MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

MATHEMATICA, Tome 20 (43), N° 1, 1978, pp. 45–51

UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON

par

ION PĂVĂLOIU

(Cluj-Napoca)

Dans ce travail on étudiera une méthode de type Newton pour la résolution des équations opérationnelles. Pour la construction de cette méthode il est nécessaire de considérer la formule de Taylor generalisée pour les applications de deux variable.

Soient X et Y deux espaces linéaires normés. Nous désignons par $X^2 = X \times X$ le produit cartesien de X par lui-même et considérons un ensemble ouvert $U \subseteq X^2$. Supposons que les éléments (x_0, y_0) et $(x_0 + h, y_0 + k)$ appartienent à l'ensemble U, où $(h, k) \in X^2$. Soit $f: U \to Y$ une application définie sur U et à valeurs en Y.

THEOREME 1. *Si l'application $f: U \to Y$ admet des dérivées partielles continues, au sens de Fréchet, jusqu'a l'ordre 2 inclusivement, pour chaque élément $(x, y) \in U$, alors on a l'inegalité suivante:*

$$(1) \quad \|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 \leq \mu \leq 1}} \|f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)\| \cdot \|h\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sup_{\substack{0 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq \mu \leq 1}} \|f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)\| \cdot \|k\|^2 +$$

$$+ \sup_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 \leq \mu \leq 1}} \|f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|,$$

ou par $f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ nous avons désigné les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de l'application f par rapport aux variables specifiees.

Démonstration. Nous donnerons une démonstration analogue à celle donnée dans le travail [1] pour la formule de Taylor relative aux applications d'une seule variable.

Nous désignons par y l'expression

$$y = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k. \tag{2}$$

Soit $T: Y \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle linéaire et continue définie sur Y et à valeurs en $\mathbf{R}$, qui possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &\|T\| = 1; \\ &Ty = \|y\|. \end{aligned} \tag{3}$$

(L'existence d'une telle fonctionnelle est assurée par le théorème de Hahn-Banach).

Maintenant nous considérons la fonction $\varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par l'égalité suivante:

$$\varphi(\alpha, \beta) = T(f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)). \tag{4}$$

Pour les dérivées partielles de la fonction φ nous avons les formules suivantes:

$$\begin{aligned} &\varphi'_\alpha(\alpha, \beta) = T[f'_x(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)h]; \\ &\varphi'_\beta(\alpha, \beta) = T[f'_y(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)k]; \\ &\varphi''_{\alpha^2}(\alpha, \beta) = T[f''_{x^2}(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)h^2]; \\ &\varphi''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = T[f''_{xy}(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)hk]; \\ &\varphi''_{\beta^2}(\alpha, \beta) = T[f''_{y^2}(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)k^2]. \end{aligned} \tag{5}$$

Les valeurs de la fonction φ et de ces dérivées partielles du premier ordre au point $(0, 0)$ sont données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} &\varphi(0, 0) = T[f(x_0, y_0)]; \\ &\varphi'_\alpha(0, 0) = T[f'_x(x_0, y_0)h]; \\ &\varphi'_\beta(0, 0) = T[f'_y(x_0, y_0)k]. \end{aligned} \tag{6}$$

Pour la fonction φ on a:

$$\begin{aligned} &\varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) - \varphi'_\alpha(0, 0) - \varphi'_\beta(0, 0) = \\ &= \frac{1}{2}\,[\varphi''_{\alpha^2}(\theta, \mu) + 2\varphi''_{\alpha\beta}(\theta, \mu) + \varphi''_{\beta^2}(\theta, \mu)], \end{aligned} \tag{7}$$

où $0 \leqq \theta \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$.

En tenant compte des formules (2) — (7) on a:

$$\begin{aligned} \|y\| &= Ty = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) - \varphi'_\alpha(0, 0) - \varphi'_\beta(0, 0) = \\ &= \frac{1}{2}\, T[f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)h^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)hk + \\ &\quad + f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)k^2] \leqq \\ &\leqq \frac{1}{2}\,\|T\|\,[\sup \|f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)\| \cdot \|h\|^2 + \\ &\quad + 2 \sup \|f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k)\| \cdot \|h\| \cdot \|k\| + \\ &\quad + \sup \|f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \mu k))\| \cdot \|k\|^2], \end{aligned} \tag{8}$$

où $0 \leqq \theta \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$.

De (2), (3) et (8) il résulte l'inégalité de l'énoncé du théorème.

Dans ce qui suit nous considérons l'équation suivante

$$G(x) = \theta, \tag{9}$$

où $G: X \to Y$ et θ est l'élément neutre de l'espace Y.

Nous supposons que X est un espace de Banach. Nous désignons par $F: X^2 \to Y$ une application et nous supposons que la restriction de l'application F sur l'ensemble D coincide avec G, où $D = \{(x, y) \in X^2 : x = y\}$.

Soit $(x_n, x_{n-1}) \in X^2$ un élément quelconque de l'espace X^2. Nous supposons que l'application F admet des dérivées partielles au sens de Fréchet au point $(x_n, x_{n-1}) \in X^2$ et nous considérons l'équation linéaire

$$F(x_n, x_{n-1}) + F'_x(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) + F'_y(x_n, x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = \theta, \tag{10}$$

où l'élément inconnu est x_{n+1}.

Si nous supposons que l'application $F'_x(x_n, x_{n-1}) \in L(X, Y)$ est inversable (par $L(X, Y)$ nous désignons l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur X et à valeurs dans Y), alors la solution x_{n+1} de l'équation (10) a la représentation suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n[F(x_n, x_{n-1}) + F'_y(x_n, x_{n-1})(x_n - x_{n-1})], \tag{11}$$

où

$$\Gamma_n = [F'_x(x_n, x_{n-1})]^{-1}.$$

En utilisant la méthode (11) pour chaque $n = 0, 1, \ldots.,$ nous obtenons une suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ d'approximations pour la solution de l'équation (9).

En effet, si la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergent, et si $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, alors il est évident que $F(\bar{x}, \bar{x}) = G(\bar{x}) = \theta$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ vérifie l'équation (9).

Pour étudier la convergence de la méthode proposée, nous considérons le système d'inégalités suivant :

(12) $$\delta_{n+1} \leqq a\delta_n^2 + b\cdot\delta_n\cdot\delta_{n-1} + c\cdot\delta_{n-1}^2 + d\cdot\delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

où $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0,\ \delta_0 \geqq 0$ et $\delta_1 \geqq 0$.

Relativement au système (12) nous démontrerons le théorème suivant :

THEOREME 2. *Si les éléments de la suite $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$ et les nombres réel u, b, c et d remplissent les conditions suivantes :*

(i) $\delta_n \geqq 0$ *pour chaque* $n = 0, 1, \ldots$;

(ii) *les éléments de la suite* $(\delta_n)_{n=\infty}^{\infty}$ *vérifient les inégalités* (12) ;

(iii) $\delta_0 = k$, $d_1 = kt_1$ *où* $k > 0$ *est une constante indépendente de* n, *et* t_1 *est la solution positive de l'équation*

(13) $$(ak-1)t^2 + (d+bk)t + ck = 0 ;$$

(iv) *les constantes a, b, c, d et k satisfont a l'inégalité suivante :*

$$k(a+b+c)+d<1,$$

alors :

(j) *les éléments de la suite* $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$ *satisfont aux inégalités* $\delta_n \leqq kt_1^n$, $n = 0, 1, \ldots$;

(jj) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$;

(jjj) *la série* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i$ *est convergente.*

Démonstration. De (iv) on déduit que l'équation (13) a une racine t_1, $0 \leqq t_1 < 1$. Soit $\varphi(t) = (ak-1)t^2 + (d+bk)t + ck$, alors on a $\varphi(0) \geqq 0$ et $\varphi(1) < 0$ c'est-à-dire l'équation considérée admet une racine t_1 que vérifie l'inégalité $0 \leqq t_1 < 1$.

Pour démontrer la propriété (j) nous procederons par induction.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ les inégalités de la propriété (j) sont vérifiées par hypothèse. Supposons que la propriété (j) a lieu pour $n = 2, 3, \ldots, s$ et montrons qu'elle a lieu pour $n = s + 1$. En effet, de $0 \leqq t_1 < 1$ il résulte les inégalités suivantes :

(14) $$\delta_i \leqq kt_1 \leqq k, \quad i = 2, 3, \ldots, s.$$

Nous écrirons maintenant les inégalités (12) sous la forme suivante :

(15) $$\delta_{n+1} \leqq (a\delta_n + d)\delta_n + (b\delta_n + c\delta_{n-1})\delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ou

(16) $$\delta_{n+1} \leqq u_n\delta_n + v_n\delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

où $$u_n = a\delta_n + d \text{ et } v_n = b\delta_n + c\delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

De (14), en tenant compte de u_n et v_n on déduit

$$u_n \leqq akt_1 + d \text{ et } v_n \leqq bkt_1 + ck, \quad n = 2, 3, \ldots, s.$$

De (16), en tenant compte des inégalités ci-dessus, on déduit

$$\delta_{s+1} \leqq (akt_1 + d)kt_1^s + (bkt_1 + ck)kt_1^{s-1} =$$
$$= kt_1^{s-1}(akt_1^2 + (bk+d)t_1 + ck) = kt_1^{s+1},$$

c'est-à-dire $\delta_{s+1} \leqq kt_1^{s+1}$, d'où il résulte les propriétés (jj) et (jjj).

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3. *Si l'application F, les éléments intiaux $x_0, x_1 \in X$ et le nombre réel $r > 0$ jouissent des propriétés suivantes :*

(i) *l'application F est dérivable au sens de Fréchet, jusqu'a l'ordre 2 inclusivement, par rapport a x et y dans chaque point de l'ensemble* $S = \operatorname{Int}(\bar{S})$

où $$\bar{S} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqq r\} ;$$

(ii) *pour chaque point* $(x, y) \in S \times S$, *l'application* $F'_x(x, y)$ *est inversable et l'operateur* $[F'_x(x, y)]^{-1}$ *est borné sur S, c'est-à-dire* $\|[F'_x(x, y)]^{-1}\| \leqq \alpha$, *où* α *est une constante réelle et positive ;*

(iii) *l'application* $[F'_x(x, y)]^{-1}F'_y(x, y)$ *est uniformément bornée sur* $S \times S$, *c'est-à-dire* $\|[F'_x(x, y)]^{-1}F'_y(x, y)\| \leqq \beta$, *où* β *est une constante réelle et positive ;*

(iv) *les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\sup_{(x,y)\in S} \|F''_{x^2}(x, y)\| \leqq 2p ; \quad \sup_{(x,y)\in S} \|F''_{xy}(x, y)\| \leqq q \text{ et}$$

$$\sup_{(x,y)\in S} \|F''_{y^2}(x, y)\| \leqq 2r,$$

où p, q et r sont des constantes réelles et non-négatives ;

(v) $$\|x_1 - x_0\| \leqq k, \quad \|x_2 - x_1\| \leqq kt_1,$$

où k est une constante réelle et positive, qui ne dépend pas de n, x_2 *est donné par* (11) *pour* $n = 1$ *et* t_1 *est la racine positive de l'équation*

$$(\alpha pk - 1)t^2 + (\beta + \alpha qk)t + \alpha rk = 0 ;$$

(vi) *les inégalités suivantes ont lieu :*

(17) $$k(p+q+r) + \beta < 1$$

et

(18) $$r \geqq k/(1-t_1),$$

alors l'équation (9) *et la procédé* (11) *jouissent des propriétés suivantes :*

(j) *la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *est convergente et si* $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *alors* $\bar{x}_n$ *est une solution de l'équation* (9) ;

(jj) *les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$||x_n - \bar{x}|| \leqq kt_1^n/(1-t_1),$$

pour chaque $n = 0, 1, \ldots$.

Démonstration. Par hypothèse on a $x_1 \in S$ et $x_2 \in S$. Supposons que les propriétés suivantes ont lieu :

a) $\delta_k = ||x_{k+1} - x_k|| \leqq kt_1^k$, où $k = 0, 1, \ldots, n-1$

b) $x_k \in S$, où $k = 0, 1, \ldots, n$.

Des hypothéses du théorème il résulte que les propriétés *a)* et *b)* ont lieu pour $k = 0$ et $k = 1$. Montrons maintenant que ces propriétés ont lieu pour $k = n$ respectivement $k = n+1$.

En effet, on déduit du théorème 1

$$||F(x_{s-1}, x_s)|| \leqq ||F(x_{s+1}, x_s) - F(x_s, x_{s-1}) - F'_x(x_s, x_{s-1})(x_{s-1} - x_s) -$$
$$- F'_y(x_s, x_{s-1})(x_{s-1} - x_{s-1})|| \leqq$$
$$\leqq p||x_{s+1} - x_s||^2 + q||x_{s+1} - x_s|| \cdot ||x_s - x_{s-1}|| +$$
$$+ r||x_s - x_{s-1}||^2.$$

En tenant compte maintenant de (ii) et (iii) on a :

(20) $$||x_{s+1} - x_s|| \leqq \alpha||F(x_s, x_{s-1})|| + \beta||x_s - x_{s-1}|| ; \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit $\rho_s = ||F(x_{s-1}, x_s)||$ et $\delta_s = ||x_{s+1} - x_s||$ pour $s = 0, 1, \ldots$.

Alors de (19) et (20) on déduit

(21) $$\rho_s \leqq p\delta_s^2 + q \cdot \delta_s \cdot \delta_{s-1} + r \cdot \delta_{s-1}^2, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1 ;$$
$$\delta_s \leqq \alpha \cdot \rho_{s-1} + \beta\delta_{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

d'où il résulte

(22) $$\delta_{s+1} \leqq \alpha p \cdot \delta_s^2 + \alpha \cdot q \cdot \delta_s \cdot \delta_{s-1} + \alpha r \cdot \delta_{s-1}^2 + \beta\delta_s.$$

De (22), (17) et tenant compte de théorème 2 on déduit

(23) $$\delta_n = ||x_{n+1} - x_n|| \leqq kt_1^n,$$

c'est-à-dire il résulte que la propriété *a)* a lieu pour $k = n$.

Pour *b)* nous avons :

$$||x_{n+1} - x_0|| \leqq \sum_{i=0}^{n} ||x_{i+1} - x_i|| = \sum_{i=0}^{n} \delta_i \leqq k\sum_{i=0}^{n} t_1^i < \frac{k}{1-t_1} \leqq r,$$

donc $x_{n+1} \in S$.

Montrons maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente. En effet, de (23) on déduit

$$||x_{n+p} - x_n|| \leqq \sum_{k=n}^{n+p-1} ||x_{k+1} - x_k|| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \delta_k \leqq kt_1^n(1 + t_1 + \ldots + t_1^{n+p-1})$$
$$\leqq kt_1^n/(1-t_1),$$

pour chaque $p = 1, 2, \ldots ;$ $n = 1, 2, \ldots$.
De l'inégalité ci-dessus, en tenant compte que $t_1 < 1$, il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Si nous passans à limite pour gans l'inégalité (24) et nous écrivons $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ on a

(25) $$||\bar{x} - x_n|| \leqq kt_1^n/(1-t_1).$$

Du fait que F est une application dérivable au sens de Fréchet il résulte que F est continue ; en passant alors à limite dans (11) pour $n \to \infty$, on a

$$0 = F(\bar{x}, \bar{x}) = G(\bar{x}),$$

c'est-à-dire $\bar{x}$ est une solution pour l'équation (9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kantorovici, L. V., *Funktionaljnîi analiz i prikladnaia matematika*, UMN **28**, 89–185, (1948).
[2] Păvăloiu, I., *Sur les procédés itératifs à un ordere élevé de convergence*, Mathematica, **12** (35) 2, 309–324, (1970).
[3] Weinischke, J. H., *Über eine Klasse von Iterationsverfahren*, Numerische Mathematik, **6**, 395–404, (1964).

Institutul de Matematică
Universitatea „Babeş–Bolyai" Cluj-Napoca

Reçu le 13 II. 1977