

ASUPRA UNOR METODE ÎTERATIVE PENTRU
REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE
NELINIARE

de

A. DIACONU și I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

În lucrarea [13] S. Ul'm a studiat un procedeu iterativ de rezolvare a ecuațiilor operaționale, în care odată cu construcția iterațiilor succesive se consideră un șir de operatori în așa fel ales, încât elementele sale să aproximeze succesiv inversul unui operator dat.

1. Fie

$$(1) \quad P(x) = 0$$

o ecuație operațională unde $P: X \rightarrow Y$; X, Y spații Banach. Pentru rezolvarea ecuației (1) S. Ul'm consideră următorul procedeu iterativ, [13]

$$(2) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - P'(x_{n+1})A_n), \quad n = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

unde $A_0: Y \rightarrow X$ este un operator liniar arbitrar, E operatorul identic al spațiului Y și $P'(x)$ este derivata Fréchet a operatorului P în punctul x .

Rezultatele stabilite de către S. Ul'm se bazează pe ipoteza că ecuația (1) admite o soluție x^* .

În lucrarea de față vom studia convergența procedului iterativ (2), fără ipoteza existenței soluției ecuației (1). Teorema care va urma va stabili atât convergența procedului (2) către soluția ecuației (1) cât și existența soluției ecuației (1). Rezultatul stabilit de către noi nu este comparabil cu rezultatul lui S. Ul'm dar ipotezele pe care noi le vom admite par să fie mai puțin restrictive decât cele ale lui S. Ul'm.

Rezultatul obținut de noi se exprimă în următoarea :

TEOREMA 1. Dacă în sfera $S = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ sînt îndeplinite condițiile:

1) Operatorul P admite derivate în sens Fréchet pînă la ordinul 2 inclusiv, derivata de ordinul 1 a operatorului P admite un invers mărginit, adică pentru orice $x \in S$ $\| [P'(x)]^{-1} \| \leq B < +\infty$ și $\| P''(x) \| \leq M < +\infty$.

2) Elementul inițial x_0 , operatorul inițial A_0 și constantele B și M satisfac condiția:

$$\max \{ 2MB^2 \|P(x_0)\|, \|E - P'(x_0)A_0\| \} \leq \frac{1}{9} d,$$

unde

$$d < 1 \text{ și } r = \frac{d}{9MB(1-d^{p-1})}, p=2-\varepsilon \text{ cu } 0 < \varepsilon < 1,$$

atunci au loc următoarele proprietăți:

- 1) Șirurile $(x_n)_{n=0}^\infty$, $(A_n)_{n=0}^\infty$ sînt convergente.
- 2) Ecuația (1) admite soluția $x^* \in S$ care se poate obține ca limită a șirului $(x_n)_{n=0}^\infty$ generat de (2) și

$$A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = [P'(x^*)]^{-1}.$$

3) Au loc următoarele inegalități:

$$(3) \quad \|x_n - x^*\| \leq \frac{d^{pn}}{9MB(1-d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(4) \quad \|A_n - A^*\| \leq \frac{Bd^{pn}(3-d)}{9(1-d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Demonstrație. Pentru început urmărim să arătăm că pentru orice $n = 0, 1, \dots$ au loc următoarele proprietăți:

$$a) \quad x_n \in S.$$

$$b) \quad \begin{cases} \rho_n = 2MB^2 \|P(x_n)\| \leq \theta_n d^{2n} \leq \frac{1}{9} d^{pn} \\ \delta_n = \|E - P'(x_n)A_n\| \leq \mu_n d^{2n} \leq \frac{1}{9} d^{pn}, \end{cases}$$

unde $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ și $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\theta_{n+1} = \theta_n^2 + \theta_n \mu_n$$

$$\mu_{n+1} = (\mu_n + 2\theta_n)^2,$$

unde

$$\theta_0 = \mu_0 = \frac{1}{9}.$$

c)

$$\|A_n\| \leq 2B.$$

Proprietățile a)–b) sînt verificate pentru $n = 0$ prin ipoteză. Rămîne să arătăm că $\|A_0\| \leq 2B$. Într-adevăr

$$\|A_0\| = \|[P'(x_0)]^{-1} + A_0 - [P'(x_0)]^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|[P'(x_0)]^{-1}\| (1 + \|E - P'(x_0)A_0\|) \leq B \left(1 + \frac{1}{9} d\right) < 2B.$$

Presupunem că proprietățile a)–c) au loc pentru $n = 0, 1, \dots, k$ și le vom demonstra pentru $n = k + 1$

Demonstrăm proprietatea a). Avem:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k \|A_i\| \cdot \|P(x_i)\| \leq 2B \sum_{i=0}^k \|P(x_i)\| \leq \\ &\leq 2B \frac{1}{18MB^2} \sum_{i=0}^k d^{pi} = \frac{d}{9MB} (1 + d^{p-1} + d^{p^2-1} + \dots + d^{p^k-1}) < \\ &< \frac{d}{9MB} (1 + d^{p-1} + d^{2(p-1)} + \dots) = \frac{d}{9MB(1-d^{p-1})} = r. \end{aligned}$$

În raționamentul de mai sus ne-am folosit de inegalitățile evidente

$$i(p-1) \leq p^i - 1, \quad i = 0, 1, \dots,$$

deci $x_{k+1} \in S$.

Pentru a demonstra proprietatea b) se stabilesc următoarele inegalități:

$$(5) \quad \|P(x_{k+1})\| \leq \frac{M}{2} \|A_k\|^2 \|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\| \cdot \|E - P'(x_k)A_k\|,$$

$$(6) \quad \|E - P'(x_{k+1})A_k\| \leq (\|E - P'(x_k)A_k\| + M \|A_k\|^2 \|P(x_k)\|)^2.$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \|P(x_{k+1})\| &\leq \|P(x_{k+1}) - P(x_k) - \frac{P'(x_k)}{1!} (x_{k+1} - x_k)\| + \\ &+ \|P(x_k) + P'(x_k) (x_{k+1} - x_k)\| \leq \frac{\|P''(\xi_k)\|}{2!} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \\ &+ \|P(x_k) - P'(x_k) A_k P(x_k)\| \leq \frac{M}{2} \|A_k\|^2 \|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\| \|E - P'(x_k) A_k\|, \end{aligned}$$

unde am ținut cont de faptul că $\xi_k = x_k + \theta(x_{k+1} - x_k)$, $0 < \theta < 1$ și deoarece $x_k \in S$, $x_{k+1} \in S$ este evident că și $\xi_k \in S$. Cu aceasta inegalitatea (5) este demonstrată.

Pentru (6) avem:

$$\begin{aligned} \|E - P'(x_{k+1}) A_{k+1}\| &= \|E - P'(x_{k+1}) A_k (2E - P'(x_{k+1}) A_k)\| = \\ &= \|E - 2P'(x_{k+1}) A_k + (P'(x_{k+1}) A_k)^2\| \leq \|E - P'(x_{k+1}) A_k\|^2 \leq \\ &\leq (\|E - P'(x_k) A_k\| + \|P''(\xi'_k)\| \|x_{k+1} - x_k\| \cdot \|A_k\|)^2 \leq \\ &\leq (\|E - P'(x_k) A_k\| + M \|A_k\|^2 \|P(x_k)\|)^2, \end{aligned}$$

deoarece și aici ca mai sus $\xi'_k \in S$.

Înmulțind ambii membri ai inegalității (5) cu $2MB$ și ținând cont că $\|A_k\| < 2B$ din (5) și (6), folosind notațiile introduse obținem:

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_{k+1} \leq \rho_k^2 + \rho_k \delta_k \\ \delta_{k+1} \leq (\delta_k + 2\rho_k)^2. \end{cases}$$

Ținând cont de ipotezele inducției avem următoarele inegalități:

$$(8) \quad \begin{cases} \rho_k \leq \theta_k d^{2^k} \leq \frac{1}{9} d^{p^k}, \\ \delta_k \leq \mu_k d^{2^k} \leq \frac{1}{9} d^{p^k}. \end{cases}$$

Din inegalitățile (7) și (8) deducem:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq (\theta_k^2 + \theta_k \mu_k) d^{2^{k+1}} = \theta_{k+1} d^{2^{k+1}} \\ \delta_{k+1} &\leq (\mu_k + 2\theta_k)^2 d^{2^{k+1}} = \mu_{k+1} d^{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

unde am notat:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k^2 + \theta_k \mu_k \\ \mu_{k+1} &= (\mu_k + 2\theta_k)^2. \end{aligned}$$

Arătăm că:

$$\theta_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9} \quad \text{și} \quad \mu_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9}.$$

Într-adevăr deoarece

$$d^{2^{k+1} - p^{k+1}} = \left(d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right)^2$$

avem:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} &= \left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right)^2 + \left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right) \left(\mu_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right), \\ \mu_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} &= \left(\mu_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} + 2\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right)^2. \end{aligned}$$

Din (8) rezultă:

$$\theta_k \leq \frac{1}{9} d^{p^k - 2^k}, \quad \mu_k \leq \frac{1}{9} d^{p^k - 2^k},$$

avem atunci:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} &\leq \frac{2}{81} (d^{2-p})^{p^k} \leq \frac{2}{81} < \frac{1}{9}, \\ \mu_{k+1} d^{2^{k+1} - p^{k+1}} &\leq \frac{9}{81} (d^{2-p})^{p^k} < \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Rezultă imediat că:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq \theta_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq \frac{1}{9} d^{p^{k+1}}, \\ \delta_{k+1} &\leq \mu_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq \frac{1}{9} d^{p^{k+1}}, \end{aligned}$$

ceeace demonstrează proprietatea b).

În cele ce urmează arătăm că are loc proprietatea c).

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \|A_{k+1}\| &= \|[P'(x_{k+1})]^{-1} + A_{k+1} - [P'(x_{k+1})]^{-1}\| \leq \\ &\leq \|[P'(x_{k+1})]^{-1}\| (1 + \|E - P'(x_{k+1}) A_{k+1}\|) \leq B \left(1 + \frac{1}{9} d^{p^{k+1}} \right) < 2B. \end{aligned}$$

Prin urmare proprietățile a), b), c) sînt adevărate pentru orice $n = 0, 1, \dots$

Vom demonstra că șirul $(x_n)_{n=0}^\infty$ este fundamental

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \cdot \|P(x_i)\| \leq \\ &\leq 2B \frac{1}{18MB^2} \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i} = \frac{d^{p^n}}{9MB} (1 + d^{p^{n+1}-p^n} + \dots + d^{p^{n+m-1}-p^n}) < \\ &< \frac{d^{p^n}}{9MB} [1 + d^{p^n(p-1)} + \dots + (d^{p^n(p-1)})^{m-1}] < \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}. \end{aligned}$$

Ne-am folosit de faptul că pentru orice $i = 1, \dots, m-1$

$$p^{n+i} - p^n = p^n(p-1)(p^{i-1} + p^{i-2} + \dots + p + 1) > i p^n(p-1),$$

deoarece $p > 1$.

Din faptul că $d < 1$, rezultă că șirul $(x_n)_{n=0}^\infty$ este fundamental, spațiul X fiind complet, el va fi și convergent. Fie x^* limita acestui șir.

Din faptul că:

$$\|x_{n+m} - x_n\| < \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}; \quad n, m = 0, 1, \dots$$

făcînd $m \rightarrow \infty$ obținem:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{d^{p^n}}{9MB(1 - d^{p^n(p-1)})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

prin urmare inegalitățile (3). Pentru $n = 0$, rezultă

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{d}{9MB(1 - d^{p-1})},$$

prin urmare $x^* \in S$

Din inegalitățile b) rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(x_n)\| = 0$, de unde ținînd cont de continuitatea lui P rezultă $P(x^*) = \theta$, prin urmare x^* este soluție a ecuației (1).

Deoarece $x^* \in S$, va exista operatorul $[P'(x^*)]^{-1}$ notat cu A^* . Avem:

$$\begin{aligned} \|A_n - A^*\| &= \|[P'(x^*)]^{-1} - A_n\| = \|[P'(x^*)]^{-1} - [P'(x^*)]^{-1}[P'(x^*)]A_n\| \leq \\ &\leq B\|E - P'(x^*)A_n\| \leq B(\|E - P'(x_n)A_n\| + \|P'(x^*) - P'(x_n)\| \|A_n\|) \leq \\ &\leq B(\delta_n + 2MB\|x^* - x_n\|), \text{ unde } \|P'(x^*) - P'(x_n)\| \leq \|P''(\eta)\| \|x^* - x_n\| \leq \\ &\leq M\|x^* - x_n\|, \end{aligned}$$

deoarece $\eta = x_n + \theta(x^* - x_n)$, $0 < \theta < 1$ aparține sferei S .

Rezultă deci că: $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^*$ și:

$$\|A^* - A_n\| \leq \frac{Bd^{p^n}(3 - d^{p^n(p-1)})}{9(1 - d^{p^n(p-1)})},$$

care sînt chiar inegalitățile (4). Cu aceasta teorema este demonstrată.

2. În cele de mai sus s-a făcut ipoteza că operatorul P admite derivate Fréchet pînă la ordinul 2 inclusiv. În continuare vom înlocui această ipoteză prin una mult mai generală aceea că P admite diferențe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv.

Noțiunea de diferență divizată pe un spațiu abstract se presupune cunoscută [5], [9], [11], [12]

Pentru rezolvarea ecuației operaționale (1) considerăm următoarea metodă iterativă:

$$(9) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - [x_n, x_{n+1}; P]A_n); \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

unde x_0 este un punct arbitrar al spațiului X , iar $A_0: Y \rightarrow X$ un operator liniar arbitrar. Prin $[x, y; P]: X \rightarrow Y$ s-a notat diferența divizată de ordinul 1 a operatorului P pe punctele x, y . Se va nota cu $[x, y, z; P]: X \rightarrow (X \rightarrow Y)$ diferența divizată de ordinul 2 a operatorului P .

Relativ la ecuația operațională (1) și metoda iterativă (9) avem următorul rezultat.

TEOREMA 2. Dacă în sfera $S = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ sînt îndeplinite condițiile:

1) Operatorul P admite diferențe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv, diferența divizată de ordinul 1 admite invers și $\|[x, y; P]^{-1}\| \leq B < +\infty$, pentru orice $x, y \in S$ și $\|[x, y, z; P]\| \leq M < +\infty$, pentru orice $x, y, z \in S$.

2) Operatorul inițial A_0 este mărginit și $\|A_0\| \leq 2B$.

3) Sînt satisfăcute inegalitățile:

$$\max \left\{ 4MB^2 \|P(x_0)\|, \frac{1}{9} \sqrt{4MB^2 \|P(x_1)\|}, \|E - [x_0, x_1; P]A_0\|^2 \right\} \leq \frac{1}{9} d,$$

$$\text{unde } d < 1 \text{ și } r = \frac{d}{18MB(1-d^{p-1})}, \text{ cu } p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Atunci:

1) Șirurile $(x_n)_{n=0}^\infty$ și $(A_n)_{n=0}^\infty$ sînt convergente.

2) Ecuația (1) admite soluția $x^* \in S$ ce se poate obține ca limită a șirului $(x_n)_{n=0}^\infty$ generat de (9).

3) Limita șirului de operatori $(A_n)_{n=0}^\infty$ este și limita șirului de operatori $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=0}^\infty$. ($[x_n, x_{n+1}; P]^{-1}$ există pentru oricî $n = 0, 1, \dots$, deoarece după cum va reieși din demonstrație, $x_n \in S$ pentru orice $n = 0, 1, \dots$).

4) Au loc inegalitățile:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{d^{p^n(p-1)}}{18MB(1-d^{p^n(p-1)})}$$

și

$$\|A^* - A_n\| \leq \frac{2B}{9} \left[2d^{p^n-1} + \frac{3d^{p^n}}{1-d^{p^n(p-1)}} \right].$$

Demonstrație. La fel ca în demonstrația teoremei 1 vom arăta că au loc următoarele proprietăți:

a) $x_n \in S, n = 0, 1, \dots$,

b₁) $\rho_n = 4MB^2 \|P(x_n)\| \leq \theta_n d^{\alpha_n} \leq \frac{1}{9} d^{p^n}; n = 0, 1, \dots$

b₂) $\delta_n = \|E - [x_{n-1}, x_n; P]A_n\| \leq \mu_n d^{\beta_n} \leq \frac{1}{9} d^{p^n-1}; n = 0, 1, \dots$

unde $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ și $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\theta_{n+1} = \theta_n^2 d^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} + \theta_n \mu_n d^{\beta_n - \alpha_{n-1}},$$

$$\mu_{n+1} = (\mu_n d^{\beta_n - \alpha_{n-1}} + \theta_n d^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \theta_{n-1})^2,$$

cu $\theta_0 = \theta_1 = \mu_1 = \frac{1}{9}$, iar șirurile $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ și $(\beta_n)_{n=0}^\infty$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\begin{cases} \beta_{n+1} = 2\alpha_{n-1} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

cu $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 1$

c) $\|A_n\| \leq 2B; n = 1, 2, \dots$

Ca în demonstrația teoremei 1, vom folosi metoda inducției matematice.

Proprietățile a), b₁), c) sînt verificate prin ipotezele teoremei pentru $n = 0$, iar b₂) pentru $n = 1$.

Presupunem că proprietățile a)–c) sînt adevărate pentru $n \leq k$ și vrem să le demonstrăm pentru $n = k + 1$.

Pentru proprietatea a) avem:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k \|A_i\| \cdot \|P(x_i)\| \leq \\ &\leq 2B \sum_{i=0}^k \|P(x_i)\| \leq 2B \frac{1}{9 \cdot 4 \cdot MB^2} \sum_{i=0}^k d^{p^i} = \\ &= \frac{d}{18MB} (1 + d^{p-1} + d^{p^2-1} + \dots + d^{p^k-1}) < \frac{d}{18MB(1-d^{p-1})} = r, \end{aligned}$$

deoarece $i(p-1) \leq p^i - 1$. Deci $x_{k+1} \in S$

Pentru proprietățile b₁) și b₂) stabilim inegalitățile

$$(10) \quad \|P(x_{k+1})\| \leq M \|A_k\| \|P(x_k)\| (\|A_k\| \|P(x_k)\| + \|A_{k-1}\| \|P(x_{k-1})\|) + \|P(x_k)\| \|E - [x_{k-1}, x_k, P]A_k\|,$$

$$(11) \quad \|E - [x_k, x_{k+1}; P]A_{k-1}\| \leq \leq \{ \|E - [x_{k+1}, x_k; P]A_k\| + M \|A_k\| (\|A_k\| \cdot \|P(x_k)\| + \|A_{k-1}\| \cdot \|P(x_{k-1})\|) \}.$$

Într-adevăr folosind formula de interpolare a lui Newton în spații abstracte avem:

$$\begin{aligned} \|P(x_{k+1})\| &\leq \|P(x_{k+1}) - P(x_k) - [x_{k+1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\| + \\ &+ \|P(x_k) + [x_{k+1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\| \leq \|[x_{k+1}, x_k, x_{k-1}; P]\| \times \\ &\times \|x_{k+1} - x_k\| \|x_{k+1} - x_{k-1}\| + \|P(x_k) + [x_{k-1}, x_k; P](x_{k+1} - x_k)\|. \end{aligned}$$

Din ipoteza inducției rezultă:

$$\begin{aligned} \|P(x_{k+1})\| &\leq M \|A_k\| \|P(x_k)\| (\|A_k\| \|P(x_k)\| + \|A_{k-1}\| \|P(x_{k-1})\|) + \\ &+ \|P(x_k)\| \|E - [x_{k-1}, x_k; P] A_k\|. \end{aligned}$$

De asemenea:

$$\begin{aligned} \|E - [x_k, x_{k+1}; P] A_{k+1}\| &\leq \|E - 2[x_k, x_{k+1}; P] A_k + ([x_k, x_{k+1}; P] A_k)^2\| \leq \\ &\leq \|E - [x_k, x_{k+1}; P] A_k\|^2 \leq \{\|E - [x_{k-1}, x_k; P] A_k\| + \\ &+ \|[x_{k-1}, x_k; P] - [x_k, x_{k+1}; P]\| \|A_k\|\}^2 \leq \{\|E - [x_k, x_{k-1}; P] A_k\| + \\ &+ \|A_k\| \|[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; P]\| (\|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\|)\}^2. \end{aligned}$$

de unde pe baza ipotezelor inducției rezultă (11).

Pe baza notațiilor introduse într-un mod analog ca în cazul demonstrației teoremei 1 obținem sistemul de inegalități recurente:

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_{k+1} \leq \rho_k^2 + \rho_k \rho_{k-1} + \rho_k \delta_k \\ \delta_{k+1} \leq (\delta_k + \rho_k + \rho_{k-1})^2. \end{cases}$$

Din ipoteza inducției avem:

$$\rho_k \leq \theta_k d^{\alpha_k}, \quad \rho_{k-1} \leq \theta_{k-1} d^{\alpha_{k-1}}, \quad \delta_k \leq \mu_k d^{\beta_k},$$

unde $\theta_k, \theta_{k-1}, \mu_k$ și $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \beta_k$ sînt numere cunoscute. Din inegalitățile (12) deducem:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq \theta_k^2 d^{2\alpha_k} + \theta_k \theta_{k-1} d^{\alpha_k + \alpha_{k-1}} + \theta_k \mu_k d^{\alpha_k + \beta_k} = \theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}} \\ \delta_{k+1} &\leq (\mu_k d^{\beta_k} + \theta_k d^{\alpha_k} + \theta_{k-1} d^{\alpha_{k-1}})^2 = \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}}. \end{aligned}$$

Se observă că trebuie să avem:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \min \{2\alpha_k, \alpha_k + \alpha_{k-1}, \alpha_k + \beta_k\} \\ \beta_{k+1} &= 2 \min \{\alpha_k, \beta_k, \alpha_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Arătăm prin inducție că are loc inegalitatea dublă:

$$(13) \quad \alpha_s \geq \beta_s \geq \alpha_{s-1}; \quad s = 1, 2, \dots$$

Pentru $s = 1$, inegalitatea este evidentă. Presupunem că ea are loc pentru $s = 1, 2, \dots, t$. Avem atunci:

$$\begin{aligned} 2\alpha_t &= 2\alpha_t \geq 2\alpha_{t-1} \\ \alpha_t + \alpha_{t-1} &\geq 2\alpha_{t-1} \geq \alpha_{t-1} + \beta_{t-1} \\ \alpha_t + \beta_t &\geq 2\beta_t \geq 2\alpha_{t-1} \geq \alpha_{t-1} + \alpha_{t-2} \end{aligned}$$

de unde:

$$\begin{aligned} \min \{2\alpha_t, \alpha_t + \alpha_{t-1}, \alpha_t + \beta_t\} &\geq 2 \min \{\alpha_t, \beta_t, \alpha_{t-1}\} \geq \\ &\geq \min \{2\alpha_{t-1}, \alpha_{t-1} + \alpha_{t-2}, \alpha_{t-1} + \beta_{t-1}\}, \end{aligned}$$

deci:

$$\alpha_{t+1} \geq \beta_{t+1} \geq \alpha_t,$$

prin urmare inegalitatea dublă (13) are loc pentru orice $s = 1, 2, \dots$. Atunci din expresiile lui α_{k+1} și β_{k+1} rezultă:

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = \alpha_k + \alpha_{k-1} \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_{k-1}. \end{cases}$$

Observăm atunci că θ_{k+1} și μ_{k+1} sînt dați de relațiile:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k^2 d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k \theta_{k-1} + \theta_k \mu_k d^{\beta_k - \alpha_{k-1}} \\ \mu_{k+1} &= (\mu_k d^{\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}} + \theta_k d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_{k-1})^2. \end{aligned}$$

Demonstrăm acum că dacă p este un număr pozitiv care satisface ipotezele teoremei, atunci au loc inegalitățile:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k-1} - p^{k+1}} < \frac{1}{9}, \quad \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} < \frac{1}{9}.$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1} - p^{k+1}} &= (\theta_k^2 d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_k \theta_{k-1} + \theta_k \mu_k d^{\beta_k - \alpha_{k-1}}) d^{\alpha_{k+2} - p^{k+1}} \\ \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} &= (\mu_k d^{\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}} + \theta_k d^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} + \theta_{k-1})^2 d^{\beta_{k+1} - p^k}. \end{aligned}$$

Din ipoteza inducției avem:

$$\theta_{k-1} < \frac{1}{9} d^{p_{k-1} - \alpha_{k-1}}, \quad \theta_k < \frac{1}{9} d^{p_k - \alpha_k}, \quad \mu_k < \frac{1}{9} d^{p_{k-1} - \beta_k},$$

de unde rezultă:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1} - p_{k+1}} < \frac{1}{81} (d^{2p_k - p_{k+1}} + 2d^{p_k + p_{k-1} - p_{k+1}})$$

și

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} &< \frac{1}{81} (2d^{p_k - \alpha_{k-1}} + d^{p_{k-1} - \alpha_{k-1}})^2 d^{\beta_{k+1} - p^k} = \\ &= \frac{1}{81} (4d^{p_k} + 4d^{p_{k-1}} + d^{2p_{k-1} - p^k}), \end{aligned}$$

de unde observându-se că dacă $p \in]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ [toți exponenții ce intervin fiind pozitivi rezultă că:

$$\theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1} - p_{k+1}} < \frac{3}{81} < \frac{1}{9}$$

$$\mu_{k+1} d^{\beta_{k+1} - p^k} < \frac{9}{81} = \frac{1}{9},$$

de unde:

$$\rho_{k+1} \leq \theta_{k+1} d^{\alpha_{k+1}} < \frac{1}{9} d^{p_{k+1}}$$

$$\delta_{k+1} \leq \mu_{k+1} d^{\beta_{k+1}} < \frac{1}{9} d^{p^k},$$

deci proprietățile $b_1)$, $b_2)$ sînt adevărate și pentru $n = k + 1$.

Pentru relația c) avem:

$$\begin{aligned} \|A_{k+1}\| &= \|[x_k, x_{k+1}; P]^{-1} + A_{k+1} - [x_k, x_{k+1}; P]^{-1}\| \leq \\ &\leq \|[x_k, x_{k+1}; P]^{-1}\| (1 + \|E - [x_k, x_{k+1}; P]A_{k+1}\|) \leq \\ &\leq B(1 + \delta_{k+1}) < B \left(1 + \frac{1}{9} d^{p^k}\right) < \frac{10}{9} B < 2B. \end{aligned}$$

Prin urmare am demonstrat prin inducție că relațiile a), $b_1)$, c) sînt adevărate pentru orice $n = 0, 1, \dots$ iar $b_2)$ pentru orice $n = 1, 2, \dots$

Avem atunci:

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \|P(x_i)\| < \\ &< 2B \frac{1}{36MB^2} \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i} \leq \frac{d^{p^n}}{18MB} (1 + d^{p^{n+1} - p^n} + \dots + d^{p^{n+m-1} - p^n}) < \\ &< \frac{d^{p^n}}{18MB} [1 + d^{p^n} + \dots + (d^{p^n(p-1)})^{m-1} + \dots] < \frac{d^{p^n}}{18MB(1 - d^{p^n(p-1)})} \end{aligned}$$

Deoarece $d < 1$ rezultă că $(x_n)_{n=0}^\infty$ este fundamental deci și convergent.

Dacă $m \rightarrow \infty$ obținem;

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{d^{p^n}}{18MB(1 - d^{p^n(p-1)})}; \quad n = 0, 1, \dots$$

și în plus pentru $n = 0$

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{d}{18MB(1 - d^{p-1})},$$

deci $x^* \in S$.

Din faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(x_n)\| = 0$ și din continuitatea lui P rezultă că: $P(x^*) = 0$ deci x^* este soluție a ecuației (1).

Arătăm că șirul de operatori $(A_n)_{n=0}^\infty$ definit de (9) este convergent. Avem:

$$\begin{aligned} \|A_{i+1} - A_i\| &= \|A_i(2E - [x_i, x_{i+1}; P]A_i) - A_i\| \leq \\ &\leq \|A_i\| \|E - [x_i, x_{i+1}; P]A_i\| \leq 2B(\delta_i + \rho_i + \rho_{i-1}) \leq \frac{2B}{9} (2d^{p^{i-1}} + d^{p^i}). \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} \|A_{m+n} - A_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leq \frac{2B}{9} \left(2 \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^{i-1}} + \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{p^i} \right) = \\ &= \frac{2B}{9} \left[2d^{p^{n-1}} + d^{p^{n+m-1}} + 3 \frac{d^{p^n}}{1 - d^{p^n(p-1)}} \right], \end{aligned}$$

de unde se observă că șirul $(A_n)_{n=0}^\infty$ este fundamental. Deoarece dacă X, Y sînt spații Banach și $(Y, X)^*$ (spațiul aplicațiilor liniare și continue defi-

nite pe Y cu valori în X , este spațiu Banach. Cum $A_n \in (Y, X)^*$ pentru orice $n = 0, 1, \dots$ deci șirul $(A_n)_{n=0}^\infty$ este convergent. Fie A^* limita șirului A_n . Avem:

$$\|A^* - A_n\| \leq \frac{2B}{9} \left(2d^{p^{n-1}} + \frac{3d^{p^n-1}}{1-d^{p^n}(p-1)} \right).$$

Vom arăta că și șirul $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=1}^\infty$ este convergent și converge tot către A^* . Avem:

$$\begin{aligned} \|A_n - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| &\leq \| [x_n, x_{n+1}; P]^{-1} \| \|E - [x_n, x_{n+1}; P] A_n\| < \\ &< \frac{2B}{9} (2d^{p^{n-1}} + d^{p^n}). \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} \|A^* - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| &\leq \|A^* - A_n\| + \|A_n - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\| < \\ &< \|A^* - A_n\| + \frac{2B}{9} (2d^{p^{n-1}} + d^{p^n}), \end{aligned}$$

de unde rezultă că există limita șirului $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})_{n=0}^\infty$ și această limită este A^* .

Cu aceasta teorema este demonstrată.

3. Ca mai sus vom presupune că P admite diferențe divizate pînă la ordinul 2 inclusiv. Vom considera pentru rezolvarea ecuației operaționale (1) următoarea metodă iterativă: [6], [7], [4], [13]

$$(14) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2E - [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P] A_n); \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

unde x_0 este un punct arbitrar al spațiului X , $A_0: Y \rightarrow X$ este un operator linear arbitrar, iar $Q: X \rightarrow X$ este un operator iterativ atașat lui P , adică un operator ce admite ca și punct fix orice soluție a ecuației (1).

Se stabilește următorul rezultat:

TEOREMĂ 3. Dacă în sfera $S = \{x \mid \|x - x\| \leq r\}$ sînt îndeplinite condițiile:

1) Operatorul P admite diferențe divizate la ordinul 2 inclusiv, diferența divizată de ordinul 1 admite invers și $\|[x, y; P]^{-1}\| \leq B < +\infty$ pentru orice $x, y \in S$ și $\|[x, y, z; P]\| \leq M < +\infty$ pentru orice $x, y, z \in S$.

2) Operatorul Q satisface condițiile $\|Q(x) - Q(y)\| \leq L \|x - y\|$ pentru orice $x, y \in S$; $\|x - Q(x)\| \leq \|P(x)\|$ pentru orice $x \in S$.

3) Sînt îndeplinite condițiile:

$$\max \{2MB(2B + \alpha) \|P(x_0)\|, \|E - [x_0, Q(x_0); P] A_0\|\} \leq cd,$$

unde

$$d < 1, \quad r = \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})},$$

$$c = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{1 + \alpha} \right\}, \quad \alpha' = \frac{1 + L}{2B + \alpha},$$

unde $p = 2 - \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$.

Atunci:

1) Șirurile $(x_n)_{n=0}^\infty$ și $(A_n)_{n=0}^\infty$ sînt convergente.

2) Ecuația (1) admite soluția $x^* \in S$ ce se poate obține ca limită a șirului $(x_n)_{n=0}^\infty$ generat de (14) și

$$A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = [x^*, Q(x^*); P]^{-1} = [P'(x^*)]^{-1}.$$

3) Au loc inegalitățile:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{cd^{p^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p^n}(p-1))}, \quad n = 0, 1, \dots$$

și

$$\|A^* - A_n\| \leq Bcd^{p^n} \left[1 + \frac{2B(1 + L)}{(2B + \alpha)(1 - d^{p^n}(p-1))} \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

Demonstrație. Ca și la teoremele precedente vom arăta folosind metoda inducției matematice că pentru orice $n = 0, 1, \dots$ au loc următoarele proprietăți:

$$a) \quad x_n \in S, \quad Q(x_n) \in S, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$b) \quad \begin{cases} \rho_n = 2MB(2B + \alpha) \|P(x_n)\| \leq \theta_n d^{2^n} \leq cd^{p^n} \\ \delta_n = \|E - [x_n, Q(x_n); P] A_n\| \leq \mu_n d^{2^n} \leq cd^{p^n}, \end{cases}$$

unde $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ și $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ sînt generate de relațiile de recurență:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n^2 + \theta_n \mu_n \\ \mu_{n+1} = (\mu_n + \alpha' \theta_n)^2; \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

cu $\theta_0 = c$, $\mu_0 = c$

$$c) \quad \|A_n\| \leq 2B, \quad n = 0, 1, \dots$$

Din ipotezele teoremei desprindem $x_0 \in S$, $\rho_0 \leq \theta_0 d = cd$, $\delta_0 \leq \mu_0 d = cd$. Pentru a arăta $Q(x_0) \in S$ se calculează:

$$\|Q(x_0) - x_0\| \leq \alpha \|P(x_0)\| \leq \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} < r,$$

deci $Q(x_0) \in S$. De asemenea:

$$\begin{aligned} \|A_0\| &\leq \|[x_0, Q(x_0); P]^{-1} + A_0 - [x_0, Q(x_0); P]^{-1}\| \leq \\ &\leq \|[x_0, Q(x_0); P]^{-1}\| (1 + \|E - [x_0, Q(x_0); P]A_0\|) \leq 2B. \end{aligned}$$

Prin urmare proprietățile a)–d) au loc pentru $n = 0$. Presupunem că ele sînt adevărate pentru $n = 0, 1, \dots, k$. Arătăm că în aceste ipoteze ele sînt adevărate pentru $n = k + 1$.

Pentru proprietatea a) avem:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k \|A_i\| \|P(x_i)\| \leq \\ &\leq 2B \frac{cd}{2MB(2B + \alpha)} (1 + d^{p-1} + \dots + d^{p(k-1)}) \leq \\ &\leq \frac{cd}{M(2B + \alpha)} (1 + d^{p-1} + \dots + d^{k(p-1)} + \dots) < \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} \leq r. \end{aligned}$$

De asemenea:

$$\begin{aligned} \|Q(x_{k+1}) - x_0\| &\leq \|Q(x_{k+1}) - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_0\| \leq \\ &\leq \alpha \|P(x_{k+1})\| + \|x_{k+1} - x_0\| \leq \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} < \\ &< \frac{\alpha cd}{2MB(2B + \alpha)} + \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} = r. \end{aligned}$$

Deci: $x_{k+1} \in S$, $Q(x_{k+1}) \in S$

Pentru demonstrarea proprietăților b) și c) se stabilesc inegalitățile:

$$\begin{aligned} \|P(x_{k+1})\| &\leq M \|A_k\| (\|A_k\| + \alpha) \|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\| \cdot \|E - [x_k, Q(x_k); P]A_k\| \\ \|E - [x_{k+1}, Q(x_{k+1}); P]A_{k+1}\| &\leq \{ \|E - [x_k, Q(x_k); P]A_k\| + \\ &+ M(1 + L) \|A_k\| \|P(x_k)\| \}^2 \end{aligned}$$

Aceste inegalități se stabilesc într-un mod cu totul analog ca în cazul teoremelor 1–2. Bazîndu-ne pe $\|A_k\| \leq 2B$ și cu notațiile introduse ajungem la

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq \rho_k^2 + \rho_k \delta_k \\ \delta_{k+1} &\leq (\delta_k + \alpha' \rho_k)^2, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \alpha' = \frac{1 + L}{2B + \alpha}.$$

Din aceste inegalități recurente într-o manieră absolut analogă cu demonstrația teoremei 1 rezultă că:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq \theta_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq cd^{2^{k+1}} \\ \delta_{k+1} &\leq \mu_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq cd^{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

unde p este un număr pozitiv oricît de aproape de 2.

Proprietatea d) rezultă analog cu cazul teoremelor 1)–2).

Bazîndu-ne pe proprietățile a)–d) rezultă că:

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{cd^{2^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{2^n(p-1)})},$$

de unde rezultă că șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este fundamental deci și convergent către x^* care va fi și soluția ecuației (1). Aceasta ca în cazul teoremelor precedente rezultă din faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x) = \theta$ și din continuitatea lui P .

Eroarea cu care x_n îl aproximează pe x^* este dată de inegalitatea:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{cd^{2^n}}{M(2B + \alpha)(1 - d^{2^n(p-1)})},$$

de unde rezultă că

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{cd}{M(2B + \alpha)(1 - d^{p-1})} < r,$$

deci $x^* \in S$.

Pentru stabilirea convergenței șirului $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ avem inegalitatea :

$$\begin{aligned} \|[x^*, Q(x^*); P]^{-1} - A_n\| &\leq \|[x^*, Q(x^*); P]^{-1}\| \|E - [x^*, Q(x^*); P] A_n\| \leq \\ &\leq B\{\|E - [x_n, Q(x_n); P] A_n\| + \|[x_n, Q(x_n); P] - [x^*, Q(x^*); P]\| \|A_n\|\} \leq \\ &\leq B\{\delta_n + (\|[x_n, Q(x_n), Q(x^*); P]\| \|Q(x^*) - Q(x_n)\| \|A_n\|) + \\ &\quad + \|[x_n, x^*, Q(x^*); P]\| \|x_n - x^*\| \cdot \|A_n\|\} \leq \\ &\leq B\{\delta_n + M(L+1)2B\|x^* - x_n\|\}, \end{aligned}$$

de unde se observă că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[x^*, Q(x^*); P]^{-1} - A_n\| = 0$$

de unde rezultă că șirul de operatori $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent și are ca limită pe $[x^*, Q(x^*); P]^{-1} = [P'(x^*)]^{-1}$. Înlocuind $\|x^* - x_n\|$ cu majoranta cunoscută se obține eroarea cu care A_n îl aproximează pe $[x^*, Q(x^*); P]^{-1}$ care este dată de inegalitatea :

$$\|A^* - A_n\| \leq Bc\alpha^{p^n} \left[1 + \frac{2B(L+1)}{(2B+\alpha)(1-\alpha^{p^n(p-1)})} \right].$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans cette note nous considérons l'équation opérationnelle $P(x)=0$ où $P: X \rightarrow Y$ est un opérateur non-linéaire; X, Y étant des espaces de Banach et en partant du résultat de S. UL'M [13] nous nous proposons d'étudier la convergence et la vitesse de convergence des méthodes $x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n)$; $n = 0, 1, \dots$ où la suite $(A_n)_{n=0}^{\infty}, A_n: Y \rightarrow X$ est don-

née par la relation de récurrence $A_{n+1} = A_n(2E - B_n A_n)$ où B_n est respectivement

$$P'(x_{n+1}), [x_n, x_{n+1}; P] \text{ ou } [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P],$$

Q est un opérateur itératif associé à P . On démontre que l'ordre de convergence de ces trois méthodes est respectivement $2 - \varepsilon$, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \varepsilon$ et $2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Collatz, L., *Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **II** (1), 66-75 (1958).
- [2] Jankó, B., *Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires*. Publications of the Mathematical Institute Hungarian Academy of Sciences, **II** Ser. A, 301-311 (1961).
- [3] Jankó, B., *Rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach*. București Editura Academiei, R.S.R. (1969).
- [4] Păvăloiu I., *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires*. Revue Roumaine de Mathématiques pures et Appliquées, **XIII** (6), 857-861 (1968).
- [5] Păvăloiu I., *Interpolation dans des espaces linéaires normés et applications*. Mathematica (Cluj) **XII** (35), 1, 149-158 (1970).
- [6] Păvăloiu I., *Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence*. Mathematica, (Cluj) **XII** (35), 2, 309-324 (1970).
- [7] Păvăloiu I., *Considerații asupra metodelor iterative obținute prin interpolare inversă*. Studii și cercetări matematice, **XXIII** (10), 1545-1549 (1971).
- [8] Popoviciu, T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique*. Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XIII**, 1, 75-78 (1968).
- [9] Sergeev, A., S., *O metode hord*. Sibirski mat. jurnal, **XI**, (2), 282-289 (1961).
- [10] Traub, J. F., *Iterative methods for the solution of equations*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs N.J. (1964).
- [11] Ul'm, S., *Ob obščennih razdelennih raznostiah I* Izv. Akad. Nauk. Estonski S.S.R. **16**, 1, 13-26 (1967).
- [12] Ul'm, S., *Ob obščennih razdelennih raznostiah II* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R. **16**, 2, 146-155 (1967).
- [13] Ul'm, S., *Ob iteračionnyh metodah s posledovatel'noi approksimacii obratnovo operatora* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R., **16**, 4, 403-411 (1967).

Primit la 8. V. 1972.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România