ASUPRA OPERATORILOR ITERATIVI

DE

I. PĂVĂLOIU

(Cluj)

Fie dată ecuaţia operaţională

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

unde P este un operator definit pe spaţiul linear normat X şi cu valori în spaţiul linear normat Y.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) se consideră în general un alt operator $Q(x)$ definit pe spaţiul X şi cu valori în el însuşi.

Scopul acestei note este de a studia proprietăţile operatorului Q şi legătura dintre acesta şi operatorul P.

DEFINIŢIA 1. Spunem că operatorul Q este un operator iterativ ataşat ecuaţiei (1) dacă orice element $\bar{x} \in X$ pentru care $P(\bar{x}) = \theta$, este punct fix pentru operatorul Q.

DEFINIŢIA 2. Fie $D \subseteq X$ o mulţime de elemente ale spaţiului X şi $\rho \geqq 0$, un număr real. Vom spune că operatorul iterativ Q ataşat ecuaţiei (1) are ordinul k (k — număr natural) pe mulţimea D, dacă pentru orice $x \in D$ are loc inegalitatea:

$$\| P((Q(x)) \| \leqq \rho \, \| P(x) \|^{k}. \tag{2}$$

Mulţimea operatorilor iterativi, ataşaţi ecuaţiei (1), care au ordinul k pe domeniul D o vom nota cu I_k^D.

În legătură cu juxtapunerea a doi operatori iterativi vom stabili, pe o altă cale decît în [4], următorul rezultat:

LEMA 1. *Dacă $Q \in I_{k_1}^D$, $R \in I_{k_2}^D$, $Q(x) \in D$ şi $R(x) \in D$ pentru orice $x \in D$, atunci $R(Q) \in I_{k_1 k_2}^D$ şi $Q(R) \in I_{k_1 k_2}^D$.*

Demonstraţie. Fie ρ_1 şi ρ_2 două numere reale şi pozitive pentru care, conform ipotezei, au loc inegalităţile

$$\| P(Q(x)) \| \leqq \rho_1 \, \| P(x) \|^{k_1} \text{ pentru orice } x \in D, \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 23, NR. 10, P. 1537–1544, BUCUREŞ I, 1971

$$\|P(R(x))\| \leqq \rho_2 \|P(x)\|^{k_2} \text{ pentru orice } x \in D. \tag{4}$$

Deoarece $Q(x) \in D$ şi $R(x) \in D$ pentru orice $x \in D$, rezultă că $R(Q(x)) \in D$ pentru orice $x \in D$. Avînd în vedere acest fapt şi inegalitatea (4) rezultă :

$$\|P(R(Q(x)))\| \leqq \rho_2 \|P(Q(x))\|^{k_2}, \text{ pentru orice } x \in D.$$

Ţinînd cont de această inegalitate şi de (3) deducem

$$\|P(R(Q(x)))\| \leqq \rho_2 \cdot \rho_1^{k_2} \|P(x)\|^{k_1 \cdot k_2}, \text{ pentru orice } x \in D.$$

Şi cu aceasta lema este demonstrată.

O consecinţă imediată a acestei leme este următoarea :

CONSECINŢA 1. *Dacă* $Q_i \in I_{p_i}^D$, $Q_i(x) \in D$ *pentru orice* $x \in D$, $i = 1,2,\ldots s$, *atunci toţi operatorii de forma*

$$H = Q_{j_1}(Q_{j_2}(\ldots(Q_{j_s})\ldots)),$$

unde $(j_1, j_2, \ldots j_s)$ *este o permutare oarecare a numerelor* $(1,2,\ldots,s)$, *aparţin clasei* $I^D_{p_1 \cdot p_2 \cdots p_s}$.

Demonstraţia acestei consecinţe se poate face prin inducţie completă.

TEOREMA 1. *Fie D o mulţime convexă a spaţiului X. Dacă operatorul P îndeplineşte următoarele condiţii :*

a) *Operatorul P admite derivate Fréchet pînă la ordinul 2 inclusiv, pentru orice* $x \in D$.

b) *Operatorul* $[P'(x)]^{-1}$ *există şi este mărginit adică* $\|[P'(x)]^{-1}\| \leqq B < +\infty$, *pentru orice* $x \in D$.

c) $\|P''(x)\| \leqq M < +\infty$, *pentru orice* $x \in D$.

d) *Operatorul* $R(x) = x - [P'(x)]^{-1} \cdot P(x)$ *transformă mulţimea D în ea însăşi.*

Atunci $R \in I_2^D$.

Demonstraţie. Aplicînd formula generalizată a lui Taylor şi ţinînd cont de ipotezele teoremei avem

$$\|P(R(x))\| \leqq \|P(R(x)) - [P(x) - P'(x)[P'(x)]^{-1} P(x)]\| +$$
$$+ \|P(x) - P'(x)][P'(x)]^{-1} P(x))\| \leqq \frac{\|P''(\xi)\| B^2}{2} \|P(x)\|^2,$$

unde $\xi = x - \theta [P'(x)]^{-1} \cdot P(x)$, $0 \leqq \theta < 1$. Deoarece D este mulţime convexă, atunci $\xi \in D$ şi ţinînd cont de ipoteza c) avem

$$\|P(R(x))\| \leqq \frac{MB^2}{2} \|P(x)\|^2,$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată. Această teoremă ne arată că operatorul lui Newton-Kantorovici [1] are ordinul 2.

O consecinţă imediată a teoremei 1 şi lemei 1 este următoarea :

CONSECINŢA 2. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei 1 şi dacă* $Q(x) \in I_p^D$, $Q(x) \in D$ *pentru* $x \in D$, *unde D este aceeaşi mulţime ca şi în teorema 1, atunci operatorul* $R(Q) \in I_{2p}^D$, *unde* $R(x) = x - [P'(x)]^{-1} \cdot P(x)$.

Pentru rezultatele pe care le vom stabili în cele ce urmează vom presupune că operatorul Q are forma $Q(x), = x + \varphi(x)$, unde operatorul $\varphi(x)$ satisface condiţia

$$\|\varphi(x)\| \leqq \delta \|P(x)\|, \text{ pentru orice } x \in D, \tag{5}$$

unde δ este un număr real şi pozitiv.

Observaţie. Dacă este îndeplinită condiţia (5) şi dacă $\bar{x} \in D$ şi $P(\bar{x}) = \theta$, atunci $\varphi(\bar{x}) = \theta$. Din faptul că $P(\bar{x}) = \theta$ rezultă $\varphi(\bar{x}) = \theta$ şi deci $\bar{x} = Q(\bar{x})$, unde $Q(x) = x + \varphi(x)$, adică $\bar{x}$ este un punct fix al operatorului Q.

TEOREMA 2. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile a), b) şi c) ale teoremei 1 şi dacă pe aceeaşi mulţime D sînt îndeplinite şi următoarele condiţii :*

a') *Operatorul* $Q(x) = x + \varphi(x)$ *satisface condiţia* (5).

b') $Q(x) \in D$ *pentru orice* $x \in D$ *şi* $Q \in I_p^D$.

c') *Operatorul P este mărginit în D adică* $\|P(x)\| \leqq H < +\infty$, *pentru orice* $x \in D$.

d') *Operatorul* $R(x) = Q(x) - [P'(x)]^{-1} \cdot P(Q(x))$ *transformă mulţimea D în ea însăşi.*

Atunci operatorul R aparţine clasei I_{p+1}^D.

Demonstraţie. Ţinînd cont de ipotezele teoremei şi aplicînd formula lui Taylor generalizată avem

$$\|P(R(x))\| \leqq \|P(R(x)) - [P(Q(x)) - P'(Q(x))[P'(x)]^{-1} P(Q(x))]\| +$$
$$+ \|P(Q(x)) - P'(x)[P'(x)]^{-1} P(Q(x))\| +$$
$$+ \|P'(Q(x))[P'(x)]^{-1} P(Q(x)) - P'(x)[P'(x)]^{-1} P(Q(x))\| \leqq$$
$$\leqq \frac{\|P''(\xi)\|}{2} B^2 \|P(Q(x))\|^2 + \|P'(Q(x)) - P'(x)\| \cdot B \cdot \|P(Q(x))\|,$$

unde $\xi = Q(x) - \theta \cdot [P'(x)]^{-1} \cdot P(Q(x))$, $0 < \theta < 1$. Deoarece mulţimea D este convexă, rezultă că $\xi \in D$.

Din inegalitatea (5) deducem

$$\|P'(Q(x)) - P'(x)\| \leqq \|P''(\eta)\| \cdot \delta \cdot \|P(x)\|,$$

unde $\eta = x + \theta \cdot \varphi(x)$, $0 < \theta < 1$, $\eta \in D$. De aici şi din faptul că $\|P(x)\|$ este mărginită în D, rezultă

$$\|P(R(x))\| \leqq \frac{M}{2} B^2 \|P(Q(x))\|^2 + MB\delta \|P(x)\| \cdot \|P(Q(x))\|. \tag{6}$$

Deoarece $Q \in I_p^D$, rezultă că există un număr real $\beta \geqq 0$ pentru care avem

$$\| P (Q (x)) \| \leqq \beta \| P (x) \|^p$$

care înlocuită în (6) ne conduce la următoarea inegalitate

$$\| P (R (x)) \| \leqq \alpha \| P (x) \|^{p+1},$$

unde dacă facem calculele găsim

$$\alpha = \frac{M B^2 \beta^2 \cdot H^{p-1}}{2} + M \beta \delta B.$$

Pe baza acestei teoreme vom construi mai jos un operator iterativ de ordinul 3, care spre deosebire de operatorul lui Cebîşev [1] care are tot ordinul 3, nu va conţine decît derivata de primul ordin a operatorului P. Într-adevăr, dacă ţinem cont de teorema 2, unde luăm $Q (x) = x - [P' (x)]^{-1} P (x)$, atunci operatorul $R (x)$ are forma

$$R (x) = x - [P' (x)]^{-1} \cdot P (x) - [P' (x)]^{-1} P [x - [P' (x)]^{-1} \cdot P (x)].$$

Acest operator prezintă avantaje faţă de operatorul lui Cebîşev prin faptul că în expresia sa nu intervine derivata a doua a operatorului P care în multe cazuri este dificil de calculat şi are o expresie foarte complicată. După cum am văzut, teorema 2 ne oferă o metodă de a mări ordinul unui operator cu o unitate.

În cele ce urmează vom studia o altă metodă de acest gen care este în acelaşi timp şi o generalizare a operatorului iterativ al lui Steffensen [2], [5]. Acest operator a fost pus în evidenţă de către mai mulţi autori în diferite moduri. Evident, calea cea mai simplă este aceea prin care operatorul lui Steffensen rezultă din metoda coardei.

În acest sens vom nota cu $[x, y ; P]$ diferenţele divizate ale operatorului P [3], pe nodurile x şi y, despre care vom presupune că sînt simetrice în raport cu x şi y, adică

$$[x, y ; P] = [y, x ; P]$$

TEOREMA 3. *Dacă au loc următoarele condiţii :*

a) *Operatorul* $Q (x)$ *este un operator iterativ ataşat ecuaţiei (1) care aparţine clasei* I_p^D *şi pentru orice* $x \in D$, $Q (x) \in D$.

b) *Pentru orice* $x \in D$, *operatorul liniar* $[x, Q (x) ; P]$ *admite un invers mărginit adică :* $\| [x, Q (x) ; P]^{-1} \| \leqq B < + \infty$.

c) $\| [y, z ; P] - [x, y ; P] \| = K \| x - z \|$, $0 \leqq K < + \infty$, *pentru orice* $x, y, z \in D$.

d) *Operatorul* $R (x) = x - [x, Q (x) ; P]^{-1} P (x)$ *transformă mulţimea* D *în ea însăşi.*

Atunci operatorul $R \in I_{p+1}^D$.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că operatorul $R (x)$ poate fi pus şi sub următoarea formă :

$$R (x) = Q (x) - [x, Q (x) ; P]^{-1} P (Q (x)).$$

Pentru aceasta vom porni de la următoarea egalitate evidentă

$$x - Q (x) = [x, Q (x) ; P]^{-1} [x, Q (x) ; P] (x - Q (x)) \tag{7}$$

şi ţinînd cont de egalitatea

$$P (x) - P (Q (x)) = [x, Q (x) ; P] (x - Q (x))$$

care înlocuită în (7) ne dă

$$x - Q (x) = [x, Q (x) ; P]^{-1} [P (x) - P (Q (x))] =$$

$$= - [x, Q (x) ; P]^{-1} \cdot P (Q(x)) + [x, Q (x) ; P]^{-1} \cdot P (x).$$

de unde rezultă nemijlocit egalitatea

$$x - [x, Q (x) ; P]^{-1} \cdot P (x) = Q (x) - [x, Q (x) ; P]^{-1} \cdot P (Q(x)).$$

Din cele arătate mai sus şi din condiţiile teoremei rezultă următoarele inegalităţi :

$$\| R (x) - x \| \leqq B \| P (x) \| \quad , \quad \text{pentru orice } x \in D, \tag{8}$$

$$\| R (x) - Q (x) \| = B \| P (Q (x)) \| \quad , \quad \text{pentru orice } x \in D. \tag{9}$$

Mai departe considerăm următoarea identitate evidentă

$$P (u) = P (x) + [x, Q (x) ; P] (u - x) + \{ [x, u ; P] -$$

$$- [x, Q (x) ; P] \} (u - x),$$

din care înlocuind pe u cu $R (x)$ şi ţinînd cont de (8), (9) şi ipotezele teoremei, deducem

$$\| P (R (x)) \| = K B^2 \| P(x) \| \cdot \| P (Q(x)) \| , \text{ pentru orice } x \in D. \tag{10}$$

Condiţia a) ne asigură existenţa unui număr real şi pozitiv ρ pentru care

$$\| P (Q (x)) \| \leqq \rho \| P (x) \|^p, \text{ pentru orice } x \in D$$

care înlocuită în (10) ne dă

$$\|P(R(x))\| \leq K \rho B^2 \|P(x)\|^{p+1}, \text{ pentru orice } x \in D$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Folosind diferențele divizate generalizate am construit astfel un operator de ordin $p+1$, folosind un operator de ordinul p. Acest operator este mai general decît cei construiți cu ajutorul teoremei 2 deoarece nu face apel la existența derivatelor de primul și al doilea ordin. De altfel operatorul lui Steffensen sub forma sub care a fost studiat, pînă în prezent, are ordinul 2, deoarece s-a presupus că $Q(x)$ este un operator de iterație liniară [2], [5]

Vom considera în continuare că operatorul Q are forma $Q(x) = x + \varphi(x)$ și vom căuta condiții asupra operatorului φ astfel încît Q să fie un operator iterativ de ordinul k atașat ecuației (1).

TEOREMA 4. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

a) *Pentru orice* $x \in D$, $Q(x) \in D$, *unde* $D \subseteq X$ *este o mulțime convexă.*

b) *Operatorul* P *admite derivate (în sens Fréchet) pînă la ordinul* k *inclusiv, și pentru orice* $x \in D$ *există un număr real și pozitiv* $M > 0$ *pentru care* $\sup_{x \in D} \|P^{(k)}(x)\| \leq M$.

c) *Operatorul* φ *satisface condiția*

$$\|P(x) + P'(x)\varphi(x) + \frac{P''(x)}{2!}\varphi^2(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{P^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\varphi^{k-1} x\| \leq \alpha \|P(x)\|^k,$$

pentru orice $x \in D$, *unde* α *este un număr real și nenegativ*

d) $\|\varphi(x)\| = \beta \|P(x)\|$, *pentru orice* $x \in D$, *unde* $\beta > 0$ *este un număr real.*

Atunci operatorul $Q \in I_k^p$.

Demonstrație. Aplicînd formula lui Taylor generalizată și ținînd cont de forma restului în această formulă și de ipotezele c) și d) avem

$$\|P(Q(x))\| \leq \|P(Q(x)) - [P(x) + P'(x)\varphi(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{P^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(x)\| + \|P(x) + P'(x)\varphi(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{P^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(x)\|$$

de unde deducem

$$P(Q(x)) = \frac{\|P^{(k)}(\xi)\|}{k!}\|\varphi(x)\|^k + \alpha\|P(x)\|^k,$$

unde $\xi = x + \theta\varphi(x)$, $0 < \theta < 1$, $\xi \in D$, adică

$\|P(Q(x))\| \leq \left(\frac{M\beta^k}{k!} + \alpha\right)\|P(x)\|^k$ pentru orice $x \in D$. Inegalitatea d) ne arată că $Q(x)$ este un operator iterativ atașat ecuației (1) și dacă ținem cont de ultima inegalitate rezultă că $Q(x) \in I_k^p$.

TEOREMA 5. *Fie* $\overline{x} \in D \subseteq X$ *o soluție a ecuației (1), unde* D *este o mulțime convexă. Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

a) *Operatorul* Q *admite derivate (în sens Fréchet) pentru orice* $x \in D$, *pînă la ordinul* k *inclusiv și aceste derivate satisfac condițiile :*

$$Q'(\overline{x}) = \theta_1, \quad Q''(\overline{x}) = \theta_2, \quad \dots, \quad Q^{(k-1)}(\overline{x}) = \theta_{k-1}, \quad Q^{(k)}(\overline{x}) \neq \theta_k$$

și

$$\sup_{x \in D}\|Q^{(k)}(x)\| \leq M < +\infty,$$

unde θ_i $(i = 1,2,\dots k)$ *sînt operatorii* i *— liniari nuli.*

b) *Pentru orice* $x \in D$, $Q(x) \in D$ *și* $Q(\overline{x}) = \overline{x}$.

c) *Operatorul* $[\overline{x}, x; P]$ *există și admite invers pentru orice* $x \in D$.

d) *Operatorii* $[\overline{x}, x; P]$ *și* $[\overline{x}, x; P]^{-1}$ *sînt mărginiți adică există două constante reale și nenegative* N *și* E *pentru care* $\|[\overline{x}, x; P]\| \leq N$, $\|[\overline{x}, x; P]^{-1}\| \leq E$, *pentru orice* $x \in D$.

Atunci $Q \in I_k^D$.

Demonstrație. Din definiția diferenței divizate rezultă

$$P(Q(x)) = P(Q(x)) - P(\overline{x}) = P(Q(x)) - P(Q(\overline{x})) =$$

$= [Q(\overline{x}), Q(x); P] \times [Q(x) - Q(\overline{x})]$ de unde, ținînd cont de d), avem

$$\|P(Q(x))\| = N. \ \|Q(x) - Q(x)\|, \text{ pentru orice } x \in D. \tag{11}$$

Dar ipoteza a) ne conduce la următoarea inegalitate

$$\|Q(x) - Q(\overline{x})\| \leq \frac{M}{k!}\|x - \overline{x}\|^k, \text{ pentru orice } x \in D. \tag{12}$$

Din faptul că $P(\overline{x}) = \theta$ obținem

$$P(x) = [\overline{x}, x; P](x - \overline{x})$$

care ne dă

$$\|x - \bar{x}\| \leqq E \; \|P(x)\|, \quad \text{pentru orice } x \in D.$$

Din ultima inegalitate şi din (11) şi (12) deducem

$$\|P(Q(x))\| \leqq \frac{ME^k \cdot N.}{k!} \; \|P(x)\|^k$$

ceea ce trebuia arătat.

Din teorema de mai sus rezultă că, condiţiile impuse de noi în definiţia ordinului de convergenţă pentru un operator iterativ sînt cel puţin tot aşa de generale ca şi condiţiile din ipotezele a) şi b) care sînt esenţiale în demonstraţia teoremei 5. Pe de altă parte, condiţia impusă de noi în definiţia 2 nu cere existenţa derivatei Fréchet şi ea poate fi aplicată şi cînd aceasta se înlocuieşte cu diferenţa divizată aşa după cum rezultă din teorema 3. În acest fel definiţia 2 ne dă posibilitatea să clasificăm o clasă mai largă de operatori iterativi.

Primită la redacţie la 23 iunie 1970

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Cluj
Institutul de calcul.

SUR LES OPÉRATEURS ITÉRATIFS

(RÉSUMÉ)

On définit la notion d'opérateur itératif et l'ordre d'un opérateur itératif. A l'aide de ces notions on étudie les problèmes suivants : a) La caractérisation de l'ordre d'un opérateur qui provient de la juxtaposition de deux ou de plusieurs opérateurs ; b) Des méthodes de construction des opérateurs itératifs d'ordre $p + 1$ et $2p$ à l'aide des opérateurs d'ordre p ; c) Des conditions suffisantes qui doivent être accomplies par un opérateur donné pour qu'il soit un opérateur itératif attaché à une équation opérationnelle qui doit admettre un ordre donné.

BIBLIOGRAFIE

1. Jankó, Béla, *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale.* (Lucrare de doctorat, Cluj, 1966).
2. Păvăloiu, Ion, *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires.* Rev. Roum. de math. pures et appl., **13**, *6* (1968), 857–861.
3. Păvăloiu, Ion, *Interpolation dans des espaces lineaires norme et applications.* Mathematica, Cluj, (sub tipar).
4. Traub, F. j, *Sterative Methods for the solution of Equations.* Pretince – Holl, Inc., Englewood cliffs. N. j (1964).
5. Ul'm, S., *Obobşcenie metoda Steffensena dlea reşenia nelineinth operotornih uravnenii.* Jurnal vicise. mat. i mat-fiz., **4**, *6* (1964), 1093–1097.