EVALUAREA ERORILOR ÎN REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE

DE

I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

În această lucrare vom studia evaluarea erorilor care apar în rezolvarea aproximativă a ecuațiilor operaționale, atunci cînd rezolvarea acestora se face cu procedee iterative rapid convergente. Vom da o evaluare a erorilor în cauză folosind o delimitare a soluțiilor unor inegalități recurente neliniare. În lucrările [1], [2], [3], [4], [6] și [7] autorii au studiat această problemă pentru procedee iterative care au ordinul de convergență 1 și apoi au aplicat rezultatele găsite, la studiul erorilor procedeelor cu ordin de convergență 2.

Considerăm ecuația

$$x - \varphi(x) = \theta \tag{1}$$

și pentru rezolvarea ei, procedeul iterativ

$$\varphi(x_n) = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots,\ x_0 \in X \tag{2}$$

unde φ este un operator definit pe spațiul X și cu valori în X. Peste tot, în cele ce urmează, vom presupune că procedeul iterativ (2) îndeplinește următoarele condiții :

a) Există cel puțin un element $\bar{x} \in X$ pentru care $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - \bar{x} \| = 0$, unde $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este șirul generat de procedeul (2).

c) Operatorul φ admite derivate (în sens Fréchet) pînă la ordinul k inclusiv ($k \geqq 2$ — număr natural), pentru care sînt îndeplinite condițiile :

$$\varphi^{(i)}(\bar{x}) = \theta_i,\ i = 1, 2, \ldots,\ k-1;\ \sup_{x\in S} \|\varphi^{(k)}(x)\| \leqq M < +\infty,$$

unde $S = \{x \in X :\ \|x - \bar{x}\| \leqq \|\bar{x} - x_0\|\}$ iar θ_i este operația nulă i — lineară.

Dacă notăm cu

$$\omega_n = \left(\frac{M}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \|x_n - \bar{x}\|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

şi presupunem că $\omega_0 < 1$, ţinînd cont de ipotezele a) şi c) vom arăta că are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

adică şirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent.

Într-adevăr, aplicînd formula lui Taylor generalizată deducem inegalităţile

$$\omega_n \leq \omega_0^{k^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

de unde deducem egalitatea cerută.

Demonstrăm în prealabil următoarea lemă:

LEMA 1. *Dacă δ este un număr nenegativ, $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$ este un şir de numere nenegative care satisface relaţia de recurenţă*

(3) $$\rho_n \leq \rho_{n-1}^{k} + \delta, \quad k \geq 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(4) $$\rho_0 < 1$$

iar $\bar{\alpha}$ este cea mai mică soluţie pozitivă (în cazul cînd ea există) a ecuaţiei

(5) $$\alpha = (\alpha + \rho_0)^k - \rho_0^k + \delta$$

Atunci pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ au loc inegalităţile:

(6) $$\rho_n \leq \rho_0^{k^n} + \bar{\alpha}.$$

Demonstraţie. Vom demonstra inegalităţile (6) prin inducţie. Pentru $n = 1$ obţinem inegalitatea

$$\rho_1 \leq (\rho_0 + \bar{\alpha})^k + \delta$$

şi dacă $\bar{\alpha}$ este soluţie a ecuaţiei (5), atunci evident are loc inegalitatea

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \bar{\alpha}$$

ceea ce demonstrează afirmaţia lemei pentru cazul $n = 1$. Din (4) şi (5) deducem că pentru $n = 1, 2, \ldots$ au loc inegalităţile

(7) $$C_k^1 \cdot \rho_0^{k^n(k-1)}\,\bar{\alpha} + \ldots + C_k^{k-1}\,\rho_0^{k^n}\,\bar{\alpha}^{k-1} + \bar{\alpha}^k + \delta \leq \bar{\alpha}.$$

Presupunem prin inducţie că are loc inegalitatea:

$$\rho_{n-1} \leq \rho_0^{k^{n-1}} + \bar{\alpha}$$

pe care înlocuind-o în (3) obţinem

$$\rho_n \leq (\rho_0^{k^{n-1}} + \bar{\alpha})^k + \delta$$

de unde, dezvoltînd după formula binomului lui Newton şi ţinînd seamă de inegalităţile (7), deducem

$$\rho_n = \rho_0^{k^n} + \bar{\alpha}$$

ceea ce demonstrează afirmaţia lemei.

Pentru studiul erorilor vom considera alături de procedeul iterativ (2) următorul procedeu aproximativ,

(8) $$\xi_n = \varphi^*(\xi_{n-1}), \text{ unde } \xi_0 = x_0, \; n = 1, 2, \ldots$$

unde operatorul φ^* este definit pe spaţiul X şi cu valori în X.

TEOREMA 1. *Fie dat un număr real negativ ε. Presupunem că relativ la ε există cel puţin un număr pozitiv M_1 astfel ca să fie îndeplinite condiţiile:*

a) *Ecuaţia* (5) *unde*

$$\rho_0 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \|\bar{x} - x_0\|, \quad \delta = \varepsilon\left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

are cel puţin o soluţie reală pozitivă.

b) *Derivata Fréchet $\varphi^{(k)}$ verifică inegalitatea*

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| \leq M_1 < +\infty$$

pentru orice $x \in S'$ *unde* $S' = \left\{x \in X : \|x - \bar{x}\| \leq \|\bar{x} - x_0\| + \bar{\alpha}\left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right\}$

iar $\bar{\alpha}$ este cea mai mică soluţie pozitivă a ecuaţiei (5).

c) *Numărul M_1 şi elementul x_0 sînt astfel încît are loc inegalitatea* $\rho_0 < 1$.

d) *Operatorul φ^* este astfel ales încît că fie verificată inegalitatea*

$$\|\varphi(x) - \varphi^*(x)\| \leq \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in S'.$$

În aceste condiții toate iterațiile succesive $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ *aparțin sferei* S' *și are loc delimitarea*

$$\|\bar{x}-\xi_n\| \leq \left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot (\rho_0^{k^n}+\bar{\alpha}), \qquad n=1,2,\ldots \tag{9}$$

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece $\xi_0 = x_0 \in S'$ vom avea

$$\|\bar{x}-\xi_1\| \leq \|\varphi(\bar{x})-\varphi(\xi_0)\| + \|\varphi(\xi_0)-\varphi^*(\xi_0)\| \leq \frac{M_1}{k!}\|\bar{x}-\xi_0\|^k + \varepsilon$$

și notînd

$$\rho_1 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x}-\xi_1\| \text{ și } \rho_0 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x}-\xi_0\|,$$

deducem inegalitatea

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \delta.$$

Astfel condițiile lemei 1 sînt îndeplinite pentru ρ_0 și ρ_1.

Fie $\bar{\alpha}$ cea mai mică soluție pozitivă a ecuației (5). Ținînd seama de lema 1 și de condiția c) avem

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \bar{\alpha}$$

de unde ușor deducem că $\xi_1 \in S'$.

Presupunem acum prin inducție că $\xi_{n-1} \in S'$ și demonstrăm că $\xi_n \in S'$. Într-adevăr, avem:

$$\|\bar{x}-\xi_n\| \leq \|\varphi(\bar{x})-\varphi(\xi_{n-1})\| + \|\varphi(\xi_{n-1})-\varphi^*(\xi_{n-1})\| \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{k!}\|\bar{x}-\xi_{n-1}\|^k + \varepsilon,$$

unde, notînd cu $\rho_n = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x}-\xi_n\|$, $n=2,3,\ldots$, avem

$$\rho_n \leq \rho_{n-1}^k + \delta.$$

Aplicînd lema 1 deducem inegalitatea (9) din care rezultă că $\xi_n \in S'$.

Observație. Se poate întîmpla ca în decursul calculelor, începînd cu un anumit pas N, să avem $\xi_N = \xi_{N+1} = \ldots$ În acest caz pentru orice $n = N, N+1, \ldots$ are loc inegalitatea

$$\|\xi_n - \bar{x}\| \leq \left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{\alpha}. \tag{10}$$

Exemplu. Fie $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{0,2}{x}\right)$ care generează următorul procedeu iterativ

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{0,2}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 \neq 0, \quad n=1,2,\ldots$$

care se folosește la calculul rădăcinii pozitive a ecuației

$$x^2 - 0,2 = 0.$$

Presupunînd că $\varepsilon = 10^{-7}$ și $x_0 = 0,44$, găsim $\|\bar{x}-x_0\| \leq 0,01$, $M_1 = 4$, $\rho_0 = 0,02$, $\delta = 2\cdot10^{-7}$, $\bar{\alpha} \leq 3\cdot10^{-7}$. Interațiile succesive și deci valorile funcției φ^* sînt date în tabel.

Tabel

Nr. crt.	ξ_n	$\varphi^*(\xi_n)$
0	0,44	0,44727272
1	0,44727272	0,44721359
2	0,44721359	0,44721359
3	0,44721359	—

Din tabel rezultă că $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = 0,44721359$, de unde, ținînd seama de observația de mai sus și de inegalitatea (10), obținem

$$|\sqrt{0,2} - 0,44721359| \leq 1,5\cdot10^{-7}.$$

Primită la redacție la 10 octombrie 1970.

Academia Republicii Socialiste România—Filiala Cluj,
Institutul de calcul

L'ÉVALUATION DES ERREURS DANS LA SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES

(RÉSUMÉ)

Dans l'ouvrage on donne une évaluation des erreurs pour le cas où une équation opérationnelle donnée est résolue avec la méthode itérative ayant un ordre de convergence $k(k \geqq 2)$. Ainsi on généralise les résultats des ouvrages [1], [2], [3], [4], [5] et [7].

BIBLIOGRAFIE

1. Fujii, M., *Remarks to Accelerated Iterative Processes for Numerical Solution of Equations*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A–I, **27**, 97–118 (1963).
2. Lankaster, P., *Error for the Newton – Raphson Method*. Numerische Mathematik, **9**, *1*, 55–68 (1966).
3. Ostrowski, A.M., *The Round – off Stability of iterations*. Z.A.M.M., **47**, 77–81 (1967).
4. Păvăloiu, I., *Asupra unor inegalități recurente și aplicații ale lor*. St. cerc. mat. *8*, **19**, 1175–1179 (1967).
5. — *Observații asupra rezolvării sistemelor de ecuații cu ajutorul procedeelor iterative*. Idem, *9*, **19**, 1289–1298 (1967).
6. Urabe, M., *Convergence of Numerical Iteration of Equations*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **19**, 479–489 (1956).
7. — *Solution of Equations by Iteration Process*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A–I, **26**, 77–91 (1962).