_0(x)$, $B_1(x)$, $\ldots$ $B_n(x)$ din formula (63) sînt date de formulele (67) şi deci suma

$$B_0(x)y(x_0) + B_1(x)y(x_1) + \ldots + B_n(x)y(x_n)$$

este egală cu *polinomul lui Lagrange* $L\,[x_0, x_1, \ldots, x_n;\, y(x)]$ al funcţiei $y(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Acest lucru nu se întîmplă cînd $p < n$.

Formula (63) se scrie deci, cînd $p \geqslant n$, sub forma

$$y = L\,[x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, y(x)\,] + R(x). \tag{79}$$

Am obţinut astfel *formula de interpolare a lui Lagrange*, împreună cu restul ei dat de formula

$$R(x) = C_1(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_0(x)\,y^{(n+1)}(x)dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_2(x)y^{(n+2)}(x)dx + \ldots +$$

$$+ C_p(x)\int_{x_0}^{x_n}\Phi_p(x)y^{(n+p)}(x)dx + \int_{x_0}^{x}\frac{(x - s)^p}{p\,!}y^{(p+2)}(s)ds. \tag{80}$$

Această expresie a restului este legată de formulele de derivare numerică studiate în § 1, din capitolul I, folosite pentru a trece de la formula lui Taylor la formula (63).

Reamintim că o altă expresie a restului $R(x)$ în formula de interpolare a lui Lagrange, a fost dată de G. K o w a l e w s k i [5].

Vom vedea mai departe o altă expresie a restului în formula de interpolare a lui Lagrange în care figurează numai derivata $y^{(n+1)}(x)$ şi care este egată de formulele de derivare numerică studiate în cap. I, § 2.

Dacă notăm cu $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots, M_{n+p}$ margini superioare ale valorilor absolute ale derivatelor $y^{(n+1)}(x)$, $y^{(n+2)}(x), \ldots, y^{(n+p)}(x)$ în intervalul $[a, b]$ în care sînt luate nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi x, din formula (80), deducem următoarea evaluare a lui $|R(x)|$,

$$|R(x)| \leqslant |C_1(x)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)\,!} + |C_2(x)|\frac{M_{n+2}}{(n+2)\,!} + \ldots + |C_p(x)|\frac{M_{n+p}}{(n+p)\,!} +$$

$$+ (x - x_0)^{p+1}\frac{M_{p+1}}{(p+1)\,!}, \tag{81}$$

la care s-a ajuns ţinînd seama că funcţiile $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_p(x)$ sînt pozitive în intervalul (x_0, x_n) şi utilizînd formulele (60).

17. *Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale.* Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y'(x) = f(x, y) \tag{82}$$

şi să presupunem că funcţia $f(x, y)$ îndeplineşte în dreptunghiul D definit de inegalităţile

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta$$

condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea integralei $y(x)$ care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, în intervalul $[x_0, x_0 + a]$.

Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale succesive în raport cu x şi cu y, continue pînă la ordinul p în dreptunghiul D, atunci din ecuaţia diferenţială (82) deducem prin derivări succesive

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1(x, y) \\
y'''(x) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2(x, y) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(p)}(x) &= \frac{\partial f_{p-2}}{\partial x} + \frac{\partial f_{p-2}}{\partial y} f = f_{p-1}(x, y) \\
y^{(p+1)}(x) &= \frac{\partial f_{p-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{p-1}}{\partial y} f = f_p(x, y).
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Formula lui Taylor (59) în care înlocuim pe $y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$ cu $f(x_0, y_0), f_1(x_0, y_0), \ldots, f_{p-1}(x_0, y_0)$ iar pe $y^{(p+1)}(x)$ cu $f_p[x, y(x)]$, ne dă *formula de integrare numerică*

$$
y(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1\,!} f(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!} f_1(x_0, y_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^p}{p\,!} f_{p-1}(x_0, y_0) + R, \tag{84}
$$

în care restul este

$$
R = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^p}{p\,!} f_p[s, y(s)]ds. \tag{85}
$$

Notînd cu F_p o margine superioară a funcţiei $|f_p(x, y)|$ în dreptunghiul D, avem pentru $|R|$ următoarea evaluare

$$
|R| \leqslant F_p \frac{(x - x_0)^{p+1}}{(p + 1)\,!}. \tag{86}
$$

Însă calculul lui $y''(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$ este socotit în practică prea complicat şi se preferă alte formule de integrare numerică, de exemplu formule de tip Adams.

Obţinem formule de integrare numerică dacă folosim formulele de derivare numerică din cap. I, § 1, care ne-au condus la formula (63) care ţine locul formulei lui Taylor (59).

Pentru a preciza, să presupunem că integrala $y(x)$ a fost calculată pe nodurile $x_1, x_2, \ldots x_n$ şi că este prin urmare cunoscută pe aceste noduri. Pentru a putea aplica formula (63), vom presupune că funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale succesive în raport cu x şi cu y, continue pînă la ordinul

$n + p - 1$ în dreptunghiul D. Atunci putem considera şirul de formule (83) pînă la $y^{(n+p)}(x) = f_{n+p-1}(x, y)$, funcţiile $f_1(x, y), \ldots, f_{n+p-1}(x, y)$fiind toate continue în dreptunghiul D.

Să aplicăm formula (63), în care vom înlocui pe $y^{(p+1)}(x), y^{(n+1)}(x), \ldots, y^{(n+p)}(x)$ cu $f_p(x, y), f_n(x, y), \ldots f_{n+p-1}(x, y)$. Obţinem *formula de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale*

$$
y(x) = B_0(x)\, y(x_0) + B_1(x)\, y(x_1) + \ldots + B_n(x)\, y(x_n) + R_1(x), \tag{87}
$$

în care $B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x)$ sînt polinoame în x de gradul p bine determinate, care depind numai de poziţia nodurilor şi care sînt date de formulele (64) şi (65) dacă $p < n$, sau de formulele (67) dacă $p \geqslant n$.

Restul $R_1(x)$ al formulei de integrare numerică (87) este

$$
R_1(x) = C_1(x) \int_{x_0}^{x_n} \Phi_1(x) f_n[x, y(x)]\, dx + \ldots + C_p(x) \int_{x_0}^{x_n} \Phi_p(x) f_{n+p-1}[x, y(x)] dx + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^p}{p\,!} f_p[s, y(s)]ds. \tag{88}
$$

În această formulă $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_p(x)$ sînt polinoame de gradul p în x, bine determinate, care depind numai de poziţia nodurilor şi care sînt date de formulele (68) dacă $p < n$, sau de formulele (69) şi (70) dacă $p \geqslant n$. Funcţiile $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_p(x)$ sînt bine determinate din capitolul I, § 1, de la formulele de derivare numerică; ele depind tot de poziţia nodurilor şi pentru ele avem formulele (60). În expresia restului, numai funcţiile $f_n(x, y), \ldots, f_{n+p-1}(x, y), f_p(x, y)$ depind de ecuaţia diferenţială (82).

Ţinînd seama de proprietatea funcţiilor $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_p(x)$ de a fi pozitive în intervalul (x_0, x_n), (nr. 5), putem da o nouă expresie pentru restul $R_1(x)$.

$$
R_1(x) = C_1(x) \frac{f_n[\xi_1, y(\xi_1)]}{(n + 1)\,!} + C_2(x) \frac{f_{n+1}[\xi_2, y(\xi_2)]}{(n + 2)\,!} \ldots + \ldots + C_p(x) \frac{f_{n+p-1}[\xi_p, y(\xi_p)]}{(n + p)\,!} + \frac{(x - x_0)^{p+1}}{(p + 1)\,!} f_p[\xi, y(\xi)], \tag{89}
$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ sînt anumite puncte din intervalul (x_0, x_n) iar ξ din intervalul (x_0, x).

Din formula (89) deducem şi următoarea evaluare a lui $|R_1(x)|$, în punctul x

$$
|R_1(x)| \leqslant |C_1(x)| \frac{F_n}{(n + 1)!} + |C_2(x)| \frac{F_{n+1}}{(n + 2)!} + \ldots + |C_p(x)| \frac{F_{n+p-1}}{(n + p)!} + \frac{(x - x_0)^{p+1}}{(p + 1)\,!} F_p, \tag{90}
$$

în care s-a notat în general cu F_k o margine superioară a lui $|f_k(x, y)|$ în dreptunghiul D.

Am determinat restul formulei de integrare numerică (87), scris sub forma (88), punînd în evidență modul cum el depinde de funcția $f(x, y)$ și de derivatele ei parțiale succesive în raport cu x și y, pînă la ordinul $n + p - 1$, acest mod fiind legat de formulele de derivare numerică din cap. I, § 1, pe care le-am aplicat ca să obținem formula (63).

Cu aceasta am rezolvat pentru cazul considerat de noi, problema determinării restului formulei de integrare numerică (87), cu ajutorul funcției $f(x, y)$ și al derivatelor ei succesive în raport cu x și y.

Vom vedea în paragraful următor o altă formulă de integrare numerică de tipul (87), în care restul are o altă expresie legată de formulele de derivare numerică, studiate în § 2 din cap. I.

Cînd $p \geqslant n$, formula de integrare numerică (87) se scrie sub forma

$$y(x) = L[x_0, x_1, \ldots, x_n ; y(x)] + R_1(x), \tag{91}$$

unde $L[x_0, x_1, \ldots, x_n ; y(x)]$ este polinomul de interpolare al lui Lagrange al integralei $y(x)$, care este cunoscută pe nodurile $x_0, x_1, \ldots x_n$.

Este evident că ne putem aștepta să obținem o formulă de integrare numerică a ecuației diferențiale (82), luînd ca valoare aproximativă a lui $y(x)$ în punctul x, valoarea polinomului lui Lagrange $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$. Este însă important că am stabilit restul $R_1(x)$ al acestei formule de integrare numerică scris sub forma (88) sau (89) și pentru care am dat evaluarea (90) a valorii lui absolute. Restul $R_1(x)$ depinde de alegerea formulelor de derivare numerică și el corespunde formulelor tratate în cap. I, § 1.

Exemple. 1°. Să presupunem $n = 4$, $p = 2$ și că nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sînt în progresie aritmetică cu rația h. Aplicînd formulele (71), deducem formula de integrare numerică a ecuației diferențiale (82)

$$y(x) = B_0(x)\, y(x_0) + B_1(x)\, y(x_1) + B_2(x)\, y(x_2) + B_3(x)\, y(x_3) + \\ + B_4(x)\, y(x_4) + R_1(x), \tag{92}$$

în care polinoamele $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$, $B_4(x)$ sînt date de formulele (72), restul $R_1(x)$ este

$$R_1(x) = C_1(x) \int_{x_0}^{x_4} \Phi_1(x) f_4[x, y(x)]dx + C_2(x) \int_{x_0}^{x_4} \Phi_2(x) f_5[x, y(x)]dx + \\ + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^2}{2\,!} f_2[s, y(s)]ds, \tag{93}$$

în care polinoamele $C_1(x)$, $C_2(x)$ sînt date de formulele (73).

Avem următoarea evaluare pentru $|R_1(x)|$

$$|R_1(x)| \leqslant |C_1(x)| \frac{F_4}{5\,!} + |C_2(x)| \frac{F_5}{6\,!} + \frac{(x - x_0)^3}{3\,!} F_2 . \tag{94}$$

Pentru a se vedea importanța coeficienților lui F_2, F_3, F_4 din evaluarea (94) a lui $|R_1(x)|$, dăm un tablou relativ la $x - x_0 = \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{5h}{2}, \frac{7h}{2}, \frac{9h}{2}, 5h$.

$x - x_0$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$
$\frac{h}{2}$	$\frac{h^3}{48} F_2 + \frac{h^5}{240} F_4 + \frac{h^6}{120} F_5$
$\frac{3h}{2}$	$\frac{27h^3}{48} F_2 + \frac{153h^5}{240} F_4 + \frac{9h^6}{120} F_5$
$\frac{5h}{2}$	$\frac{125h^3}{48} F_2 + \frac{505h^5}{240} F_4 + \frac{25h^6}{120} F_5$
$\frac{7h}{2}$	$\frac{343h^3}{48} F_2 + \frac{1057h^5}{240} F_4 + \frac{49h^6}{120} F_5$
$\frac{9h}{2}$	$\frac{729h^3}{48} F_2 + \frac{1809h^5}{240} F_4 + \frac{81h^6}{120} F_5$
$5h$	$\frac{125h^3}{6} + \frac{113h^5}{12} F_4 + \frac{5h^6}{6} F_5$

Pentru $h = 0{,}1$ tabloul precedent devine

$x - x_0$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$
0,05	$0{,}000021\ F_2 + 0{,}000000042\ F_4 + 0{,}00000000084\ F_5$
0,15	$0{,}000563\ F_2 + 0{,}0000064\ F_4 + 0{,}000000075\ F_5$
0,25	$0{,}00265\ F_2 + 0{,}000022\ F_4 + 0{,}00000021\ F_5$
0,35	$0{,}00715\ F_2 + 0{,}0000441\ F_4 + 0{,}00000041\ F_5$
0,45	$0{,}0152\ F_2 + 0{,}0000754\ F_4 + 0{,}000000675\ F_5$
0,50	$0{,}021\ F_2 + 0{,}000095\ F_4 + 0{,}00000084\ F_5$

2°. Să presupunem $n = 2$, $p = 2$ şi că nodurile x_0, x_1, x_2 sînt în progresie aritmetică cu raţia h. Din formula (74) deducem următoarea formulă de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (82)

$$y(x) = B_0(x)y(x_0) + B_1(x)y(x_1) + B_2(x)y(x_2) + R_1(x), \tag{95}$$

în care polinoamele $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ sînt date de formulele (75), iar restul $R_1(x)$ este dat de formula

$$R_1(x) = C_1(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_1(x)f_2[x, y(x)]dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_2(x)f_3[x, y(n)]\,dx + $$
$$+ \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-s)^2}{2!}f_2[s, y(s)]\,ds, \tag{96}$$

în care polinoamele $C_1(x)$, $C_2(x)$ sînt date de formulele (76).
Avem următoarea evaluare a lui $|R_1(x)|$:

$$|R_1(x)| \leqslant |C_1(x)|\frac{F_2}{3!} + |C_2(x)|\frac{F_3}{4!} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}F_2. \tag{97}$$

Dăm evaluările lui $|R_1(x)|$ pentru $x - x_0 = \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{5h}{2}$, $3h$ în tabloul următor

$x - x_0$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$ pentru $h = 0,1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{13h^3}{48}F_2 + \frac{h^4}{2}F_3$	$0{,}000271\ F_2 + 0{,}00005\ F_3$
$\frac{3h}{2}$	$\frac{207h^3}{48}F_2 + \frac{9h^4}{2}F_3$	$0{,}00432\ F_2 + 0{,}00045\ F_3$
$\frac{5h}{2}$	$\frac{785h^3}{48}F_2 + \frac{25h^4}{2}F_3$	$0{,}0164\ F_2 + 0{,}00125\ F_3$
$3h$	$\frac{51h^3}{2}F_2 + 18h^4F_3$	$0{,}0255\ F_2 + 0{,}0018\ F_3$

3° Să presupunem $n = 2$ şi $p = 3$, iar nodurile x_0, x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică cu raţia h. Din formala (77) se deduce următoarea formulă de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (82)

$$y(x) = B_0(x)\,y(x_0) + B_1(x)\,y(x_1) + B_2(x)\,y(x_2) + R_1(x), \tag{98}$$

unde polinoamele $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ sînt date de formulele (75), iar restul $R_1(x)$ este

$$R_1(x) = C_1(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_1(x)f_2[x, y(x)]dx + C_2(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_2(x)f_3[x, y(x)]dx + $$
$$+ C_3(x)\int_{x_0}^{x_2}\Phi_3(x)f_4[x, y(x)]dx + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^3}{3!}f_3[s, y(s)]ds, \tag{99}$$

în care polinoamele $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ sînt date de formulele (78).
Avem următoarea evaluare pentru $|R_1(x)|$:

$$|R_1(x)| \leqslant |C_1(x)|\frac{F_2}{3!} + |C_2(x)|\frac{F_3}{4!} + |C_3(x)|\frac{F_4}{5!} + \frac{(x-x_0)^4}{4!}F_3. \tag{100}$$

Dăm evaluările lui $|R_1(x)|$ pentru $x - x_0 = \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{5h}{2}$, $3h$ în tabloul următor.

$x - x_0$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$	Evaluarea lui $\lvert R_1(x)\rvert$ pentru $h = 0,1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{h^3}{16}F_2 + \frac{49h^4}{384}F_3 + \frac{h^5}{4}F_4$	$0{,}000063\ F_2 + 0{,}0000128\ F_3 + 0{,}0000025\ F_4$
$\frac{3h}{2}$	$\frac{h^3}{16}F_1 + \frac{2241h^4}{384}F_3 + \frac{27h^5}{4}F_4$	$0{,}000063\ F_2 + 0{,}000584\ F_3 + 0{,}0000675\ F_4$
$\frac{5h}{2}$	$\frac{5h^3}{16}F_2 + \frac{13825h^4}{384}F_3 + \frac{125h^5}{4}F_4$	$0{,}000313\ F_2 + 0{,}0036003\ F_3 + 0{,}0003125\ F_4$
$3h$	$h^3F_2 + \frac{531h^4}{8}F_3 + 54h^5F_4$	$0{,}001\ F_2 + 0{,}0066375\ F_3 + 0{,}00054\ F_4$

§ 2. Formule de integrare numerică rezultînd din aplicarea formulelor de derivare numerică (31)

18. *Restul în formula de interpolare a lui Lagrange.* Să reluăm formula de derivare numerică (31) pe care o scriem sub forma

$$\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} = -\frac{\lambda_1}{\mu}f(x_0) + \frac{K_1}{\mu}f(x_1) + \ldots + \frac{K_n}{\mu}f(x_n) + $$
$$+ (-1)^{n-p+1}\mu_{n-p+1}\int_{x_0}^{x_n}\psi_p(x)\,f^{(n+1)}(x)dx, \tag{101}$$

unde

$$\mu = \frac{(-1)^p}{\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0)}$$

şi unde s-a scris mai scurt

$$\mu_{n-p+1} = \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0),$$

iar în membrul al doilea s-a scris $\psi_p(x)$ în locul lui $\varphi(x)$, pentru a ţine seamă de ordinul p de derivare din membrul întîi.

S-a arătat că funcţia $\psi_p(x)$ este pozitivă în intervalul (x_0, x_n) şi că avem

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi_p(x)dx = \frac{1}{(n+1)!}. \tag{102}$$

În formula (101) să înlocuim pe $f(x)$ cu $y(x)$ şi să facem $p = 1, 2, \ldots, n$. Vom obţine următoarele formule:

$$\frac{y'(x_0)}{1!} = K_{10}y(x_0) + K_{11}y(x_1) + \ldots + K_{1n}y(x_n) + (-1)^n\mu_n \int_{x_0}^{x_n} \psi_1(s)y^{(n+1)}(s)\,ds$$

$$\frac{y''(x_0)}{2!} = K_{20}y(x_0) + K_{20}y(x_1) + \ldots + K_{2n}y(x_n) + (-1)^{n-1}\mu_{n-1} \int_{x_0}^{x_n} \psi_2(s)\,y^{(n+1)}(s)\,ds$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{103}$$

$$\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} = K_{n0}y(x_0) + K_{n1}y(x_1) + \ldots + K_{nn}\,y(x_n) + (-1)\,\mu_1 \int_{x_0}^{x_n} \psi_n(s)\,y^{(n+1)}(s)ds.$$

Aceste formule fiind precizate, să considerăm formula lui Taylor

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}y'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}y^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!}y^{(n+1)}(s)\,ds \tag{104}$$

şi să înlocuim pe $y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$ din formulele de derivare numerică (103). Vom obţine o formulă de forma

$$y(x) = B_0(x)\,y(x_0) + B_1(x)\,y(x_1) + \ldots + B_n(x)\,y(x_n) + R(x), \tag{105}$$

unde

$$R(x) = -\int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s)\,y^{(n+1)}(s)ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!}y^{(n+1)}(s)ds, \tag{106}$$

în care s-a notat

$$\psi(x, s) = \mu_1\psi_n(s)\,(x - x_0)^n - \mu_2\,\psi_{n-1}(s)\,(x - x_0)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\mu_n\,\psi_1(s)\,(x - x_0). \tag{107}$$

Se arată uşor că suma primilor $n + 1$ termeni din formula (105) este polinomul de interpolare al lui Lagrange, pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ceea ce înseamnă că formula (105) se mai poate scrie sub forma

$$y(x) = L\,[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)] + R(x), \tag{105'}$$

care este *formula de interpolare a lui Lagrange, cu restul ei scris sub forma* (106).

Dacă notăm cu M_{n+1} o margine superioară a lui $|y^{(n+1)}(x)|$ în intervalul $[a, b]$ în care s-au luat nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi x, din formulele (106), (107) deducem următoarea evaluare a lui $|R(x)|$

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left[(x - x_0)^{n+1} + \mu_1(x - x_0)^n + \ldots + \mu_n(x - x_0)\right].$$

sau, ţinînd seama de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, aceasta se mai scrie sub forma

$$|R(x)| \leqslant (x - x_0)[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x_n - x_0)]\,\frac{M_{n+1}}{(n_3+1)!}. \tag{108}$$

Dacă nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sînt în progresie aritmetică cu raţia* h, *atunci* $|R(x_0 + \lambda h)|$ *este de ordinul lui* h^{n+1}. Aceasta rezultă din formula (108). Vom avea

$$|R(x_0 + \lambda h)| \leqslant \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}{(n+1)!}M_{n+1}\,h^{n+1}. \tag{109}$$

Ca să se vadă cît de mare este coeficientul lui M_{n+1}, dăm un tablou în cazul $n = 5$, pentru $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 6$ pentru un h oarecare şi pentru $h = 0{,}1$.

λ	Evaluarea lui $\lvert R(x_0 + \lambda h)\rvert$	Evaluarea lui $\lvert R(x_0 + \lambda h)\rvert$ pentru $h = 0,1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{231}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,000\,23\,M_6$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3003}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,002\,94\,M_6$
$\frac{5}{2}$	$\frac{15015}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,014\,67\,M_6$
$\frac{7}{2}$	$\frac{51051}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,049\,86\,M_6$
$\frac{9}{2}$	$\frac{138567}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,135\,32\,M_6$
$\frac{11}{2}$	$\frac{323323}{1024}\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,315\,75\,M_6$
6	$462\,h^6\,M_6$	$0{,}000\,462\,00\,M_6$

19. *Formulă de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.* Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{110}$$

şi să presupunem că funcţia $f(x, y)$ este continuă împreună cu derivatele ei parţiale în raport cu x şi y, pînă la ordinul n, în dreptunghiul D. În acest caz derivînd succesiv pe $y(x)$, în raport cu x, vom obţine ca la nr. **16** :

$$\begin{aligned} y''(x) &= f_1(x, y) \\ y'''(x) &= f_2(x, y) \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n+1)}(x) &= f_n(x, y), \end{aligned} \tag{111}$$

funcţiile $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\ldots$, $f_n(x, y)$ fiind continue în dreptunghiul D.

Fie $y(x)$ integrala ecuaţiei diferenţiale (110) care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ şi pe care o presupunem cunoscută pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci, aplicînd acestei integrale formula de interpolare a lui Lagrange (105′), obţinem

$$y(x) = L\,[x_0, x_1, \ldots, x_n;\ y(x)\,] + R_2(x), \tag{112}$$

în care restul $R_2(x)$ se obţine din formula (106) înlocuind pe $y^{(n+1)}(x)$ cu $f_n[x, y(x)]$ din formulele (111). Pentru $R_2(x)$ avem prin urmare următoarea expresie

$$R_2(x) = -\int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) f_n\,[s, y(s)\,]\,ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n\,!} f_n\,[s, y(s)\,]\,ds, \tag{113}$$

în care funcţia $\psi(x, s)$ este dată de formula (107).

Putem da şi următoarea expresie pentru $R_2(x)$, ţinînd seamă de proprietăţile funcţiilor $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$

$$R_2(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Big\{ f_n\,[\xi_0, y(\xi_0)\,]\ (x - x_0)^{n+1} - \mu_1 f_n\,[\xi_1, y(\xi_1)\,]\ (x - x_0)^n + \\ + \ldots + (-1)^n \mu_n f_n\,[\xi_n, y(\xi_n)]\ (x - x_0) \Big\}, \tag{113}$$

unde $\xi_0 \in (x_0, x)$ iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in (x_0, x_n)$.

Din formula (113′) se deduce următoarea evaluare pentru $|R_2(x)|$

$$|\,R_2\,(x)\,| \leqslant \frac{(x-x_0)\,[(x-x_0)+(x_1-x_0)\,]\ldots\,[(x-x_0)+(x_n - x_0)\,]}{(n+1)\,!} F_n, \tag{114}$$

unde F_n este o margine superioară a lui $|\,f_n(x, y\,|$ în dreptunghiul D.

Am obţinut astfel formula de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (110) sub forma (112), în care $y(x)$ se exprimă aproximativ cu polinomul de interpolare al lui Lagrange, relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

ceea ce este un rezultat la care ne-am fi putut aştepta, însă important în formula (112) este că am determinat şi restul ei pus sub formă (113) sau (113′) şi pentru care valoarea lui absolută are evaluarea (114).

Dacă nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sînt în progresie aritmetică cu raţia* h, *atunci* $|R_2(x_0+\lambda h)|$ *este de ordinul lui* h^{n+1}. Aceasta rezultă din formula (114) şi avem

$$|\,R_2(x_0 + \lambda h)\,| \leqslant \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}{(n+1)\,!} F_n\, h^{n+1}. \tag{115}$$

Tabloul de la nr. precedent dă în cazul $n = 5$, valorile coeficienţilor lui F_n pentru h oarecare şi pentru $h = 0{,}1$.

20. *Formula de integrare numerică a lui Adams şi restul ei.* Vom da acum o formulă de integrare numerică de tip Adams sub forma cea mai generală a ecuaţiei diferenţiale (110), cu ipotezele făcute la nr. **18**, schimbînd însă pe n în $n+1$ şi utilizînd rezultatele obţinute de noi relativ la restul din formula de integrare numerică (112), în care integrala $y(x)$ este înlocuită aproximativ cu polinomul de interpolare $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x]$ relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Vom nota mai scurt acest polinom cu $L_n(x)$ şi vom scrie

$$y(x) = L_n(x) + R_2(x), \tag{116}$$

unde $R_2(x)$ este restul dat de formula (113).

Vom aplica, pentru aceasta, procedeul simplu pentru obţinerea formulei propriu-zise de integrare numerică a lui A d a m s (vezi [6]).

Fie x_{n+1} un nou nod la dreapta lui x_n şi $y(x)$ integrala ecuaţiei (110) care este cunoscută pe nodurile $x_0, x_1, \ldots x_n$. Înlocuind în ecuaţia diferenţială (110) pe y cu $L_n(x) + R_2(x)$, vom avea

$$y' = g(x) + h(x), \tag{117}$$

unde s-a notat

$$g(x) = f\,[x, L_n(x)\,],\ h(x) = f\,[x, L_n(x) + R_2(x)\,] - f\,[x, L_n(x)\,]. \tag{118}$$

Vom presupune pentru un moment că curba $y = L_n(x)$ este situată în dreptunghiul D şi vom reveni apoi la cazul cînd curba $y = L_n(x)$ iese din dreptunghiul D.

Integrînd ambii membri ai formulei (117) între x_n şi x_{n+1}, vom deduce că

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} h(x)dx. \tag{119}$$

Funcţia $g(x)$ fiind cunoscută pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, la prima integrală din formula (119) vom aplica o *formulă de cuadratură cu noduri exterioare* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi nodul x_n [7].

Se arată că avem

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)dx = B_0[x_n;g] + B_1[x_{n-1}, x_n;g] + \ldots + B_n[x_0, x_1, \ldots, x_n;g]$$

$$+ (-1)^{n+1} B_{n+1} \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{120}$$

unde $\xi \in (x_0, x_{n+1})$, iar

$$B_0 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx, \quad B_k = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_{n-k+1})dx \tag{121}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Dacă nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, atunci formula (120) devine

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)dx = h\,[g(x_n) + J_1 \Delta g(x_{n-1}) + J_2 \Delta^2 g(x_{n-2}) + \ldots$$

$$+ J_n \Delta^n g(x_0)] + (-1)^{n+1} J_{n+1} h^{n+2} g^{(n+1)}(\xi), \tag{122}$$

unde

$$J_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1) \ldots (u+k-1)\,du. \tag{123}$$

Formula (119) devine *formula generalizată a lui Adams cu nodurile oricum* $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + B_0\,[x_n; f[x, L_n(x)]] + B_1\,[x_{n-1}\, x_n; f[x, L_n(x)]]$$

$$+ \ldots + B_n\,[x_0, x_1, \ldots, x_n; f[x, L_n(x)]] + R_3, \tag{124}$$

unde restul R_3 este dat de formula

$$R_3 = (-1)^{n+1} B_{n+1} \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} h(x)dx, \tag{125}$$

în care $g(x)$ şi $h(x)$ sînt daţi de formulele (118).

Putem da o evaluare a lui $|R_3|$. Din formula (125) deducem că

$$|R_3| \leqslant B_{n+1} \frac{|g^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |h(x)|dx. \tag{126}$$

Însă

$$h(x) = \int_{L_n(x)}^{L_n(x)+R_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

şi deci

$$|h(x)| \leqslant K\,|R_2(x)|,$$

unde K este o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ în dreptunghiul D.
Vom avea deci

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |h(x)|\,dx \leqslant K \int_{x_n}^{x_{n+1}} |R_2(x)|\,dx.$$

Ţinînd seamă de formula (114), deducem că

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |h(x)|\,dx \leqslant \frac{KF_n}{(n+1)!}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_0)\,[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots$$

$$[(x - x_0) + (x_n - x_0)]\,dx.$$

Notînd cu $\overline{F}_n$ o margine superioară a lui $|g^{(n+1)}(x)|$ în intervalul $[x_0, x_0 + a]$, vom deduce atunci din formula (126) că

$$|R_3| \leqslant \frac{H_n}{(n+1)!}, \tag{127}$$

unde s-a notat

$$H_n = \overline{F}_n B_{n+1} + KF_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_0)\,[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x - x_0)]\,dx. \tag{128}$$

Astfel am determinat o evaluare a lui $|R_3|$ în formula generalizată a lui Adams cu noduri oricum $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Cazul cînd nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h. În acest caz, formula de integrare numerică (124) se înlocuieşte, ţinînd seama de formula (122), cu

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\,[g(x_n) + J_1 \Delta g(x_{n-1} + J_2 \Delta^2 g(x_{n-2}) + \ldots$$

$$+ J_n \Delta^n g(x_0)] + R_4, \tag{129}$$

unde

$$R_4 = (-1)^{n+1} J_{n+1} h^{n+2} g^{(n+1)}(\xi) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} h(x)dx.$$

Procedînd ca mai sus, vom avea pentru $|R_4|$

$$|R_4| \leqslant J_{n+1}\overline{F}_n h^{n+2} + K\int_{x_n}^{x_{n+1}} |R_2(x)|dx,$$

sau

$$|R_4| \leqslant J_{n+1}\overline{F}_n h^{n+2} +$$
$$+ \frac{KF_n}{(n+1)!}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_0)\,[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x_n - x_0)]dx.$$

Dacă în integrala din membrul al doilea se face schimbarea

$$x = x_0 + nh + hu,$$

avem

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_0)\,[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x_n - x_0)]dx =$$
$$= h^{n+2}\int_0^1 (u + n)(u + n + 1) \ldots (u + 2n)du,$$

astfel că vom avea în definitiv

$$|R_4| \leqslant \overline{H}_n h^{n+2}, \tag{130}$$

unde s-a notat

$$\overline{H}_n = J_{n+1}\overline{F}_n + \frac{KF_n}{(n+1)!}\int_0^1 (u + n)(u + n + 1) \ldots (u + 2n)du. \tag{131}$$

Astfel s-a dovedit că *restul în formula lui Adams cu nodurile în progresie aritmetică* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, *cu rația* h, *este de ordinul lui* h^{n+2}

Este foarte important de comparat acest rezultat cu restul $R_2(x_{n+1})$ cînd integrala $y(x)$ a ecuației diferențiale se înlocuiește cu polinomul lui Lagrange relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, care conform formulei (115) este de ordinul lui h^{n+2}.

Din această comparație rezultă că dacă se aplică formula de integrare numerică (112), luîndu-se ca valoare aproximativă a integralei $y(x)$ polinomul lui Lagrange relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, restul în nodul x_{n+1} este de ordinul lui h^{n+1}, pe cînd dacă se aplică formula de integrare numerică a lui Adams (129), restul este de ordinul lui h^{n+2}.

În cazul $n = 5$, care corespunde formulei de integrare numerică propriu-zise a lui Adams, restul în nodul x_6 este de ordinul lui h^6 în formula

de integrare numerică (112), pe cînd în formula lui Adams este de ordinul lui h^7.

Amintim că W. Tollmien [8] a stabilit că restul în formula de integrare numerică a lui Adams, este de ordinul lui h^7. Ceeace am arătat noi mai sus constituie o generalizare a acestui rezultat pentru un număr oarecare de noduri în progresie aritmetică.

Într-o altă lucrare vom arăta cum se pot construi formule de integrare numerică de tip Adams în general, pentru care restul în cazul nodurilor $x_0, x_1, \ldots, x_n$ în progresie aritmetică, este de ordinul lui h^{n+q}, unde $q > 2$.

21. *Cazul cînd curba* $y = L_n(x)$ *iese din dreptunghiul* D. În acest caz, vom prelungi funcția $f(x, y)$ deasupra și dedesubtul laturilor dreptunghiului D, paralele cu axa Ox, în modul următor, așa cum a procedat O. Aramă [9].

Se consideră funcția

$$F'(x, y) = \varphi_n(x)\frac{(y - \beta + y_0)^n}{n!} + \varphi_{n-1}(x)\frac{(y - \beta + y_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ \ldots + \varphi_0(x) \tag{132}$$

definită pentru $|x - x_0| \leqslant \alpha$ și $y - y_0 \geqslant \beta$. Determinăm funcțiile $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ astfel ca

$$\left.\frac{\partial^k F'}{\partial y^k}\right|_{y=y_0+\beta} = \left.\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\right|_{y=y_0+\beta}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. Va fi suficient să luăm

$$\varphi_k(x) = \left.\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\right|_{y=y_0+\beta} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Din formulele (133) deducem că vom avea de asemenea

$$\left.\frac{\partial^j F'}{\partial x^{j-k}\partial y^k}\right|_{y=y_0+\beta} = \left.\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-k}\partial y^k}\right|_{y=y_0+\beta} \tag{134}$$

pentru $j = k + 1, k + 2, \ldots, n$ și $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

De asemenea se poate considera funcția

$$F''(x, y) = \psi_n(x)\frac{(y + \beta - y_0)^n}{n!} + \psi_{n-1}(x)\frac{(y + \beta - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \psi_0(x),$$

unde

$$\psi_k(x) = \left.\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\right|_{y=y_0-\beta} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Se arată că avem

$$\left.\frac{\partial^j F''}{\partial x^{j-k}\partial y^k}\right|_{y=y_0-\beta} = \left.\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-k}\partial y^k}\right|_{y=y_0-\beta}$$

pentru $j = k, k + 1, \ldots, n$ și $k = 0, 1, \ldots, n$.

Fie $y = L_n(x)$ polinomul lui Lagrange al integralei $y(x)$ a ecuatiei diferenţiale $y' = f(x, y)$, care ia valorile $y_0, y_1, \ldots, y_n$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Dacă curba $y = L_n(x)$ iese din dreptunghiul D, notăm cu β' o margine superioară a lui $L_n(x)$ şi cu β'' o margine inferioară lui $L_n(x)$ în intervalul $[x_0, x_0 + a]$. Notăm cu β^* cel mai mare dintre numerele $\beta' - y_0$, $y_0 - \beta''$. În dreptunghiul D^* definit de

$$|x - x_0| \leqslant \alpha, \quad |y - y_0| \leqslant \beta^*$$

considerăm funcţia

$$f^*(x, y) = \begin{cases} F'(x, y) & \text{dacă } y \geqslant \beta - y_0 \\ f(x, y) & \text{dacă } |y - y_0| \leqslant \beta \\ F''(x, y) & \text{dacă } y \leqslant y_0 - \beta \end{cases} \tag{135}$$

care este continuă, împreună cu derivatele ei parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul n.

Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$Y' = f^*(x, Y) \tag{136}$$

cu condiţia iniţială $Y(x_0) = y_0$. Ţinînd seama de definiţia funcţiei $f^*(x, y)$, dată de formula (135), şi de ecuaţia diferenţială (110) cu aceiaşi condiţie iniţială $y(x_0) = y_0$, se deduce că în intervalul $[x_0, x_0 + a]$, pe care s-a dovedit că există integrale $y(x)$, avem $Y(x) = y(x)$.

Pentru ecuaţia diferenţială (136), curba $y = L_n(x)$, care coincide cu curba $y = L_n(x)$ relativă la ecuaţia (110), nu iese din dreptunghiul D^*. Deci tot ce s-a spus la nr. **19** rămîne valabil cu condiţia ca să se înlocuiască dreptunghiul D cu D^* şi funcţia $f(x, y)$ cu funcţia $f^*(x, y)$. În special formulele (128), (131) rămîn valabile, înlocuind însă pe F_n şi K cu valorile corespunzătoare relative la dreptunghiul D^*.

Universitatea Babeş — Bolyai, Cluj
Catedra de ecuaţii diferenţiale

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

Обозначим через $y(x)$ решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$ и единственное в промежутке $[x_0, x_0+a]$. Предполагают что это решение знакомо на множестве узлов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, промежутка $(x_0, x_0+a]$. Задача численного интегрирования дифференциального уравнения (1) — дать формулу вычисления решения $y(x)$ в точке промежутка $(x_0, x_0+a]$, при помощи значений $y(x_0)$, $y(x_1)$, $\ldots$, $y(x\ )$ и изучить остаточный член этой формулы. Если функция $f(x, y)$ обладает частными производными относительно x и y до n-ого порядка, причем эти производные — непрерывны в прямоугольнике D

в котором выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решения $y(x)$, то можно писать формулу Тейлора (2).

Задача численного интегрирования, поставленная таким обрнзом, сводится посредством формулы (2) к следующей задаче. Пусть дана функция $f(x)$, непрерывна вместе со всеми появляющимися в вычислении производными в промежутке $[x_0, x_0+a]$; требуется найти формулы для вычисления $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ при помощи значений $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$ и изучить остаточный член этих формул.

Эта работа разделена на две главы.

В § 1 первой главы предполагают, что $f(x)$ — функция класса C^{n+p} в промежутке $[a, b]$ и что $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — узлы из этого промежутка, $x_0<x_1<\ldots<x_n$. Дается формула (6), позволяющая вычислить $f^{(p)}(x)$ посредством $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\ldots$, $f^{(p-1)}(x_0)$ и $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$. Второй член — остаточный член этой формулы, выраженный при помощи функции $\varphi(x)$, совпадающей с функциями $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ в промежутках $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Эти функции — решения дифференциальных уравнений (4) при граничных условиях (5). Доказывается что формулу (6) можно поставить в виде (16), или в виде (22). Доказывается, что постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ фигурирующие в дифференциальных уравнениях (4), — все различны от нуля (нр. 4), а это позволит доказать (нр. 5), что функция $\varphi(x)$ положительна в промежутке (x_0, x_n). Этот результат важен, поскольку его можно применить к изучению остаточного члена формулы (6). Получается формула (26) и неравенство (27).

Предположим что функция $f(x)$ — класса C^{n+1} в промежутке $[a, b]$ и что $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — узлы из этого промежутка $x_0<x_1<\ldots<x_n$.

Если узлы в арифметической прогрессии, имеем формулы Маркова (28) для значении $f^{(p)}(x_0)$, где $p=1, 2, \ldots, n$.

В § 2 первой главы мы дали формулы (31), или (41), или (46), или же (49), которые типа формул Макарова, не предполагая при этом, что узлы в арифметическом прогрессии. Остаточный член этих формул дан в виде определенного интеграла, где функция $\varphi(x)$ совпадает с функциями $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ в промежутках $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ причем эти функции — решения дифференциальных уравнений (29) с граничными условиями (30).

Доказывается, что постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ фигурирующие в уравнениях (29) — все различны от нуля (нр. 11), а это позволяет доказать, что функция $\varphi(x)$ — положительна в промежутке (x_0, x_n). Заключаем, что остаточный член формул (46) или (49) или формул Маркова можно написать в виде (56), (57), (58).

Во второй главе, мы попытались сперва увидеть чем становится формула Тейлора (59) когда производные $y'(x_0)$, $\ldots$, $y^{(p)}(x_0)$ заменяют формулами численного дифференцирования (6). Получается такм образом формула (63) с остаточным членом написанным в виде суммы определенных интегралов. Эта формула имеет два вида, в зависимости от того, имеется ли $p<n$ или $p\geqq n$. В случае $p\geqq n$, формула (63) стано-

вится интерполяционной формулой Лагранжа (79) с остаточным членом написанным в виде (80), в связи с формулами численного дифференцирования (6). Мы применили формулу (63) к численному интегрированию дифференциального уравнения (82). Мы получили таким образом формулу численного интегрирования (87), с остаточным членом написанным в виде (88).

Во второй главе, § 2, мы преобразовали формулу Тейлора (104) пользуясь формулами численного дифференцирования (31) первой главы, § 2. Мы получили таким образом интерполяционную формулу Лагранжа (105′) с остаточным членом написанным в виде (106). Мы применили формулу (105′) к численному интегрированию дифференциального уравнения (110) и получили формулу численного интегрирования (112), где $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ интерполяционный многочлен Лагранжа решения $y(x)$ относительно узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Считаем важным получение этим образом остаточного члена $R_2(x)$ той формулы численного интегрирования, для которой мы доказали неравенство (114). В том случае, когда узлы в арифметической прогрессии с шагом h, мы доказали что $R_2(x_0+\lambda h)$ — порядка h^{n+1}.

В качестве применения формулы численного интегрирования (112), мы дали формулу численного интегрирования (124), являющуюся самой общей для дифференциального уравнения (110) типа Адамса, причем узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — любые.

Для этой формулы мы дали остаточный член, написанный в виде (125), для которого мы дали неравенство (127) с постоянной H данной формулой (128).

Когда узлы $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — в арифметической прогрессии с шагом h, формула численного интегрирования становится формулой (129). Для её остаточного члена мы дали неравенство (130), показывающее что $|R_4|$ — порядка h^{n+1}.

Важно обратить внимание на этот результат: если узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — в арифметической прогрессии с шагом h, то остаточный член $|R_2(x_0+h)|$ формулы численного интегрирования (112), с помощью многочлена Лагранжа $L(x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x))$ решения $y(x)$ — порядка h^{n+1}, в то время когда остаточный член формулы численного интегрирования типа Адамса (129) — порядка h^{n+2}.

L'APPLICATION DES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE À L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Résumé)

Désignons par $y(x)$ l'intégrale de l'équation différentielle (1) qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$ et qui est unique dans l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$. On suppose que cette intégrale est connue sur l'ensemble des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'intervalle $(x_0, x_0 + a]$. Le problème de l'intégration

numérique de l'équation différentielle (1) est de donner une formule de calcul de l'intégrale $y(x)$, en un point x de l'intervalle $(x_0, x_0 + a]$ à l'aide des valeurs de $y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_n)$ et d'étudier le reste de cette formule.

Si la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et à y jusqu'à l'ordre n, continues dans le rectangle D où sont remplies les conditions qui assurent l'existence de l'intégrale $y(x)$, nous pouvons écrire la formule de Taylor (2).

Le problème de l'intégration numérique ainsi posé se réduit par la formule (2) au problème suivant; étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$, ainsi que toutes les derivées qui vont intervenir dans le calcul, trouver des formules pour le calcul de $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ à l'aide des valeurs de $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ et étudier le reste de ces formules.

Ce travail est divisé en deux chapitres.

Dans le § 1 du premier chapitre on suppose que $f(x)$ est une fonction de la classe C^{n+p} dans l'intervalle $[a, b]$ et que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des noeuds de cet intervalle $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. On donne la formule (6) qui permet de calculer $f^{(p)}(x_0)$ à l'aide de $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(p-1)}(x_0)$ et de $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Le second membre est le reste de cette formule exprimé à l'aide de la fonction $\varphi(x)$ qui coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ dans les intervalles $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Ces fonctions sont les intégrales des équations différentielles (4) avec les conditions aux limites (5).

On démontre que la formule (6) peut se mettre sous la forme (16), ou la forme (22). On démontre que les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ qui figurent dans les équations différentielles (4) sont toutes différentes de zéro (no. 4) ce qui permet de démontrer (no. 5) que la fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle (x_0, x_n). Ce résultat est important car on peut l'appliquer à l'étude du reste de la formule (6). On obtient la formule (26′) et l'inégalité (27).

Supposons que la fonction $f(x)$ soit de la classe C^{n+1} dans l'intervalle $[a, b]$ et que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient des noeuds de cet intervalle $x_0 < x_1 < < \ldots < x_n$ Si ces noeuds sont en progression arithmétique, on a les formules de Markov (28) pour les valeurs de $f^{(p)}(x_0)$, où $p = 1, 2, \ldots, n$.

Dans le § 2 du premier chapitre nous avons donné les formules (31), ou (41), ou (46), ou encore (49) qui sont du type des formules de Markov, sans supposer que les noeuds soient en progression arithmétique. Le reste de ces formules est donné sous la forme d'une intégrale définie où la fonction $\varphi(x)$ coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ dans les intervalles $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, ces fonctions étant les intégrales des équations différentielles (29) avec les conditions aux limites (30).

On démontre que les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, qui figurent dans les équations (29), sont toutes différentes de zéro (no. 11) ce qui permet de démontrer que la fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle $(x_0\ x_n)$. On déduit que le reste des formules (46) ou (49) ou des formules de Markov peut s'écrire sous la forme (56), (57) et (58).

Dans le second chapitre nous avons cherché d'abord ce que devient la formule de Taylor (59) lorsqu'on remplace les dérivées $y'(x_0), \ldots, y^{(p)}(x_0)$

pas les formules de dérivation numérique (6). On obtient ainsi la formule (63), avec le reste écrit sous la forme d'une somme d'intégrales définies. Cette formule se présente sous deux formes selon que $p < n$ ou $p \geqslant n$. Dans le cas $p \geqslant n$, la formule (63) devient la formule d'interpolation de Lagrange (79) avec le reste écrit sous la forme (80) lié aux formules de dérivation numérique (6).

Nous avons fait une application de la formule (63) à l'intégration numérique de l'équation différentielle (82). Nous avons obtenu ainsi la formule d'intégration numérique (87) avec son reste écrit sous la forme (88).

Dans le second chapitre § 2, nous avons transformé la formule de Taylor (104), en employant les formules de dérivation numérique (31) du premier chapitre § 2. Ainsi nous avons obtenu la formule d'interpolation de Lagrange (105') avec le reste écrit sous la forme (106). Nous avons appliqué la formule (105') à l'intégration numérique de l'équation différentielle (110) et nous avons obtenu la formule d'intégration numérique (112) où $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de l'intégrale $y(x)$ relativement aux noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Il est important que nous ayons obtenu par cette voie le reste $R_2(x)$ de cette formule d'intégration numérique pour lequel nous avons démontré l'inégalité (114). Dans le cas où les noeuds sont en progression arithmétique de raison h, nous avons démontré que $|R_2(x_0 + \lambda h)|$ est de l'ordre de h^{n+1}.

Comme application de la formule d'intégration numérique (112), nous avons donné la formule d'intégration numérique (124) la plus générale pour l'équation différentielle (110) du type d'Adams en supposant les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ quelconques. Pour cette formule nous avons donné le reste sous la forme (125) pour lequel nous avons donné l'inégalité (127), avec la constante H_n, donnée par la formule (128).

Lorsque les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont en progression arithmétique de raison h, la formule d'intégration numérique devient la formule (129). Pour son reste, nous avons donné l'inégalité (130) qui montre que $|R_4|$ est de l'ordre de h^{n+2}.

Il est important de retenir ce résultat : si les noeuds $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont en progression arithmétique de raison h, le reste $|R_2(x_0 + \lambda h)|$ de la formule d'intégration numérique (112), avec le polynôme de Lagrange $L(x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ de l'intégrale $y(x)$, est de l'ordre de h^{n+1}, tandis que le reste de la formule d'intégration numérique du type d'Adams (129) est de l'ordre de h^{n+2}.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolations und Quadratur Formeln durch bestimmte Integralen*, Monatshefte für Math. und Phys. **42**, 389, (1935).
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Cap. III, § 5. Edit. Tehn. Bucureşti 1957.
3. T. Popoviciu, *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*, Studii şi Cerc. Matem. (Bucureşti), III, 1–2, 53–122 (1952).

4. Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа.* Гл. XII, Г.И.Т.Т.Л., Москва, 1953.
5. G. Kowalewski, *Remarque sur l'intérpolation newtonienne*, C. R. de l'Acad. des Sci. Paris, **227**, 21–23 (1948).
6. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Bologna, 1949.
7. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*, Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), IX, 45–135 (1958).
8. W. Tollmien, *Uber die Fehlerabschätzung bei Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differential Gleichungen*, Zeitschr. für ang. Math. und Mech., **18**, 83–90 (1938).
9. O. Aramă, *Asupra restului unor formule de integrare numerică de tip Runge — Kutta a ecuaţiilor diferenţiale*, Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), (sub tipar) (1960).