ASUPRA LANȚURILOR CU LEGĂTURI COMPLETE*)

DE

R. THEODORESCU
(București)

Noțiunea de lanț cu legături complete a fost introdusă în teoria probabilităților de către O. Onicescu și G. Mihoc în lucrarea lor [34]. Originea acestei noțiuni a fost preocuparea autorilor de a găsi forma de dependență cea mai generală între diversele variabile aleatoare. Această noțiune a fost extinsă imediat de W. Doeblin și R. Fortet [10] și apoi de R. Fortet [11] în teza sa. Studiul sistematic al acestor lanțuri aparține mai cu seamă probabiliștilor romîni.

Materialul cu privire la lanțurile cu legături complete se găsește risipit într-o serie întreagă de memorii și monografii. Dată fiind importanța și actualitatea acestui nou dar bine conturat capitol al proceselor aleatoare, ne-am gîndit că ar fi binevenită o scurtă prezentare de ansamblu, insistînd bineînțeles numai asupra rezultatelor centrale.

1. Noțiunea de lanț cu legături complete

Să considerăm un șir de variabile aleatoare

$$\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

fiecare putînd lua aceeași mulțime finită de valori $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{m+1})$ care, pentru comoditate, le vom presupune numere reale, adică $\omega_j \in R$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$. Să presupunem de asemenea că se dă repartiția inițială $p_j = P(\omega_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $\sum_{j=1}^{m+1} p_j = 1$; în acest caz variabilei ξ_1 îi va corespunde schema

$$\xi_1 : \begin{pmatrix} \omega_j \\ p_j \end{pmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant m+1.$$

*) Această lucrare apare și în limba rusă în revista „Mathematica", vol 2 (25), fasc. 2, 1960. Pentru detalii, vezi monografia recent apărută: G. Ciucu, R. Theodorescu, *Procese cu legături complete*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.

Să notăm acum cu $p_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$ $(p_j^{(1)} = p_j, 1 \leqslant j \leqslant m+1)$ probabilitățile absolute corespunzătoare variabilei de rang n,

$$\xi_n : \begin{pmatrix} \omega_j \\ p_j^{(n)} \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1, \quad p_{m+1}^{(n)} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j^{(n)}.$$

Prin definiție, O. O n i c e s c u și G. M i h o c [34] (vezi și O. O n i c e s c u [27–31]) numesc șirul de variabile aleatoare (1), un *lanț cu legături complete variabil simplu*, dacă probabilitățile $p_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, corespunzătoare variabilei de rang $n+1$, sînt de forma

$$p_j^{(n+1)} = g_{i,j}^{(n)}(p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}, p_{m+1}^{(n)}) = f_{i,j}^{(n)}(p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}) = f_{i,j}^{(n)}(\mathfrak{p}^{(n)})$$

$$1 \leqslant i, j \leqslant m+1, \quad n \in N^* = [1, 2, \ldots]$$

și

$$0 \leqslant f_{i,j}^{(n)} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{m+1} f_{i,j}^{(n)} = 1$$

în ipoteza că la momentul n s-a prezentat valoarea ω_i.

În cele ce urmează ne vom referi la funcțiile $f_{i,j}^{(n)}$ drept funcțiile fundamentale ale lanțului cu legături complete considerat. Rezultă din definiția dată că un lanț cu legături complete simplu variabil este complet determinat de matricile $f^{(n)} = (f_{i,j}^{(n)})$, $n \in N^*$ și de repartiția inițială p_j $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$.

Evident, această definiție poate fi extinsă la lanțurile multiple; într-adevăr, un șir de variabile aleatoare (1) formează un lanț cu legături complete variabil de multiplicitate l, dacă probabilitățile $p_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, corespunzătoare variabilei de rang $n+1$, sînt de forma

$$p_j^{(n+1)} = f_{j_1 \ldots j_l, j}^{(n)}(\mathfrak{p}^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(n-l+1)}),$$

$$1 \leqslant j_1, \ldots, j_l, j \leqslant m+1, \quad n \in N^*$$

și

$$0 \leqslant f_{j_1 \ldots j_l, j}^{(n)} \leqslant 1, \quad \sum_{l=1}^{m+1} f_{j_1 \ldots j_l, j}^{(n)} = 1,$$

în ipoteza că la momentele $n, \ldots, n-l+1$ s-au prezentat, respectiv, valorile $\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}$.

Vom adopta următoarea terminologie. Un lanț cu legături complete este *staționar*, dacă funcțiile fundamentale nu depind explicit de n; de asemenea, dacă funcțiile fundamentale depind liniar de $p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}$, vom avea de-a face cu lanțuri *liniare*. Pentru cazul $m=1$, vom folosi termenul de lanț *alternativ*.

2. Relația funcțională a probabilității totale

Să notăm cu $P_i^{(n)}(\mathfrak{p})$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1,\ n \in N^*)$ probabilitatea totală ca, după n pași, variabila ξ_n să ia valoarea ω_i. Vom observa mai întîi că

$$P_i^{(n+1)}(\mathfrak{p}) = \sum_{\substack{j_k=1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}^{m+1} p_{j_1} f_{j_1, j_2}^{(1)}(\mathfrak{p}^{(1)})\, f_{j_2, j_3}^{(2)}(\mathfrak{p}^{(2)}) \cdots f_{j_n, i}^{(n)}(\mathfrak{p}^{(n)}).$$

Dacă lanțul considerat este staționar, atunci această relație devine

$$P_i^{(n+1)}(\mathfrak{p}) = \sum_{\substack{j_k=1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}^{m+1} p_{j_1} f_{j_1, j_2}(\mathfrak{p}^{(1)})\, f_{j_2, j_3}(\mathfrak{p}^{(2)}) \cdots f_{j_n, i}^{(n)}(\mathfrak{p}^{(n)}),$$

de unde rezultă pentru aceste lanțuri relația funcțională fundamentală

$$P_i^{(n+1)}(\mathfrak{p}) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(n)}(\mathfrak{f}_j(\mathfrak{p})), \; 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2}$$

$$P_{m+1}^{(n+1)}(\mathfrak{p}) = 1 - \sum_{j=1}^{m} P_j^{(n+1)}(\mathfrak{p}),$$

unde $\mathfrak{f}_j(\mathfrak{p}) = [f_{j,1}(\mathfrak{p}), \ldots, f_{j,m}(\mathfrak{p})]$. Această ecuație obținută de O. O n i c e s c u și G. M i h o c [35, 39, 41], va constitui punctul de plecare la o serie de lucrări pe care le vom aminti în cele ce urmează.

Evident, pentru un lanț alternativ relația funcțională (2) devine

$$P^{(n+1)}(p) = p\, P^{(n)}(f(p)) + (1-p)\, P^{(n)}(g(p)),$$

unde

$$f_{1,1} = f, \quad f_{2,1} = g, \quad p_1 = p.$$

3. Exemple

Din însăși definiția dată se poate constata marea generalitate a lanțurilor cu legături complete; într-adevăr, cel mai simplu și totuși cel mai concludent exemplu este cazul în care funcțiile fundamentale nu depind explicit de probabilități, ceea ce revine la faptul că sîntem în prezența unui lanț Markov. Mai mult, orice lanț Markov de multiplicitate l poate fi considerat ca un lanț cu legături complete simplu.

Vom aminti acum o schemă de urne (O. O n i c e s c u, G. M i h o c [41]). Fie o urnă inițială U_1 cu a_j bile de culoare j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$ și fie $a_j^{(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, compoziția urnei U_{n+1} $(a_j^{(1)} = a_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m+1)$, dată după regula următoare : dacă compoziția urnei U_n a fost $a_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, și în extracția de rang n s-a obținut o bilă de culoarea i, atunci compoziția urnei U_{n+1} este dată de

$$a_j^{(n+1)} = h_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)}), \; 1 \leqslant j \leqslant m+1, \; n \in N^*,$$

unde funcțiile $h_{ij}^{(n)}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m+1,\ n \in N^*)$ sînt definite pe N și cu valori tot în N, $N = \{0, 1, \ldots\}$. Rezultă atunci că schema corespunzătoare urnei U_n este

$$\begin{pmatrix} a_j^{(n)} \\ p_j^{(n)} \end{pmatrix}, \quad p_j^{(n)} = \frac{a_j^{(n)}}{\sum_{k=1}^{m+1} a_k^{(n)}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

iar cea corespunzătoare urnei U_{n+1}

$$\begin{pmatrix} a_j^{(n+1)} \\ p_j^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad p_j^{(n+1)} = \frac{h_{ij}^{(n)}(a_j^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)})}{\sum_{k=1}^{m+1} h_{ik}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)})}.$$

Dacă presupunem că funcțiile $h_{ij}^{(n)}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m+1;\ n \in N^*)$ sînt omogene de același grad, deducem că

$$p_j^{(n+1)} = f_{i,j}^{(n)}(\mathbf{p}^{(n)}), \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

adică tocmai un lanț cu legături complete variabil.

Această schemă foarte generală, conține drept cazuri particulare scheme cu numeroase aplicații. Așa de exemplu, ea conține schema generală de contagiune în progresie aritmetică, adică

$$a_j^{(n+1)} = h_{ij}^{(n)}(a_1^{(n)}, \ldots, a_{m+1}^{(n)}) = a_j^{(n)} + \delta_{ij} d_j, \; 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

unde d_j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$ sînt întregi pozitivi dați. Această schemă conține la rîndul său, schema de contagiune a lui G. P ó l y a [43], care se obține pentru $m = 1$ și $d_1 = d_2 = d$.

Se pot construi și alte exemple, cum ar fi schemele în progresie geometrică sau chiar fenomenul statistic al invalidității, după cum a arătat G. M i h o c în [26] (vezi de asemenea O. O n i c e s c u, G. M i h o c, C. T. I o n e s c u T u l c e a [42]).

4. Legea numerelor mari. Sistem circular de urne

Ultimul exemplu amintit mai sus pentru $m = 1$, $d_1 = d_2 = 1$ poate fi interpretat astfel : dintr-o urnă inițială cu a_1 bile de culoare 1 și a_2 de culoarea 2 $(a_1 + a_2 = M)$ se efectuează extracții și după fiecare extracție se înlocuiește bila extrasă cu o bilă de culoare contrarie. O interpretare echivalentă este următoarea : fie o urnă inițială cu M bile de culoare 1 și 2 și să considerăm șirul de $M+1$ urne cu următoarele compoziții

$$(0, M), (1, M-1), \ldots, (M-1, 1)\ (M, 0).$$

Evident, urna inițială considerată va fi situată într-un anumit loc în acest șir. Dacă bila extrasă din această urnă a fost de culoare 1, extracția următoare se face din urna precedentă și dacă bila a fost de culoare 2, ea se va face din urna care urmează. Obținem astfel sistemul circular de urne considerat de O. O n i c e s c u și G. M i h o c [36, 38].

Dacă urna inițială are compoziția (a_1, a_2) și $a_1 = a_2$, iar ν este numărul de bile de culoare 1 obținute în n extracții succesive, atunci după aceste extracții urna va avea compoziția $(a_1 - 2\nu + n,\ a_2 + 2\nu - n)$. Dar în acest caz rezultă, că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu}{n} = \frac{1}{2};$$

această relație pune în evidență un nou aspect al legii numerelor mari și anume frecvența $\frac{\nu}{n}$ tinde, pentru $n \to \infty$, către $\frac{1}{2}$ în sensul clasic al analizei.

Schema de urne considerată posedă și alte proprietăți care diferă considerabil de cele obișnuite din teoria variabilelor aleatoare independente, după cum au arătat O. O n i c e s c u și G. M i h o c [41].

5. Lanț asociat și modele pentru învățare

Să revenim la definiția unui lanț cu legături complete simplu staționar și să observăm că ea poate fi interpretată în modul următor : probabilitatea de a avea în experiența de rang $n+1$ ca probabilități ale lui ξ_{n+1} valorile $f_{i,j}(\mathbf{p}^{(n)})$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, știind că probabilitățile respective ale lui ξ_n au fost $p_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, este $p_i^{(n)}$. Ținînd seama de această interpretare, O. O n i c e s c u și G. M i h o c [37] au introdus *lanțul asociat* unui lanț cu legături complete $(\eta_{n+1})_{n \in N^*}$, care reprezintă vectorii de probabilitate corespunzători șirului $(\xi_n)_{n \in N^*}$, astfel încît

$$\eta_{n+1} : \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i(\mathbf{p}^{(n)}) \\ p_i^{(n)} \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+1. \tag{3}$$

Putem considera o schemă mult mai generală (vezi R. T h e o d o r e s c u [49]); anume, fie $(\widetilde{\xi}_n)_{n \in N^*}$ un alt șir de variabile aleatoare și fie $\widetilde{\Omega} = (\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{t+1})$ mulțimea finită de valori pe care poate să le ia fiecare din aceste variabile, probabilitățile $\widetilde{p}_j = P(\widetilde{\omega}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant t+1$, $\sum_{j=1}^{t+1} p_j = 1$ fiind date. În locul șirului (3), putem considera șirul mult mai general $(\eta_{n+1})_{n \in N^*}$, pentru care

$$\eta_{n+1} : \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i(\mathbf{p}^{(n)}) \\ F_i(\mathbf{p}^{(n)}, \widetilde{\mathbf{p}}^{(n)}) \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i \leqslant t+1, \tag{4}$$

unde $\widetilde{\mathbf{p}}^{(n)}$ are o semnificație analogă cu $\mathbf{p}^{(n)}$, iar

$$0 \leqslant F_j \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{t+1} F_j = 1.$$

Evident, dacă $m = t$ și

$$F_i(\mathbf{p}^{(n)}, \widetilde{\mathbf{p}}^{(n)}) = p_i^{(n)},$$

regăsim schema (3) a lui O. O n i c e s c u și G. M i h o c.

Sub o formă echivalentă, (4) se poate scrie

$$\eta_{n+1} : \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_i(p_1{}^{(n)}, \ldots, p_{m+1}^{(n)}) \\ G_i(p_1{}^{(n)}, \ldots, p_{m+1}^{(n)}; \tilde{p}_1{}^{(n)}, \ldots, \tilde{p}_{t+1}^{(n)}) \end{pmatrix}, 1 \leqslant i \leqslant t+1, \qquad (5)$$

făcînd să apară din nou probabilitățile corespunzătoare ultimei valori, unde $\mathfrak{g}_i$ sînt expresiile analoge cu $\mathbf{f}_i$, introduse la punctul **1**, iar

$$G_i(p_1^{(n)}, \ldots, p_{m+1}^{(n)}; \tilde{p}_1^{(n)}, \ldots, \tilde{p}_{t+1}^{(n)}) = F_i(\mathbf{p}^{(n)}, \tilde{\mathbf{p}}^{(n)}), \ 1 \leqslant i \leqslant t+1.$$

După cum a arătat R. Theodorescu [49], modelele aleatoare pentru învățare, considerate de R. Bush și F. Mosteller [3], și anume evenimentele controlate „de experimentator", „de subiect" și „de experimentator și de subiect" reprezintă cazuri particulare ale schemei generale (5). Mai mult, evenimentele controlate de subiect reprezintă un caz particular al schemei (3), dată de O. Onicescu și G. Mihoc [37].

6. Teoreme ergodice. Teoreme limită

Comportarea asimptotică a probabilității totale a ridicat numeroase probleme teoretice, care au fost rezolvate cu succes de O. Onicescu și G. Mihoc în [35, 39, 41]. Ei au considerat un lanț cu legături complete staționar pentru care sînt verificate următoarele condiții :

(i) funcțiile fundamentale $f_{i,j}(\mathbf{p})$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1, 1 \leqslant j \leqslant m)$ sînt definite și continue în domeniul Δ: $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $\sum\limits_{j=1}^{m+1} p_j = 1$ și verifică condițiile

$$0 < f_{i,j}(\mathbf{p}) < 1 \ (1 \leqslant i \leqslant m+1 \,;\, 1 \leqslant j \leqslant m)\,;$$

(ii) funcțiile fundamentale $f_{i,j}(\mathbf{p})$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1;\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ admit derivate parțiale de ordinul întîi continue, verificînd condiția

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f_{i,j}(\mathbf{p})}{\partial p_k} \right| < 1$$

pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant m$;

(iii) cel puțin o aplicație $\mathbf{f}_{i_0}$ admite un punct de atracție unic [1]) în interiorul lui Δ; în aceste condiții lanțul cu legături complete considerat este ergodic, adică

$$\lim_{n \to \infty} P_i^{(n)}(\mathbf{p}) = P_i = \text{const.}, \ 1 \leqslant i \leqslant m+1.$$

Vom observa că condiția (i) se întîlnește în studiul lanțurilor Markov, unde (ii) și (iii) sînt banale. De asemenea, condițiile teoremei sînt foarte apropiate de cele necesare și suficiente, cum de altfel au arătat O. Onicescu și G. Mihoc [39, 41] printr-un exemplu.

---

[1]) Adică iteratele oricărui punct converg către un punct limită unic.

Teoreme ergodice cu privire la lanțuri cu legături complete a dat și R. Fortet [11] în teza sa, folosind rezultate speciale asupra iterațiilor aplicațiilor liniare. Aceste teoreme sînt apoi folosite în studiul complet al comportății asimptotice a lanțurilor liniare alternative.

În aceeeași ordine de idei, N. Praporgescu [44], folosind anumite sisteme speciale de ecuații, regăsește pe altă cale rezultatele lui O. Onicescu și G. Mihoc [41] și ale lui R. Fortet [11], amintite mai sus.

Fie acum un lanț cu legături complete staționar și să notăm cu $f^{(n)}(\mathbf{p}\,;\, t, \theta)$ funcția caracteristică corespunzătoare sumei

$$\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n - n\,\theta.$$

Evident, are loc relația de recurență

$$f^{(n)}(\mathbf{p}; t, \theta) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j \, e^{(\omega_j - \theta)\, it} \ f^{(n-1)}(\mathbf{f}_j(\mathbf{p})\,;\, t, \theta),$$

care permite studierea comportării asimptotice a lanțului considerat. Pentru cazul alternativ, O. Onicescu și G. Mihoc [40] au demonstrat că, în anumite condiții,

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n+1)}\left(\mathbf{p}\,;\, \frac{t}{\sqrt{n}}, \theta\right) = e^{-\frac{\lambda_1''(0)}{2} t^2},$$

unde $\lambda''(0) \neq 0$, iar λ_1 este o anumită valoare proprie ; ca și pentru lanțurile Markov, obținem așadar legea normală ; cazul $m > 1$ a fost considerat de M. Iosifescu în [20].

7. Lanțuri cu legături complete în sens larg

Lanțurile cu legături complete în sens larg au fost considerate pentru prima oară de W. Doeblin și R. Fortet [10] ca o generalizare directă a lanțurilor introduse de O. Onicescu și G. Mihoc [35]. Ele au fost reluate apoi de C. T. Ionescu Tulcea și G. Marinescu [18] sub o formă și mai generală.

Fie deci Ω o mulțime cel mult numerabilă de stări și

$$W = \prod_{j \in -N} \Omega^j, \ X = \prod_{j \in N^*} \Omega^j,$$

unde $-N = \{\ldots, -1, 0\}$, iar $\prod$ reprezintă simbolul de produs cartezian și $\Omega^j = \Omega$ în ambele cazuri. Spațiul W constituie așa-numitul spațiu de drumuri c, iar elementele lui X vor fi notate cu x. În general,

$$\Omega^I = \prod_{j \in I} \Omega^j,$$

unde $\Omega^j = \Omega$, $j \in I$, elementele lui Ω^I fiind notate cu ω^I.

Fără a intra în detalii, vom spune că şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in Z}$ $(Z = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\})$ constituie un lanţ cu legături complete *în sens larg* şi staţionar [2]), dacă probabilităţile de trecere

$$P(\xi_{n+1} = \omega \mid \xi_n = \omega_0, \xi_{n-1} = \omega_{-1}, \ldots) = P(c;\omega),$$

sînt definite pentru orice $c = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0) \in W$ şi orice $\omega \in \Omega$,

$$0 \leqslant P(c;\omega) \leqslant 1, \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(c;\omega) = 1$$

şi

$$\begin{aligned} &P^1(c;\omega) = P(c;\omega), \\ &P^{(n+1)}(c;\omega) = \sum_{\omega' \in \Omega} P(c;\omega') P^{(n)}(u(c;\omega');\omega), \quad n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{6}$$

unde $u(\cdot\,;\omega')$ reprezintă aplicaţia lui W în W, definită de relaţia

$$u(c;\omega') = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega'), \quad c = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0).$$

Interpretarea probabilităţii de trecere ca o măsură pe un spaţiu produs a fost făcută de G. Ciucu [7] pe baza teoremei de extensiune a măsurilor regulate, dată de C. T. Ionescu Tulcea [14][3]) şi care stă la baza dezvoltării teoriei proceselor aleatoare în general. Într-adevăr, pentru $c \in W$ şi $\omega^{(l)} = (\omega_1, \ldots, \omega_l) \in \Omega^{[1,l]} = \Omega^{(l)}$ [4]), să punem

$$P_{1,l} = P, \quad l = 1,$$

$$P_{1,l}(c;\omega^{(l)}) = P(c;\omega_1)P(u(c;\omega_1);\omega_2) \ldots P(u(c;\omega_1, \ldots, \omega_{l-1});\omega_l), \quad l > 1,$$

iar pentru orice parte $A^{(l)} \subset \Omega^{(l)}$

$$P_{1,l}(c; A^{(l)}) = \sum_{\omega^{(l)} \in A^{(l)}} P_{1,l}(c;\omega^{(l)}),$$

funcţiile $P^{(n)}(c; A^{(l)})$ fiind definite analog cu (6).

Fie acum $\mathscr{X}$ corpul borelian corespunzător lui X şi să presupunem că $B \in \mathscr{X}$ este de forma

$$B = \mathrm{pr}_{(l)}^{-1}(A^{(l)}),$$

unde $A^{(l)} \in \mathcal{K}^{[1,l]} = \mathcal{K}^{(l)}$ [5]). Să introducem atunci probabilitatea Q^c prin relaţia

$$Q^c(B) = P_{1,l}(c; A^{(l)});$$

această probabilitate, conform teoremei amintite, se poate extinde în mod unic pe $\mathscr{X}$. Ajungem astfel la interpretarea dorită, dată de relaţia

$$P^{(n)}(c; A^{(l)}) = Q^c\, \mathrm{pr}_{[n,\, n-l+1]}^{-1}(A^{(l)})$$

sub forma de probabilităţi condiţionate corespunzătoare procesului aleator $\{X, \mathscr{X}, Q^c\}$.

---

2) Ne vom ocupa în cele ce urmează numai de acest caz, aşa că vom omite în general cuvîntul staţionar.

3) Rezultatele lui C. T. Ionescu Tulcea au fost ulterior reluate de N. Dinculeanu [8] la măsuri cvasiregulate.

4) $[a, b] \subset Z$ reprezintă mulţimea întregilor $a, a+1, \ldots, b$ $(a < b)$.

5) $\mathcal{K}$ reprezintă corpul borelian ataşat lui Ω, iar $\mathcal{K}^{(l)}$ corpul borelian corespunzător lui $\Omega^{(l)}$; notaţii analoage pentru proiecţii.

Evident, lanţurile cu legături complete în sens larg [6]) conţin lanţurile cu legături complete în sensul definiţiei de la punctul **1**. Se poate arăta (de exemplu, A. Blanc Lapierre, R. Fortet [2]) că un lanţ cu legături complete se poate reduce la un lanţ Markov simplu cu o mulţime convenabilă de stări; această reducere nu prezintă însă interes practic deoarece conduce la o mulţime de stări mult prea complicată şi greu de manipulat. Se impune deci concluzia de a studia direct aceste lanţuri; fiind însă extrem de generale şi putînd cuprinde evoluţii de aproape orice natură, vom introduce o serie de familii speciale de lanţuri care conduc la dezvoltări teoretice relativ nu prea complicate.

Aceste familii de lanţuri cu legături complete sînt aşa-numitele lanţuri de tip (A), (B) şi (G). Vom spune că un lanţ cu legături complete este de *tip* (A), dacă există h, $0 < h < 1$ şi un număr M, $0 < M < \infty$ astfel încît

$$|P(c';\omega) - P(c'';\omega)| \leqslant M \rho_h(c', c'')$$

pentru orice $c', c'' \in W$ şi $\omega \in \Omega$, unde

$$\rho_h(c', c'') = \sum_{j \in -N} \theta_j h^j,$$

$$c' \doteq (\ldots, \omega'_{-1}, \omega'_0), \quad c'' = (\ldots, \omega''_{-1}, \omega''_0),$$

iar θ_j este egal cu 1 sau 0, după cum ω'_{-j} diferă sau nu de ω''_{-j}.

Un lanţ cu legături complete este de *tip* (B), dacă pentru orice $c, c' \in W$, $\omega \in \Omega$, $\omega^{(s)} = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \Omega^{(s)}$ are loc relaţia

$$P(u(c;\omega^{(s)})) = P(u(c';\omega^{(s)}))\,(1 + \theta\, \varepsilon_s),$$

unde $\theta = \theta(c, c'; \omega, s)$, $|\theta| < 1$ şi

$$\varepsilon_s > 0, \quad \sum_{s \in N^*} \varepsilon_s < \infty,$$

iar

$$u(\cdot\,;\omega^{(s)}) = u(\cdot\,;\omega_1) \circ \ldots \circ u(\cdot\,;\omega_s).$$

Lanţurile de tip (A) şi (B) au fost introduse de W. Doeblin şi R. Fortet [10], care au dat şi primele teoreme ergodice corespunzătoare acestor familii.

O altă familie importantă de lanţuri cu legături complete este formată de lanţurile de tip (G), introduse de G. Ciucu [6, 7] în vederea demonstrării teoremei limită centrale. Anume, un lanţ cu legături complete este de *tip* (G), dacă există o funcţie $P_{1,l}^{\infty}$, definită pentru orice $A^{(l)} \subset \Omega^{(l)}$ $(l \in N^*)$ şi două constante L şi $\lambda > 0$, astfel încît

$$|P_{1,l}^{(n)}(c; A^{(l)}) - P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)})| \leqslant L e^{-\lambda\sqrt{n}}$$

pentru orice $n \in N^*$, şi $c \in W$.

---

6) În cele ce urmează vom renunţa la expresia „în sens larg", fiind vorba numai de aceste lanţuri.

8. Teoreme ergodice uniforme

Fie E un spaţiu liniar peste corpul numerelor complexe şi B o parte liniară a lui E. Vom presupune că E este un spaţiu Banach în raport cu norma $\|\cdot\|$ şi B un spaţiu Banach în raport cu norma $\|\cdot\|_1$ şi în plus

(I) $\varphi_n \in B$, $\|\varphi_n\|_1 \leqslant H$, $n \in N^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n - \varphi\| = 0$, implică $\varphi \in B$ şi $\|\varphi\|_1 \leqslant H$, unde H este o constantă.

Vom nota acum cu $C(B, E)$ clasa operatorilor $U: B \to B$ care sînt liniari şi mărginiţi ($\|U\|_1 < \infty$), verificînd condiţiile:

(II) există o constantă pozitivă K astfel încît $\|U^n\| \leqslant K$, $n \in N^*$;

(III) există două constante pozitive R şi r, $0 < r < 1$ astfel încît $\|U_\varphi\|_1 \leqslant r\|\varphi\|_1 + R\|\varphi\|$ pentru orice $\varphi \in B$;

(IV) pentru orice parte $A \subset B$ mărginită în B, $U(B)$ este compactă în E.

Cu aceste definiţii şi notaţii, C. T. Ionescu Tulcea şi G. Marinescu [19] au demonstrat că dacă $U \in C(B, E)$, atunci nu există decît un număr finit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de valori proprii de modul 1 ale lui U şi

$$U^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^n} U_i + V^n,$$

unde U_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ sînt operatori liniari şi mărginiţi definiţi pe B şi cu valori într-o parte liniară a lui B de dimensiune finită şi V un operator liniar şi mărginit, definit pe B şi cu valori tot în B şi

$$U_i^2 = U_i,\quad U_iU_j = 0 \ (i \neq j),\quad U_iV = VU_i = 0,$$

$$\|V^n\|_1 \leqslant \frac{M}{(1+h)^n},\quad n \in N^*,$$

unde M şi h sînt două constante pozitive convenabil alese.

Să amintim acum cîteva exemple de astfel de operatori. Fie deci W un spaţiu metric compact de distanţă ρ şi $C(W)$ spaţiul funcţiilor continue, reale sau complexe, definite pe W. Să considerăm, de asemenea, şi spaţiul $CL(W)$ al funcţiilor reale sau complexe, definite pe W, pentru care

$$m(\varphi) = \sup_{\substack{c', c'' \in W \\ c' \neq c''}} \frac{|\varphi(c') - \varphi(c'')|}{\rho(c', c'')} < \infty.$$

Evident, $C(W)$ şi $CL(W)$ sînt spaţii Banach respectiv în raport cu normele

$$\|\varphi\| = \sup_{c \in W} \varphi(c),\quad \|\varphi\|_1 = m(\varphi) + \|\varphi\|$$

şi

$$CL(W) \subset C(W),$$

după cum rezultă din G. Marinescu [24, 25]. Mai mult, condiţiile (I), (IV), formulate mai sus, sînt verificate pentru $E = C(W)$ şi $B = CL(W)$.

Fie acum Ω o mulţime arbitrară, W un spaţiu metric compact, $\mathcal{X}$ un corp borelian de părţi ale lui Ω şi $P(\cdot\,;\cdot)$ o funcţie, eventual complexă, definită pe $W \times \mathcal{X}$, cu proprietăţile:

(i) variaţia totală a lui $P(c\,;A)$ pe Ω este cel mult 1 pentru orice $c \in W$ fix;

(ii) $P(c\,;\cdot)$ este o funcţie complet aditivă pe $\mathcal{X}$, pentru orice $c \in W$ fix;

(iii) $|P(c';A) - P(c'';A)| \leqslant H\rho(c', c'')$, unde H este o constantă şi ρ distanţa asociată a lui W.

Să considerăm pentru orice $\omega \in \Omega$ o aplicaţie $u(\cdot\,;\omega) : W \to W$ cu proprietăţile:

(j) $\rho(u(c';\omega), u(c'',\omega)) \leqslant r\rho(c', c'')$, unde r, $0 < r < 1$ este o constantă care nu depinde de c', $c'' \in W$;

(jj) $\{\omega \mid u(c;\omega) \in B\} \in \mathcal{X}$ pentru orice $c \in W$ şi orice parte boreliană $B \subset W$.

Cum pentru orice $\varphi \in C(W)$ şi $c \in W$ fix, $\varphi(u(c;\omega))$ este o funcţie $\mathcal{X}$-măsurabilă de ω, putem defini operatorul U pe $C(W)$ prin egalitatea

$$U\varphi(c) = \int_{\Omega} P(c\,; d\omega)\varphi(u(c\,;\omega)), \tag{7}$$

care pentru o mulţime cel mult numerabilă Ω se reduce la

$$U\varphi(c) = \sum_{\omega \in \Omega} P(c\,;\omega)\varphi(u(c\,;\omega)), \tag{8}$$

relaţie care, evident, conţine ca un caz particular relaţia funcţională (2), dată de O. Onicescu şi G. Mihoc [34, 35], cît şi relaţia (6).

C. T. Ionescu Tulcea şi G. Marinescu [19] au arătat că $\|U^n\| = 1$, $n \in N^*$, iar restricţia operatorului U la $CL(W)$ aparţine clasei $C(B, E)$, unde $B = CL(W)$ şi $E = C(W)$. În cazul densităţilor, adică atunci cînd

$$P(c\,;A) = \int_A \psi(c\,;\omega)\, dP(\omega),$$

ceea ce revine la considerarea unui operator de forma

$$U\varphi(c) = \int_{\Omega} \psi(c\,;\omega)\varphi(u(c\,;\omega))\, dP(\omega),$$

o teoremă analoagă a fost dată de G. Ciucu [5].

Operatori particulari de forma (8) au fost studiaţi şi de R. Fortet [12] în legătură cu anumite probleme de repartiţie a valorilor unei funcţii, cît şi de S. Karlin [21] şi M. Kennedy [22] în legătură cu mersul aleator.

9. Lanţuri de tip (A)

W. Doeblin şi R. Fortet [10] au dat prima teoremă ergodică relativ la lanţurile de tip (A), folosind proprietăţile unui operator particular de forma (8). Problema a fost reluată de C. T. Ionescu Tulcea şi G. M a r i n e s c u [18] într-o formă generală. Într-adevăr, să presupunem că funcţia $P(c\,;A)$, introdusă la punctul 8, este reală şi $P(c\,;\Omega)=1$ pentru orice $c\in W$ fix; în acest caz se poate arăta că 1 este o valoare proprie a operatorului U, dat de (7).

Să aplicăm acum aceste rezultate la cazul în care Ω este un spaţiu metric compact şi W este spaţiul de drumuri Ω^{-N}, introdus la punctul 7, iar

$$\rho(c', c'') = \sum_{j\in N} h^j \rho_1(\omega'_{-j}, \omega''_{-j}),$$

unde ρ_1 este distanţa ataşată lui Ω şi $0<h<1$. Drept funcţie u vom lua aplicaţia introdusă tot la punctul 7, care evident verifică condiţiile (j), (jj) de la punctul 8, iar funcţia $P(c\,;A)$ o vom interpreta ca probabilitatea ca un sistem aleator după ce a parcurs drumul c să se găsească după un pas într-o stare din mulţimea $A\in\mathcal{X}$, unde $\mathcal{X}$ este corpul părţilor boreliene din Ω.

Putem atunci cu ajutorul operatorului U să definim funcţiile $P^{(n)}(c;A)$, unde

$$P^{(1)}(c\,;A) = P(c\,;A),$$

$$P^{(n)}(c\,;A) = U^{n-1}P^{(1)}(c\,;A)),\quad n>1,$$

care poate fi interpretată ca probabilitatea ca un sistem aleator să se găsească într-o stare din $A\in\mathcal{X}$ după n paşi după ce parcursese drumul $c\in W$.

Vom aminti următoarele două rezultate, date de C. T. I o n e s c u T u l c e a şi G. M a r i n e s c u [18]:

(I) Dacă $\lambda_1=1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sînt valorile proprii de modul 1 ale operatorului U, atunci pentru orice $n\in N^*$

$$P^{(n)}(c\,;A) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^n} P_i(c\,;A) + \tilde{P}^{(n)}(c\,;A)$$

şi

$$\sup_{A\in\mathcal{X}} \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j P^{(j)}(c\,;A) - P_i(c\,;A) \right\|_1 \leqslant \frac{M}{n},$$

$$\sup_{A\in\mathcal{X}} \left\| \tilde{P}^{(n)}(c\,;A) \right\|_1 \leqslant \frac{M}{(1+h)^n},$$

unde M şi h sînt două constante pozitive, convenabil alese.

(II) Dacă există un punct $\omega'\in\Omega$ şi un număr $\eta>0$ astfel încît $P(c;A)\geqslant\eta$ pentru orice $c\in W$, dacă $\omega'\in A$, atunci

1) operatorul U nu admite decît pe $\lambda_1=1$ ca valoare proprie de modul 1;

2) $P_1(c\,;A)=P_1(A)$ nu depinde de $c\in W$;

3) pentru orice $n\in N^*$

$$\sup_{A\in\mathcal{X}} \left\| P^{(n)}c\,;A) - P_1(A) \right\|_1 \leqslant \frac{M}{(1+h)^n},$$

unde M şi h sînt două constante pozitive, convenabil alese.

Teoremele amintite conţin ca un caz particular teoremele lui W. D o e b l i n şi R. F o r t e t [10], care se deduc cînd Ω se reduce la o mulţime finită şi

$$\rho_1(\omega', \omega'') = \begin{cases} \theta>0 & \text{dacă } \omega'\neq\omega'', \\ 0 & \text{dacă } \omega=\omega'', \end{cases}$$

unde $\omega', \omega''\in\Omega$. Ţinînd seamă de această observaţie, este natural ca lanţurile cu legături complete considerate de C. T. I o n e s c u T u l c e a şi G. M a r i n e s c u [18] să constituie generalizarea directă a lanţurilor de tip (A).

Ulterior, aceste rezultate au fost extinse de C. T. I o n e s c u T u l c e a [16], care a dat o teoremă ergodică mai puternică şi apoi de G. C i u c u [5] pentru lanţuri de tip (A) cu densităţi.

10. Lanţuri de tip (B)

Prima teoremă ergodică cu privire la lanţurile de tip (B) a fost dată de W. D o e b l i n şi R. F o r t e t [10]. Sub forma generală cînd Ω este o mulţime generală, ea a fost reluată de G. C i u c u [4, 7]. Pentru aceasta, să amintim următoarea condiţie: un lanţ cu legături complete definit de probabilităţile de trecere $P(c\,;\omega)$ satisface *condiţia* (k), dacă există un număr $\alpha>0$ pentru care

$$P(c\,;\omega) \geqslant \alpha P(c'\,;\omega)$$

pentru orice $c, c'\in W$ şi $\omega\in\Omega$.

Ţinînd seama de acestă condiţie, G. C i u c u [4, 7] a arătat că dacă un lanţ cu legături complete de tip (B) cu probabilităţile de trecere $P(c\,;\omega)$ satisface condiţia (k), atunci există un şir descrescător $(\eta(n))_{n\in N^*}$ convergent către zero şi o funcţie $P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)})$, definită pentru orice parte $A^{(l)}\subset\Omega^{(l)}$ $(l\in N^*)$ care verifică inegalităţile

$$|P_{1,l}^{(n)}(c;A^{(l)}) - P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)})| \leqslant \eta(n)$$

pentru orice $n\in N^*$, $c\in W$, $A^{(l)}\subset\Omega^{(l)}$ $(l\in N^*)$.

Acest rezultat a fost reluat apoi tot de G. C i u c u [7] pentru lanţuri de tip (B) cu densităţi.

Ceea ce este interesant de observat, este faptul că la o alegere convenabilă a constantelor care intervin în definiţia lanţului de tip (B), un lanţ de tip (B), în condiţiile teoremei de mai sus, este întotdeauna un lanţ de tip (G), reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Aplicaţii interesante şi de altfel primul exemplu efectiv de lanţ de tip (B) a fost dat de W. D o e b l i n [9] în legătură cu unele probleme relative la fracţiile continue şi la formula lui Gauss.

11. Teoreme ergodice generale

În cele ce urmează vom aminti o teoremă ergodică generală, dată recent de C. T. Ionescu Tulcea [17]. Fie $\mathcal{P}(W)$ mulţimea părţilor unei mulţimi W şi pentru orice $\alpha \in R$, să punem

$$\alpha^{+} = \sup(\alpha, 1).$$

Să considerăm două mulţimi W şi Ω şi $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(W)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ două corpuri boreliene; pentru orice $\omega \in \Omega$ să considerăm o aplicaţie $u(\cdot\,;\omega): W \to W$ şi să punem pentru $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^{(n)}$, $u(\cdot\,;\omega^{(n)}) = u(\cdot\,;\omega_1) \circ \ldots \circ u(\cdot\,;\omega_n)$. De asemenea, să presupunem că

$$\{(c, \omega^{(n)}) \mid u(c\,;\omega^{(n)}) \in A\} \in \mathcal{W} \times \mathcal{K}^{(n)\,7)},$$

pentru orice $n \in N^*$ şi $A \in \mathcal{W}$, unde $\mathcal{K}^{(n)}$ este corpul borelian corespunzător produsului $\Omega^{(n)}$.

Fie acum $B(W)$ spaţiul Banach al funcţiilor definite pe W, reale, mărginite şi $\mathcal{W}$-măsurabile cu norma obişnuită $\|\varphi\| = \sup\limits_{c \in W} |\varphi(c)|$. Pentru orice şir $S = (a_n)_{n \in N^*}$ de numere pozitive, fie $B_s(W)$ acea parte a lui $B(W)$ formată din funcţiile φ pentru care

$$|\varphi(u(c'\,;\omega^{(n)}) - \varphi(u(c''\,;\omega^{(n)}))| \leqslant a_n,$$

pentru orice $n \in N^*$, $\omega^{(n)} \in \Omega^{(n)}$ şi $c', c'' \in W$.

Ţinînd seamă de aceste definiţii şi notaţii, să introducem o funcţie $P(\cdot\,;\cdot)$, definită pe $W \times \mathcal{K}$, cu următoarele proprietăţi:

(k) $0 \leqslant P(c\,;A) \leqslant P(c\,;\Omega) = 1$, $(c, A)\ W \times \mathcal{K}$;

(kk) $P(c\,;\cdot)$ este o măsură complet aditivă pe $\mathcal{K}$ pentru orice $c \in W$;

(kkk) $P(\cdot\,;A) \in B_S(W)$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$, unde şirul S considerat verifică condiţia

$$\sum_{n \in N^*} a_n < \infty.$$

Pentru fiecare $l \in N^*$, fie $P_{1,l}$, funcţia definită pe $W \times \mathcal{K}^{(l)}$ de relaţia $P_{1,l} = P$, $l = 1$,

$$P_{1,l}(c\,;A^{(l)}) = \int_\Omega P(c\,;d\omega_1) \int_\Omega \ldots \int_\Omega P(u(c\,;\omega_1, \ldots, \omega_{-1}); d\omega_l)\, \varphi_{A^{(l)}}(\omega_1, \ldots, \omega_l), \quad l > 1,$$

unde $\varphi_{A^{(l)}}$ este funcţia caracteristică a mulţimii $A^{(l)}$. De asemenea, să introducem funcţia $P^{(n)}_{1,l}$, definită pe $W \times \mathcal{K}^{(l)}$ astfel

---

7) Aici $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ reprezintă corpul borelian produs, generat de mulţimi de forma $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

$$P^{(n)}_{1,l}(c\,;A^{(l)}) = \begin{cases} P_{1,l}(c\,;A^{(l)}), & n = 1, \\ \int_\Omega P(c\,;d\omega)\; P^{(n-1)}_{1,l}(u(c\,;\omega)\,;A^{(l)}), & n > 1, \end{cases}$$

pentru orice $l, n \in N^*$.

Pe spaţiul $B(W)$ să definim un operator de forma (7); evident, U este un operator liniar care aplică pe $B(W)$ în el însuşi şi este de normă 1.

Are loc următorul rezultat general:

Dacă P verifică *condiţia* (k_1), adică există o probabilitate p pe $\mathcal{K}$ şi o constantă $\alpha > 0$ astfel încît

$$P(c\,;A) \geqslant \alpha\, p(A),$$

pentru orice $(c, A) \in W \times \mathcal{K}$, şi dacă $\varphi \in B_L(W)$, unde $L = (l_n)_{n \in N^*}$ verifică relaţia

$$\lim_{n \to \infty} l_n = 0,$$

atunci există o funcţie constantă $U^\infty\varphi$ şi o constantă $0 < h = h_L < 1$ care verifică inegalitatea

$$\| U^n\varphi - U^\infty\varphi \| \leqslant \|\varphi\|^{+} \inf_{1 \leqslant s \leqslant n} \left(\frac{\tilde{l}_s}{1+h} + 2h^{(n/s)-1} \right)^{8)},$$

pentru orice $n \in N^*$.

Din această teoremă rezultă imediat următorul corolar:

Pentru orice $n \in N^*$, există pe $\mathcal{K}^{(l)}$ o probabilitate $P^{\infty}_{1,l}$, astfel încît

$$|P^{(n+1)}_{1,l}(c\,;A^{(l)}) - P^{\infty}_{1,l}(A^{(l)})| \leqslant \inf_{1 \leqslant s \leqslant n} \left(6 \sum_{j \leqslant s} \frac{a_j}{1-h} + 2h^{(n/s)-1} \right).$$

Acest rezultat este extins, în aceeaşi lucrare, la familii de probabilităţi. Ceea ce este important, este faptul că condiţiile introduse la începutul acestui punct sînt atît de generale încît cuprind ca un caz particular toate teoremele ergodice date pînă în prezent.

12. Teoreme de existenţă

Să presupunem că Ω este un spaţiu metric separabil, $\mathcal{K}$ corpul părţilor boreliene ale lui Ω, W spaţiul de drumuri introdus la punctul **7**, $\mathcal{W}$ corpul borelian corespunzător, iar $u(c\,;\omega)$ funcţia considerată la punctul **11**. Pentru fiecare $(n, m) \in Z^* = \{(n, m) | n, m \in Z, n \leqslant m\}$, fie $P^{\infty}_{n,m}$ o funcţie definită pe $\mathcal{K}^{[n,m]}$ (aici $\mathcal{K}^{[n,m]}$ este identificat cu $\mathcal{K}^{(m-n+1)}$) de relaţia

$$P^{\infty}_{n,m}(A) = P^{\infty}_{1,m-n+1}(A)$$

---

8) Aici $\tilde{l}_n = 4 \sum\limits_{i \geqslant n} a_i + \sup\limits_{j \geqslant n} l_j$, $n \in N^*$.

şi pentru fiecare $(n, m) \in Z^*$ şi $r \in N^*$ să considerăm funcţia $P^{(r)}_{n,m}$, definită pe $W \times \mathcal{X}^{[n,m]}$ de relaţia

$$P^{(r)}_{n,m}(c\,;A) = P^{(r)}_{1,m+n-1}(c\,;A).$$

C. T. I o n e s c u T u l c e a [17] a demonstrat că dacă P verifică condiţia (k_1) (vezi punctul **11**), atunci există un singur proces aleator $\{\Omega^Z, \mathcal{X}^Z, P^Z\}$ astfel încît relaţia

$$P^Z(\{\mathrm{pr}^{-1}_{n+1}(A) \mid \mathrm{pr}_{[-\infty,\, n]}(\omega^Z) = c\}) = P\,(c\,;A)^{9)}$$

să fie verificată aproape peste tot pentru orice $n \in Z$ şi $A \in \mathcal{X}$. În plus, procesul aleator $\{\Omega^Z, \mathcal{X}^Z, P^Z\}$ este staţionar şi amestecat.

Dacă Ω este o mulţime finită, rezultate analoage în condiţii oarecum diferite, au fost obţinute de T. E. H a r r i s [14].

13. Legi limită. Legea normală

Problema convergenţei către legea normală a lui Gauss pentru şiruri de variabile aleatoare este foarte bine studiată atît pentru variabilele aleatoare independente cît şi pentru variabilele dependente formînd un lanţ Markov. Pentru lanţurile cu legături complete prima teoremă limită se datoreşte lui O. O n i c e s c u şi G. M i h o c [37], amintită la punctul **6**. Teoreme limită pentru diverse cazuri particulare au fost obţinute de W. D o e b l i n [9] sau R. F o r t e t [12, 13]. Ulterior, G. C i u c u [6, 7] a dat o teoremă limită pentru lanţurile de tip (G), care foloseşte în demonstraţia ei o teoremă fundamentală asupra variabilelor aleatoare dependente, dată de S. N. B e r n ş t e i n [1]. Ne vom opri în cele ce urmează asupra acestui rezultat.

Pentru orice $c \in W$, fie $\{X, \mathcal{X}, Q^c\}$ cîmpul de probabilitate introdus la punctul **7**. Fie acum un lanţ de tip (G) şi $P^{\infty}_{1,l}$ probabilitatea care intervine în definiţia sa; prin moment *asimptotic* de ordin $s \in N^*$ al variabilei aleatoare f, definită pe Ω, vom înţelege

$$\mathbf{M}_s^{\infty}(f) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)^s\, P^{\infty}(\omega),$$

unde $P^{\infty}(\omega) = P^{\infty}_{1,1}(\{\omega\})$. De asemenea, să mai considerăm expresiile $\mathbf{M}_1^{\infty}(f_1 f_h) = \sum_{\omega^{(h)} \in \Omega^{(h)}} f(\omega_1)\, f(\omega_h)\, P^{\infty}_{1,h}(\{\omega^{(h)}\})$, unde $\omega^{(h)} = (\omega_1, \ldots, \omega_h)$, iar f_n este funcţia definită pe X de relaţia

$$f_n(x) = f(\mathrm{pr}_n(x))$$

şi

$$\sigma_1^2 = \mathbf{M}_2^{\infty}(f) + \sum_{h \in N^*} \mathbf{M}_1^{\infty}(f_1 f_{h+1}),$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + (\mathbf{M}_1^{\infty}(f))^2.$$

9) Aici $\mathrm{pr}_{[-\infty,n]}$ reprezintă operatorul obişnuit de proiecţie a lui Ω^Z pe $\Omega^{[-\infty,\,n]}$, iar pr_t, proiecţia lui Ω^Z pe $\Omega^t = \Omega$.

Cu aceste definiţii şi notaţii, G. C i u c u [6, 7] a arătat că dacă $\sigma \neq 0$, pentru orice $c \in W$

$$\lim_{n \to \infty} Q^c\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n - n\,\mathbf{M}_1^{\infty}(f)}{\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-u^2/2}\, du,$$

uniform în raport cu $a \in R$.

Pentru deducerea acestui rezultat, G. C i u c u [6, 7] a dat în prealabil o serie de evaluări pentru diversele momente care intervin în demonstraţie, evaluări care prezintă un interes deosebit şi în sine.

În condiţii foarte generale, C. T. I o n e s c u T u l c e a [17] a dat o teoremă limită referitoare la procesul $\{\Omega^Z, \mathcal{X}^Z, P^Z\}$ (vezi punctul **12**).

14. Procese continue în timp. Procese generalizate

Procesele[10] cu legături complete sînt încă puţin studiate. Prima cercetare în această direcţie se datoreşte lui O. O n i c e s c u [32, 33], care a abordat studiul acestor procese sub aspectul relaţiilor diferenţiale care caracterizează procesul.

Să presupunem deci că avem o mulţime Ω formată din $m + 1$ stări, $m \geqslant 1$ şi fie $p_k(t)$ probabilitatea efectivă a stării k la momentul t, $1 \leqslant k \leqslant m + 1$. În analogie cu ecuaţiile lui A. N. K o l m o g o r o v [23] din teoria proceselor Markov, să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m+1} p_i(t)\;Q_{jk}(p_1(t), \;\ldots,\; p_m(t)\,;\;t),\; t > s, \tag{9}$$

la care se adaugă condiţia

$$p_k(s) = \delta_{ik}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m + 1. \tag{10}$$

Evident, dacă $Q_{ik}(p_1(t), \ldots, p_m(t)\,; t) \equiv Q_{jk}(t)$ sîntem în cazul unui proces Markov.

În ipoteza că funcţiile $Q_{jk}\,(p_1(t), \ldots, p_p(t); t)$ sînt suficient de regulate pentru ca existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului (9) cu condiţia (10) să fie asigurată, şi dacă

(a) $\quad Q_{jk}(p_1(t), \ldots, p_m(t)\,; t) \geqslant 0$ pentru $j \neq k$,

(b) $\quad Q_{jk}(p_1(t), \ldots, p_m(t)\,; t) \leqslant 0$ pentru $j = k$,

(c) $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} Q_{jk}\,(p_1(t), \ldots, p_m(t)\,; t) = 0,$

O. O n i c e s c u [32, 33] a demonstrat că sistemul de soluţii $(p_k\,(t))_{1 \leqslant k \leqslant m+1}$ formează un sistem complet de probabilităţi, adică

$$0 \leqslant p_k(t) \leqslant 1, \;\; 1 \leqslant k \leqslant m+1, \;\; \sum_{k=1}^{m+1} p_k\,(t) = 1.$$

10) Vom folosi termenul de proces pentru a marca o evoluţie continuă în timp.

În plus, soluţia sistemului, care poate fi scrisă $p_{ik}(s, t)$ pentru a pune în evidenţă condiţia limită, verifică ecuaţia funcţională

$$p_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{m+1} p_{ijk}(s, u)\, \pi_{ijk}(s, u, t), \qquad s \leqslant u \leqslant t,$$

unde $\pi_{ijk}(s, u, t)$ reprezintă soluţia sistemului liniar, asociat sistemului (9).

Rezultate analoage pentru procesele cu legături complete multiple au fost obţinute de R. Theodorescu [45].

Strîns legat de teoria proceselor cu legături complete este şi sistemul integro-diferenţial

$$\frac{dP(t; A)}{dt} = \int_{\Omega} P(t\,; d\omega)Q(t, \omega, A \mid P(t\,; \cdot\,)), s < t, \tag{11}$$

$$P(s\,; A) = \delta(x, A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \bar{\in} A, \end{cases} \tag{12}$$

unde $P(\cdot\,;\cdot\,)$ este o funcţie definită pe $T \times \mathcal{K}$, T fiind un interval şi $\mathcal{K}$ corpul borelian corespunzător unui cîmp de probabilitate dat, iar $Q(t, \omega, A \mid P(t\,;\cdot\,))$ o funcţională în raport cu P pentru t fix. R. Theodorescu [46, 47] a arătat că în anumite condiţii de regularitate impuse funcţiei $Q(t, \omega, A \mid P(t\,;\cdot\,))$ şi în ipoteza că

$$|Q(t, \omega, A \mid P(t\,;\cdot\,))| \leqslant M,$$

$$\left|\int_{\Omega} P'(u\,; d\omega)Q(u, \omega, A \mid P'(u\,;\cdot\,)) - \int_{\Omega} P''(u\,; d\omega)Q(u, \omega, A \mid P''(u\,;\cdot\,))\right| \leqslant$$

$$\leqslant L \,\| P'(u\,;\cdot\,) - P''(u\,;\cdot\,) \|^{11)}$$

pentru orice $P'(u\,;\cdot\,)$ şi $P''(u\,;\cdot\,)$, există o soluţie unică a ecuaţiei (11) cu condiţia (12), care reprezintă o probabilitate.

O teoremă ergodică pentru procese cu o mulţime arbitrară de stări a fost dată tot de R. Theodorescu [48] pentru aşa-numitele procese de tip (B').

În sfîrşit, problema extinderii proceselor cu legături complete în sensul teoriei distribuţiilor, a fost atacată de G. Marinescu[12]), care a scris sistemul de ecuaţii corespunzător în diferenţiale Gateaux.

---

[11]) Norma este înţeleasă în sensul $\|\varphi\| = \sup_{A \subset \Omega} \varphi(A)$.

[12]) Comunicare făcută la cea de a doua Conferinţă de teoria informaţiei, funcţii de decizie statistică, procese aleatoare, Praga, 1959.

О ЦЕПЯХ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Понятие цепи с полными связями введено в теорию вероятностей О. Онически и Г. Михоком в их работе [34]. Это понятие берет свое происхождение в стремлении авторов найти наиболее общую зависимости между различными случайными величинами. Это понятие было немедленно обобщено В. Дёблином и Р. Форте. Однако систематическое изучение этих цепей принадлежит румынским авторам.

Настоящая статья содержит обзор этого нового, но уже сложившегося раздела теории случайных процессов, причем автор останавливается только на центральных результатах этой теории.

SUR LES CHAÎNES À LIAISONS COMPLÈTES

RÉSUMÉ

La notion de chaîne à liaisons complètes a été introduite dans la théorie des probabilités par O. Onicescu et G. Mihoc dans leur travail [34]. L'origine de cette notion a été la préoccupation des auteurs de trouver la forme de dépendence la plus générale entre les diverses variables aléatoires. Cette notion a été généralisée immédiatement par W. Doeblin et R. Fortet. Mais l'étude systématique de ces chaînes apartient surtout aux probabilistes roumains.

Dans cet article l'auteur présente ce nouveau et bien contouré chapitre de la théorie des processus aléatoires, en insistant seulement sur les résultats centrales de cette théorie.

BIBLIOGRAFIE

1. С. Н. Бернштейн, *Распространение предельной теоремы теории веорятностей на суммы зависимых величин.* Усп. мат. наук, **10**, 65—114, (1944).
2. A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires.* Paris, 1953.
3. R. Bush, F. Mosteller, *Stochastic Models for Learning.* New-York, 1955.
4. G. Ciucu, *Lanţuri cu legături complete de tipul (B).* Com. Acad. R. P. R., **1**, 455–460 (1951).
5. — *Lanţuri cu legături complete cu densitate.* Com. Acad. R. P. R., **4**, 345–349 (1954).
6. — *Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes.* Rend. dell' Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat. (8) **22**, 1–2, 11–15 (1957).
7. — *Proprietăţi ergodice ale unor lanţuri cu legături complete.* Studii şi cercet. matematice, **8**, 413–446 (1957).
8. N. Dinculeanu, *Remarques sur les mesures dans les espaces produits.* Coll. Math., **5**, 51–54 (1957).

9. W. Doeblin, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*. Comp. Math., **7**, 353–371 (1940).

10. W. Doeblin, R. Fortet, *Sur les chaînes à liaisons complètes*. Bull. Soc. Math. France, **65**, 132–148 (1937).

11. R. Fortet, *Sur l'itération de substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne*. Rev. Ci. Lima, **40**, 185–261, 337–447, 481–528 (1938).

12. — *Sur une suite également répartie*. Stud. Math., **9**, 54–70 (1940);

13. — *Sur une suite également répartie*. Rev. Sci., *5–6*, 299 (1940).

14. T. E. Harris, *On Chains of Infinite Order*. Pacific J. Math., **5**, 707–724 (1955).

15. C. T. Ionescu Tulcea, *Mesures dans les espaces produits*. Rend. dell' Accad. dei Lincei, Cl. sci. fis. mat. nat., (8), **7**, 5, 208–211 (1949).

16. — *O teoremă ergodică*. Com Acad. R. P. R., **1**, 23–27 (1951).

17. — *On a Class of Operators Occuring in the Theory of Chains of Infinite Order*. Canad. J. Math., **11**, 112–121 (1959).

18. C. T. Ionescu Tulcea, G. Marinescu, *Sur certaines chaînes à liaisons complètes*. C. R. Acad. Sci. Paris, **227**, 667–669 (1948).

19. — *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*. Ann. Math., **52**, 140–147.

20. M. Iosifescu, *Asupra comportării asimptotice a lanțurilor cu legături complete*. Com. Acad. R.P.R. (sub tipar).

21. S. Karlin, *Some Random Walks Arising in Learning Models. I*. Pacific J. Math., **3**, 725–756 (1953).

22. M. Kennedy, *A Convergense Theorem for a Certain Class of Markoff Processes*. Pacific J. Math., **7**, 1107–1124 (1957).

23. A. H. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей*. Усп мат. наук, 5, 5–41, (1938).

24. G. Marinescu, *Operații relativ complet continue*. Studii și cercet. matematice, **2**, 107–188 (1950).

25. — *Spații vectoriale normate*. Ed. Acad. R. P. R., București, 1956.

26. G. Mihoc, *Tratat de matematici actuariale*. București, 1943.

27. O. Onicescu, *Les applications de l'idée de chaîne statistique*. XXIII-e Session de l'Institut International de Statistique, Athénes, 3–9 (1936).

28. — *La dépendance statistique, la notion de chaîne et ses applications*. Rev. Inst. Intern. Statistique, **3**, 1–6 (1936).

29. — *Sur la notion de chaîne et l'idée de loi naturelle*. Mathematica, **13**, 66–71 (1937).

30. — *Aperçu d'une théorie générale des chaînes à liaisons complètes*. Act. Sci. Ind. *838*, IV-e partie, III-e section, Paris, 1938, 29–41.

31. — *Chaînes statistiques et déterminisme*. Rev. Univ. Bruxelles, **1**, 45–59 (1938).

32. — *Procese aleatoare în lanț cu legături complete*. Rev. Univ. C. I. Parhon și a Politehn. București, Seria șt. nat., *4–5*, 73–85 (1954).

33. — *Calculul probabilităților*. Ed. tehnică, București, 1956.

34. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes statistiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511–512 (1935).

35. — *Sur les chaînes de variables statistiques*. Bull. Sci. Math., **59**, 174–192 (1935).

36. — *Sopra le leggi-limite delle probabilità*. Giornale dell Instit. Ital. degli Attuari, **7**, 3–18 (1936).

37. — *Sur les chaînes statistiques*. C. R. Acad. Sci., Paris, **202**, 2031–2033, (1936).

38. — *Sur une généralisation de l'urne de Bernoulli*. Bull. Math. Phys. pures et appl. de l'École Polytechn. de Bucarest, **8**, 61–77 (1936–1937); **9**, 57–75 (1937–1938).

39. — *La dependance statistique. Chaînes et familles de chaînes discontinues*. Act. Sci. Ind. *503*, VII, Paris 1937.

40. — *Comportament asymptotique des chaînes à liaisons complètes*. Disq. Math. et Phys. **1**, 61–62 (1940).

41. — *Les chaînes de variables aléatoires. Problèmes asymptotiques*. Acad. Roumaine, Études et recherches, **14**, București, 1943.

42. O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu Tulcea, *Calculul probabilităților și aplicații*. Ed. Acad. R. P. R., București, 1956.

43. G. Pólya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités*. Ann. Inst. H. Poincaré, **1**, 117–161 (1930).

44. N. Praporgescu, *Asupra probabilităților înlănțuite*. Studii și cercetări matematice, **9**, 439–480 (1958).

45. R. Theodorescu, *Lanțuri cu legături complete de multiplicitate p*. Com. Acad. R. P. R., **6**, 253–257 (1956).

46. — *Asupra unei ecuații întîlnite în studiul proceselor stochastice*. Analele Univ. C. I. Parhon, Seria șt. nat., nr. *11*, 39–40 (1956).

47. — *Stochastische kontinuierlische Prozesse mit volkommenen Verbindungen*. Math. Nachr., **16**, *2*, 79–84 (1957).

48. — *Sur certains processus à liaisons complètes*. Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat., (8), **24**, *3*, 260–262 (1958).

49. — *Nouvelle interpretation de certains modèles stochastiques pour apprendre*. Rend. dell' Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat., (8), **28**, *2*, 153–155 (1960).

Primit la 14. II. 1960