ASUPRA APROXIMĂRII FUNCŢIILOR DE DOUĂ VARIABILE PRIN POLINOAME DE TIP BERNSTEIN. CÎTEVA EVALUĂRI ASIMPTOTICE

DE

D. D. STANCU
(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 25 mai 1959 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj.

1. Într-o lucrare precedentă [1] ne-am ocupat de aproximarea unei funcţii de două variabile $f(x, y)$, definită şi continuă pe triunghiul

$$\Delta : x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \tag{1}$$

prin polinoamele de tip Bernstein de gradul n

$$B_n(f; x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} p_n^{i,j}(x, y) f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \tag{2}$$

unde

$$p_n^{i,j}(x, y) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} x^i y^j (1 - x - y)^{n-i-j}. \tag{3}$$

Printre rezultatele expuse în acea lucrare menţionăm următorul : dacă $f(x, y)$ e continuă pe Δ, atunci are loc următoarea inegalitate

$$\left| f(x, y) - B_n(f; x, y) \right| \leqslant 2\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

unde $\omega(\delta)$ este modulul de oscilaţie al funcţiei $f(x, y)$.

Trebuie totuşi subliniat că se obţine o idee destul de clară asupra ordinului cu care polinomul (2) aproximează funcţia $f(x, y)$, în ipoteza că aceasta admite pe Δ derivate parţiale pînă la un anumit ordin, dacă se caută evaluări asimptotice ale aproximaţiei amintite, de felul celor stabilite în cazul unei variabile de E. V. V o r o n o v s k a y a [2] şi S. N. B e r n s t e i n [3].

2. În stabilirea rezultatelor pe care le vom expune în această notă, un rol important îl au polinoamele

$$S_{p,q}^{(n)}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(i-nx)^p(j-ny)^q\,p_n^{i,j}(x,y), \tag{4}$$

unde p și q sînt întregi nenegativi.

O proprietate importantă a acestor polinoame este exprimată de

LEMA 1. *Polinoamele* $S_{p,q}^{(n)}(x,y)$ *verifică următoarele relații de recurență*

$$\begin{aligned} S_{p+1,q}^{(n)}(x,y) &= x(1-x)\left[\frac{\partial S_{p,q}^{(n)}(x,y)}{\partial x}+np\,S_{p-1,q}^{(n)}(x,y)\right]- \\ &\quad - xy\left[\frac{\partial S_{p,q}^{(n)}(x,y)}{\partial y}+nq\,S_{p,q-1}^{(n)}(x,y)\right] \\ S_{p,q+1}^{(n)}(x,y) &= y(1-y)\left[\frac{\partial S_{p,q}^{(n)}(x,y)}{\partial y}+nq\,S_{p,q-1}^{(n)}(x,y)\right]- \\ &\quad - xy\left[\frac{\partial S_{p,q}^{(n)}(x,y)}{\partial y}+np\,S_{p-1,q}^{(n)}(x,y)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(S_{0,0}^{(n)}(x,y)=1,\ S_{1,0}^{(n)}(x,y)=S_{0,1}^{(n)}(x,y)=0\right)$$

Valabilitatea acestei leme se verifică fără greutate. Dacă $1<p+q\leqslant 3$, se obțin de aici următoarele polinoame, care se vor folosi în continuare,

$$\begin{aligned} &S_{2,0}^{(n)}(x,y)=nx(1-x),\ S_{1,1}^{(n)}(x,y)=-nxy,\ S_{0,2}^{(n)}(x,y)=ny(1-y), \\ &S_{3,0}^{(n)}(x,y)=nx(1-x)(1-2x),\ S_{2,1}^{(n)}(x,y)=-nxy(1-2x), \\ &S_{1,2}^{(n)}(x,y)=-nxy(1-2y),\ S_{0,3}^{(n)}(x,y)-ny(1-y)(1-2y). \end{aligned} \tag{6}$$

Urmînd o cale folosită în cazul unei variabile de I. P. Natanson [4], se poate demonstra, prin recurență, că are loc

LEMA 2. *Polinomul* $S_{p,q}^{(n)}(x,y)$ *de la (4) se poate reprezenta sub forma*

$$S_{p,q}^{(n)}(x,y)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]}A_{p,q}^{(i)}(x,y)n^i, \tag{7}$$

unde $A_{p,q}^{(i)}(x,y)$ *sînt polinoame în* x și y *independente de* n.

Folosind această lemă se poate stabili imediat

LEMA 3. *Pe triunghiul* Δ *are loc următoarea inegalitate*

$$\left|S_{p,q}^{(n)}(x,y)\right|\leqslant C(p,q)n^{\left[\frac{p+q}{2}\right]}, \tag{8}$$

unde $C(p,q)$ *este o constantă care depinde de* p *și* q *dar nu depinde de* n.

Pentru demonstrarea teoremei de bază a acestei lucrări a mai fost nevoie de

LEMA 4. *Să considerăm un număr pozitiv* δ *și să notăm cu* $\nu_1(x,y)$, $\nu_2(x,y)$, $\nu_3(x,y)$ *mulțimile perechilor de numere* (i,j), *unde* $j=0,1,\ldots,n-i$ *și* $i=0,1,\ldots,n$, *pentru care avem respectiv*

$$\left|\frac{i}{n}-x\right|\geqslant\delta,\ \left|\frac{j}{n}-y\right|>\delta;\ \left|\frac{i}{n}-x\right|<\delta,\ \left|\frac{j}{n}-y\right|\geqslant\delta;$$

$$\left|\frac{i}{n}-x\right|\geqslant\delta,\ \left|\frac{j}{n}-y\right|\geqslant\delta.$$

Cu acestea avem

$$\sum_{(i,j)\in\nu_1(x,y)}p_n^{i,j}(x,y)\leqslant\frac{C(2p',0)}{n^{p'}\delta^{2p'}},\qquad \sum_{(i,j)\in\nu_2(x,y)}p_n^{i,j}(x,y)\leqslant\frac{C(0,2q')}{n^{q'}\delta^{2q'}},$$

$$\sum_{(i,j)\in\nu_3(x,y)}p_n^{i,j}(x,y)\leqslant\frac{C(2p',2q)}{n^{p'+q'}\delta^{2(p+q)}},$$

p' *și* q' *fiind întregi nenegativi, iar* $C(p,q)$ *fiind constanta din inegalitatea (8).*

3. Folosind formula lui Taylor și ținînd seama de lemele de mai sus, se poate demonstra

TEOREMA 1. *Dacă* $f(x,y)$ *are pe* Δ *derivate parțiale mărginite de ordinul* $N\geqslant 2$, *atunci are loc următoarea egalitate asimptotică*

$$B_n(f;x,y)=f(x,y)+\sum_{\nu=2}^{N}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{n^\nu}\frac{S_{\nu-k,k}^{(n)}(x,y)}{(\nu-k)!\,k!}f_{x^{\nu-k}y^k}^{(\nu)}(x,y)+\frac{\varepsilon_n}{n^s}, \tag{9}$$

unde $s=\left[\frac{N+1}{2}\right]$, *iar* ε_n *tinde la zero cînd* n *tinde la infinit.*

De exemplu în cazul particular $N=2$, teorema aceasta ne conduce la următoarea evaluare asimptotică, care credem că e interesantă :

$$B_n(f;x,y)=f(x,y)+\frac{x(1-x)}{2n}f''_{x^2}(x,y)-\frac{xy}{n}f''_{xy}(x,y)+\frac{y(1-y)}{2n}f''_{y^2}(x,y)+\frac{\varepsilon_n}{n}. \tag{10}$$

Evaluarea aceasta constituie o extindere la două variabile, în cazul polinoamelor de tip Bernstein de la (2), a unui binecunoscut și important rezultat obținut de E. V. Voronovskaya [2].

Se observă că ordinul cu care polinomul (2) aproximează funcția $f(x,y)$ nu poate fi făcut (exceptînd funcția lineară) mai mic decît $\frac{1}{n}$.

Ținînd seama de teorema 1 și de lema 2, se poate demonstra

TEOREMA 2. *Fie*

$$R_N(f;x,y)=\lim_{n\to\infty}n^s\left[B_n(f;x,y)-\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{\binom{\nu}{k}}{\nu!\,n^\nu}S_{\nu-k,k}^{(n)}(x,y)f_{x^{\nu-k}y^k}^{(\nu)}(x,y)\right], \tag{11}$$

unde $s=\left[\frac{N+1}{2}\right]$. *Avem*

$$R_N(f;x,y)=\sum_{k=0}^{N}\frac{A^{(\mu)}_{N-k,k}(x,y)}{(N-k)!\,k!}f^{(N)}_{x^{N-k}y^k}(x,y),\quad \mu=\left[\frac{N}{2}\right]. \tag{12}$$

Pentru demonstrare se are în vedere că

$$R_N(f;x,y)=\frac{1}{N!}\lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{n^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}S^{(n)}_{N-k,k}(x,y)f^{(N)}_{x^{N-k}y^k}(x,y)=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(N)}_{x^{N-k}y^k}(x,y)}{(N-k)!\,k!}\lim_{n\to\infty}\frac{S^{(n)}_{N-k,k}(x,y)}{n^k}.$$

Formula (12) se obține de aici ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S^{(n)}_{N-k,k}(x,y)}{n^\mu}=A^{(\mu)}_{N-k,k}(x,y). \tag{13}$$

Cazuri particulare. 1°. Dacă $N=2$, rezultă $s=1$ și avem

$$R_2(f;x,y)=\frac{1}{2}A^{(1)}_{2,0}(x,y)f'''_{x^2}(x,y)+A^{(1)}_{1,1}(x,y)f''_{xy}(x,y)+\frac{1}{2}A^{(1)}_{0,2}(x,y)f''_{y^2}(x,y).$$

Ținînd seama de (6) și (7) găsim că

$$R_2(f;x,y)=\frac{x(1-x)}{2}f''_{x^2}(x,y)-xyf''_{xy}(x,y)+\frac{y(1-y)}{2}f''_{y^2}(x,y).$$

2°. În cazul $N=3$, avem $s=2$ și

$$\begin{aligned}R_3(f;x,y)&=\frac{x(1-x)(1-2x)}{6}f'''_{x^3}(x,y)-\frac{x(1-2x)y}{2}f'''_{x^2y}(x,y)-\\&-\frac{xy(1-2y)}{2}f'''_{xy^2}(x,y)+\frac{y(1-y)(1-2y)}{6}f'''_{y^3}(x,y).\end{aligned} \tag{14}$$

4. Deoarece e inutil să calculăm toți termenii lui $S^{(n)}_{p,q}(x,y)$ pentru a găsi expresia $R_N(f;x,y)$, vom indica o cale care simplifică în mare măsură calculele. În acest scop vom enunța

TEOREMA 3. *Avem*

$$A^{(\mu)}_{N\text{-}k,k}(x,y)=\frac{1}{n^\mu}B_{N\text{-}k,h}(x,y), \tag{15}$$

unde $B_{N\text{-}k,k}(x,y)$ *sînt polinoamele în x și y definite de relațiile de recurență*

$$\begin{aligned}B_{N\text{-}k,k}(x,y)&=n(N-k-1)x(1-x)B_{N-k-2,k}(x,y)-\\&-nkxy\,B_{N-k-1,k-1}(x,y),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}B_{N-k,k}(x,y)&=n(k-1)y(1-y)B_{N-k,k-2}(x,y)-\\&-n(N-k)xy\,B_{N-k-1,k-1}(x,y).\end{aligned} \tag{17}$$

$$(B_{0,0}(x,y)=1,\ B_{1,0}(x,y)=B_{0,1}(x,y)=0).$$

Cazuri particulare. 1°. În cazul $N=2$, luînd $k=0,1$ în (16) și $k=2$ în (17), obținem

$$B_{2,0}(x,y)=nx(1-x),\ B_{1,1}(x,y)=-nxy,\ B_{0,2}(x,y)=ny(1-y).$$

2°. Dacă luăm $N=4$ și înlocuim $k=0,1,2$ în (16) și $k=3,4$ în (17), găsim

$$\begin{aligned}&B_{4,0}(x,y)=3n^2x^2(1-x)^2,\ B_{3,1}(x,y)=-3n^2x^2(1-x)y,\ B_{2,2}(x,y)=\\&=n^2xy(1-x-y+3xy),\ B_{1,3}(x,y)=-3n^2xy^2(1-y),\ B_{0,4}(x,y)=\\&=3n^2y^2(1-y)^2.\end{aligned}$$

5. Pe baza considerațiilor făcute în această lucrare se constată că putem forma, în cazul cînd funcția $f(x,y)$ admite pe Δ derivate parțiale pînă la anumite ordine, polinoame analoage cu polinoamele $B_n(f;x,y)$ de la (2), dar care converg mai repede către funcția $f(x,y)$.

Într-o lucrare viitoare vom reveni cu detalii asupra rezultatelor prezentate în această notă.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МНОГОЧЛЕНАМИ ТИПА С. Н. БЕРНШТЕЙНА. НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке дополняются результаты опубликованные в прежней заметке [1], относительно приближения, данной на треугольнике Δ с (1) функции $f(x,y)$ многочленом типа С. Н. Бернштейна n-ого порядка с (2).

В установлении результатов настоящей заметки играют важную роль многочлены с (4). При помощи леми 1—4, автор обнаружил несколько свойств этих многочленов. Затем доказана теорема: *если $f(x,y)$ имеет на Δ ограниченные частные производные порядка $N \geqq 2$, то имеется асимптотическое равенство с (9), где $s=\left[\frac{N+1}{2}\right]$, а $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.*

В частном случае $N=2$, получена формула (10), являющаяся обобщением широкоизвестного результата Е. Вороновской [2].

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES PAR LES POLYNOMES DU TYPE BERNSTEIN. QUELQUES ÉVALUATIONS ASYMPTOTIQUES

RÉSUMÉ

Dans cette note l'auteur complète des résultats publiés dans une note antérieure [1], relatifs à l'approximation d'une fonction $f(x, y)$ définie sur le triangle Δ de (1) par le polynôme du type Bernstein de n degré de (2). A l'obtention des résultats de la présente note, les polynômes de (4) jouent un rôle important. Par les lemmes 1—4, l'auteur a mis en évidence quelques propriétés des ces polynomes. Puis il a démontré le théorème suivant : *si $f(x, y)$ a sur Δ des dérivées partielles bornées de l'ordre $N \geqslant 2$, alors a lieu l'égalité asymptotique de* (9), *où* $s = \left[\frac{N+1}{2}\right]$ *et* $\varepsilon_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$. Dans le cas particulier $N = 2$ a été obtenue la formule (10), qui représente une généralisation du résultat bien connu de E. Voronovskaya [2].

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcţiilor de două variabile.* Comunicările Acad. R. P. R., **IX**, 8, 773—777 (1959).
2. E. V. Voronovskaya, *Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein.* Dokl. AN SSSR, A, 4, 79—85 (1932).
3. S. N. Bernstein, *Complément à l'article de E. Voronovskaya „Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein".* Dokl. AN SSSR, A, 4, 86—92 (1932).
4. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций.* Москва-Ленинград, 1949.

Primit la 17. IX. 1959.