REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation, vol. 1 (1972), pp. 45–61
ictp.acad.ro/jnaat

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES

par
A. DIACONU et I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

Dans l'application de quelques méthodes itératives à la résolution des équations opérationnelles non-linéaires la difficulté essentielle est la nécessité de la résolution à chaque pas d'itération d'une équation opérationnelle linéaire.

Par exemple, on considère pour la résolution de l'équation suivante:

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

où $P : X \to Y$ est un opérateur non-linéaire, X, Y étant des espaces de Banach, la méthode bienconnue de Newton-Kantorovitch:

$$x_{n+1} = x_n - \left[P'(x_n)\right]^{-1} P(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

On observe que pour l'application de cette méthode il este nécessaire de résoudre à chaque pas d'itération l'équation opérationnelle linéaire suivante:

$$\left(P'(x_n)\right)(h) = -P(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

où $P'(x) : X \to Y$ pour x fixé, est un opérateur linéaire, représentant la dérivée de Fréchet de l'opérateur P dans le point x.

Cette difficulté se peut éliminer, si on considère outre la suite d'itérations $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite d'opérateurs linéaires $(A_n)_{n=0}^{\infty}; A_n : Y \to X$ tend vers l'inverse de l'opérateur linéaire qui intervient dans la méthode itérative considérée.

Dans le cas de la méthode de Newton ce problème a été étudié par S. Ul'm dans le travail [14]. Pour la résolution de l'équation (1) S. Ul'm a considéré la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n(2E - P(x_{n+1}) A_n), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{3}$$

où $A_0 : Y \to X$ est un opérateur linéaire arbitraire. On observe que $A_n : Y \to X$ pour chaque $n = 0, 1, \ldots$

Les résultats de S. Ul'm sont basés sur l'hypothèse que l'équation (1) admet une solution.

Dans la travail [2] nous avons étudié la convergence du procédé itératif (3), sans l'hypothèse de l'existence de la solution de l'equation (1). Nous avons établi le théorème suvant:

THÉORÈME 1. *Si dans la sphère $S = \{x : ||x - x_0|| \le r\}$ les conditions suivantes sont remplies:*

1) *L'opérateur P admet des dérivées de type Fréchét jusqu'à l'ordre 2 inclusivement, la dérivée du premier ordre de l'opérateur P, admet une inverse bornée, 'c'est-à-dire, pour chaque $x \in S$, $\| [P'(x)]^{-1} \| \le B < +\infty$ et $\|P''(x)\| \le M < +\infty$.*
2) *L'élément initial x_0, l'opérateur initial A_0 et les constantes B et M satisfont à la condition:*

$$\max \left\{ 2MB^2 \|P(x_0)\|, \ \left\|E - P'(x_0) A_0\right\| \right\} \le \tfrac{1}{9} d,$$

où $d < 1$ et $r = \frac{d}{9MB(1-d^{p-1})}, p = 2 - \varepsilon, \varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit, alors ont lieu les propriétés suivantes:

1) *Les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}, (A_n)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes*
2) *L'équation (1) admet la soltuion $x^* \in S$ qu'on peut obtenir comme la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (3) et:*

$$A^* = \lim_{n \to \infty} A_n = \left[P'(x^*)\right]^{-1}.$$

On a les inégalités suivantes:

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{d^{p^n}}{9MB\left(1 - d^{p^n(p-1)}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

$$\|A_n - A^*\| \le \frac{Bd^{p^n}}{9\left(1 - d^{p^n(p-1)}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Le résultat présenté ci-déssus, établit outre la convergence du procédé itératif (3) l'existence de la solution de l'équation (1). Les inégalités (4) et (5) donnent la rapidité de convergence, une évaluation de l'erreur et montrent que le procédé itératif (3) a l'ordre de convergence $p = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. En fin le procédé itératif (3) a l'ordre de convergence arbitrairement proche de l'ordre de convergence de la méthode de Newton sans toutefois l'atteindre.

Dans le travail [2] nous avons étudié en même temps d'autres procédés itératifs obtenus à partir de méthodes itératives bien connues. En partant de la méthode de la corde nous avons considéré le procédé itératif suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \left(2E - [x_n, x_{n+1}; P] A_n\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{array}\right. \tag{6}$$

et en partant de la méthode de Steffensen le procédé:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \left(2E - [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P] A_n\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{array}\right. \tag{7}$$

où x_0 est un élément arbitraire de l'espace X, l'opérateur A_0 est un opérateur linéaire arbitraire qui transforme l'espace Y dans $X, [x, y; P] : X \to Y$ est la différence divisées, [6] de l'opérateur P sur les noeuds $x, y \in X$ et l'opérateur Q est un opérateur itératif attaché à l'équation (1), [7].

Relativement aux procédés (6) et (7) nous avons établi les théorèmes suivants:

THÉORÈME 2. *Si dans la sphère $S = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ les conditions suivantes sont remplies.*

1) *L'opéreateur P admet des différences divisées jusqu'à l'ordre 2 inclusivement, la différence divisée du premier ordre admet une inverse et: $\| [x, y; P]^{-1} \| \leq B < +\infty$ pour chaque $x, y \in S$ et $\|[x, y, z; P]\| \leq M < +\infty$ pour chaque $x, y, z \in S$, (par $[x, y, z; P] : X \to (X \to Y)$ nous avons désigné la différence divisée de l'ordre 2 de l'opérateur P).*
2) *L'opérateur A_0 est borné et $\|A_0\| \leq 2B$.*
3) *On a les inégalités:*

$$\max\left\{4MB^2 \|P(x_0)\|, \tfrac{1}{9}\sqrt{4MB^2 \|P(x_1)\|}, \|E - [x_0, x_1; P] A_0\|^2\right\} \leq \tfrac{1}{9} d,$$

où $d < 1$ et $r = \frac{d}{18MB(1-d^{p-1})}, p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit,

alors ont lieu les propositions suivantes:

1) *Les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(A_n)_{n=0}^{\infty}$, générées par (6), sont convergentes.*
2) *L'équation (1) admet la solution $x^* \in S$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.*
3) *Si $A^* = \lim_{n\to\infty} A_n$, alors $A^* = \lim_{n\to\infty} [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}$ (l'opérateur $[x_n, x_{n+1}; P]^{-1}$ existe pour chaque $n = 0, 1, \ldots$, par ce que $x_n \in S$, $n = 0, 1, \ldots$).*

4) *On a les inéqualités suivantes:*

(8) $$\|x^* - x_n\| \le \frac{d^{p^n}}{18MB\left(1-d^{p^n(p-1)}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

(9) $$\|A^* - A_n\| \le \frac{2B}{9}\left[2d^{p^{n-1}} + \frac{3d^{p^n}}{1-d^{p^n(p-1)}}\right], \quad n = 0, 1, \ldots$$

THÉORÈME 3. *Si dans la sphère $S = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ les conditions suivantes sont remplies:*

1) *L'opérateur P admet des différences divisées jusqu'à l'ordre 2 inclusivement, la différence divisée du premier ordre admet une inverse, $\|[x, y; P]^{-1}\| \le B < +\infty$ pour chaque $x, y, \in S$ et $\|[x, y, z; P]\| \le M < +\infty$ pour chaque $x, y, z \in S$.*
2) *L'pérateur Q satisfait aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned} \|Q(x) - Q(y)\| &\le L\|x - y\|, \quad \text{pour chaque} \quad x, y \in S, \quad L \in \mathbb{R}_+, \\ \|x - Q(x)\| &\le \alpha\|P(x)\|, \quad \text{pour chaque} \quad x \in S, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

3) *Les condtions suivantes sont vérifiées:*

$$\max\{2MB(2B+\alpha)\|P(x_0)\|, \|E - [x_0, Q(x_0); P]A_0\|\} \le cd$$

où $d < 1,\ r = \frac{\alpha cd}{2MB(2B+\alpha)} + \frac{cd}{M(2B+\alpha)(1-d^{p-1})},$

$$c = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\alpha'}\right\}, \ \alpha' = \frac{1+L}{2B+\alpha}, \ p = 2 - \varepsilon, \ \varepsilon > 0$$

arbitrairement petit, alors:
1) *Les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(A_n)_{n=0}^{\infty}$, générées par (7), sont convergentes.*
2) *L'équation (1) admet la solution $x^* \in S$ qu'on peut obtenir comme la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par (7) et:*

$$A^* = \lim_{n\to\infty} A_n = [x^*, Q(x^*); P]^{-1} = \left[P'(x^*)\right]^{-1}$$

(donc nous pourons conclure à l'existence de la dérivée de type Fréchet de l'opérateur P dans le point x^*)

3) *Sont vérifiées les inégalités:*

(10) $$\|x^* - x_n\| \leq \frac{cd^{p^n}}{M(2B+\alpha)\left(1-d^{p^n(p-1)}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(11) $$\|A^* - A_n\| \leq Bcd^{p^n}\left[1 + \frac{2B(1+L)}{(2B+\alpha)\left(1-d^{p^n(p-1)}\right)}\right], \quad n = 0, 1, \ldots,$$

Les théorèmes (2) et (3) montrent que l'ordre de convergence des procédés (6) et (7) est $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \varepsilon$ respectivement $2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement approché de l'ordre de convergence de la méthode de la corde, respectivement de la méthode de Steffensen, sans toutefois atteindre l'ordre de ces méthodes.

Pour la démonstration des théorèmes énoncés nous avons utilisé la méthode des systèmes des inéqualités récurrentes.

Pour les procédés (3) et (7) on emploie le système suivant:

(12) $$\begin{cases} \rho_{n+1} \leq \rho_n^2 + \rho_n\delta_n \\ \delta_{n+1} \leq (\delta_n + a\rho_n)^2, \qquad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

où $a = 2$ dans le cas du procédé (3) et $a = \alpha' = \frac{1+L}{2B+\alpha}$ dans le cas du procédé (7). On choisit $\rho_n = 2MB^2 \|P(x_n)\|$ dans le cas du procédé (3) et $\rho_n = 2MB(2B+\alpha)\|P(x_n)\|$ dans le cas du procédé (7), $\delta_n = \|E - P'(x_n) A_n\|$ dans le cas du procédé (3) et $\delta_n = \|E - [x_n, Q(x_n); P] A_n\|$ dans le cas du procedé (7). Avec les notations ci-dessus ρ_n et δ_n vérifient le système (12).

Relativement au procédé (6) on choisit $\rho_n = 4MB^2 \|P(x_n)\|$ et $\delta_n = \|E - [x_{n-1}, x_n; P] A_n\|$ et on démontre que l'on a les ineqalités suivantes:

(13) $$\begin{aligned} &\rho_{n+1} \leq \rho_n^2 + \rho_n\rho_{n-1} + \rho_n, \delta_n \\ &\delta_{n+1} \leq (\delta_n + \rho_n + \rho_{n-1})^2 \end{aligned}$$

Des systèmes (12) et (13) on déduit facilement que: $\rho_n \leq cd^{p^n}$ et $\delta_n \leq cd^{p^n}$ pour les procédés (3) et (7) et $\rho_n \leq cd^{p^n}$, $\delta_n \leq cd^{p^{n-1}}$ pour le procédé (6). La constante $c = \frac{1}{9}$ pour les procédés (3) et (6) et $c = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\alpha'}\right\}$ pour le procédé (7), $p = 2 - \varepsilon$ pour les procédés (3) et (7) et $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \varepsilon$ pour le procédé (6), $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. En utilisant ces inégalités on déduit facilement dans chaque cas que les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Les autres conclusions se vérifient directement par le calcul.

Nous nous posons maintenant la question suivante: si au lieu de la méthode de type Schultz utilisée pour l'approximation des opérateurs linéaires $([P'(x_n)]^{-1})_{n=0}^{\infty}$, $([x_n, x_{n+1}; P]^{-1})$ et $([x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P])_{n=0}^{\infty}$ nous utilisions une méthode plus rapidement convergente, l'ordre de convergence des procédés obtenus pourrait-il devenir respectivement égal à l'ordre de convergence des méthodes de Newton, Steffensen respectivement de la méthode de la corde?

Pour l'approximation de l'inverse d'un opérateur linéaire $A : Y \to X$ la méthode suivante est bien connue.

$$A_{n+1} = A_n\big(3E - 3AA_n + (AA_n)^2\big), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

qui est la méthode de Tchébischeff pour le calcul de l'inverse des opérateurs linéaires. Cette méthode a l'ordre de convegence 3.

Cette méthode se peut combiner avec la méthode de Newton, la méthode de la corde et de Steffensen. Nous obtenons alors les trois procédées suivants:

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \left[3E - 3P(x_{n+1}) A_n + (P'(x_{n+1}) A_n)^2\right], \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

(15)
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \left[3E - 3[x_n, x_{n+1}; P] A_n + ([x_n, x_{n+1}; P] A_n)^2\right], \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

(16)
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \left[3E - 3[x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P] A_n + ([x_{n+1}, Q(x_{n+1}); P] A_n)^2\right], \end{cases}$$
$n = 0, 1, \ldots$

Pour étudier les convergences des procédés itératifs (14) et (16) nous employons le lemme suivant.

Lemme 1. *Soient données les suites* $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$, $\rho_n \geq 0$, $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$, $\delta_n \geq 0$ *qui satisfont aux inégalités récurrentes suivantes:*

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} \rho_{n+1} \leq \rho_n^2 + \rho_n \delta_n \\ \delta_{n+1} \leq (\delta_n + a\rho_n)^3, \quad a > 1, \ n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Si $\rho_0 \leq \alpha d$, $\delta_0 \leq \beta d$, *où* $\beta < 1$, $\alpha < 1 - \beta$ *et* $d < \frac{\beta}{[a+(1-a)\beta]^3}$, *alors les éléments des suites données satisfont aux inégalités:*

$$\text{(18)} \quad \rho_n \leq \alpha d^{2^n}, \quad \delta_n \leq \beta d^{2^n}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Démonstration. Nous démontrerons en utilisant la méthode de l'induction mathématique que pour $n = 0, 1, \ldots$ sont vraies les inégalités suivantes.

$$\rho_n \leq \theta_n d^{2^n} \leq \alpha d^{2^n}, \quad \delta_n \leq \mu_n d^{2^n} \leq \beta d^{2^n} \tag{19}$$

où:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0^2 + \theta_0 \mu_0 \\ \mu_1 = (\mu_0 + a\theta_0)^3 \, d \end{cases} \tag{20}$$

et

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n^2 + \mu_n \theta_n \\ \mu_{n+1} = (\mu_n + a\theta_n)^3 \, d^{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{21}$$

Pour $n = 0$ les inégalités (19) résultent des hypothèses du lemme. Pour $n = 0$ de (17) on a:

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \rho_0^2 + \rho_0 \delta_0 \\ \delta_1 &\leq (\delta_0 + a\rho_0)^3 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \left(\theta_n^2 + \theta_0 \mu_0\right) d^2 \leq \left(\alpha^2 + \alpha\beta\right) d^2 < \alpha d^2 \\ \delta_1 &\leq (\mu_0 + a\theta_0)^3 \, d d^2 \leq (\beta + a\alpha)^3 \, d d^2 < \beta d^2 \end{aligned}$$

parceque si $\beta < 1$ et $d < \frac{\beta}{[a+(1-a)\beta]^3}$, $a > 1$, alors:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha\beta < \alpha \\ (\beta + a\alpha)^3 \, d < \beta. \end{cases}$$

Nous supposons maintenant que les inégalités (19) sont vraies pour $n = k$ et nous montrerons qu'elles ont lieu pour $n = k + 1$

En effet de (17) nous déduisons:

$$\begin{cases} \rho_{k+1} \leq \rho_k^2 + \rho_k \delta_k \\ \delta_{k+1} \leq \left(\delta_k^- + a\rho_k\right)^3 \end{cases}$$

d'où, en tenant compte de (19) et de l'hypothése de l'induction on a:

$$\rho_{k+1} \leq \left(\theta_k^2 + \theta_k \mu_k\right) d^{2^{k+1}} \leq \left(\alpha^2 + \alpha\beta\right) d^{2^{k+1}} < \alpha d^{2^{k+1}},$$
$$\delta_{k+1} \leq \left(\mu_k + a\theta_k\right)^3 d^{3.2^k} \leq \left(\beta + a\alpha\right)^3 d^{2^k} d^{2^{k-1}} + \beta d^{2^{k-1}},$$

par ce que des hypothèses du théorème il résulte $d < 1$.

Il résulte que les inégalités (19) sont vraies pour chaque n et tenant compte de fait que $d < 1$ nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Le lemme est démontré. □

Pour la méthode (15) nous établirons maintenant le:

Lemme 2. *Soient données les suites* $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$, $\rho_n \geq 0$, $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$, $\delta_n \geq 0$ *qui satisfont aux inégalités récurrentes suivantes:*

$$\begin{cases} \rho_{n+1} \leq \rho_n^2 + \rho_n \rho_{n-1} + \rho_n \delta_n \\ \delta_{n+1} \leq \left(\delta_n + \rho_n + \rho_{n-1}\right)^3, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{22}$$

Si $\rho_0 < \alpha d$, $\rho_1 < \alpha d^p$, $\delta_1 < \beta d^p$, *où* $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* α, β *et* d *satisfont aux conditions:* $d < 1$, $(\beta + 2\alpha)^3 < \beta < 1$, *alors:*

$$\rho_n \leq \alpha d^{p^n}, \ \delta_n \leq \beta d^{p^n}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Démonstration. Nous montrerons en utilisant la méthode de l'induction mathématique que pour $n = 0, 1, \ldots$ sont vraies les inégalités suivantes:

$$\rho_n \leq \theta_n d^{p^n} \leq \alpha d^{p^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

$$\delta_n \leq \mu_n d^{p^n} \leq \beta d^{p^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

où

$$\theta_{n+1} = \theta_n^2 d^{2p^n - p^{n+1}} + \theta_n \theta_{n-1} d^{p^n + p^{n-1} - p^{n+1}} + \theta_n \mu_n d^{2p^n - p^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$\mu_{n+1} = \left(\mu_n d^{p^n - p^{n-1}} + \theta_n d^{p^n - p^{n-1}} + \theta_{n-1}\right)^3 d^{3p^{n-1} - p^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dans les hypothèses faites il résulte que les inégalités (23) sont vraies pour $n = 0$ et $n = 1$, et les inégalités (24) sont vraies pour $n = 1$, $\theta_0 = \theta_1 = \alpha$, $\mu_1 = \beta$.

Nous supposons que les inégalités (23)-(24) sont vraies pour chaque $n \leq k$. On a:

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &\leq \theta_k^2 d^{2p^k} + \theta_k \theta_{k-1} d^{p^k + p^{k-1}} + \theta_k \mu_k d^{2p^k} \\ &\leq \left(\theta_k^2 d^{2p^k - p^{k+1}} + \theta_k \theta_{k+1} d^{p^k + p^{k-1} - p^{k+1}} + \theta_k \mu_k d^{2p^k - p^{k+1}}\right) d^{p^{k+1}} \\ &= \theta_{k+1} d^{p^{k+1}}.\end{aligned}$$

Nous montrerons que: $\theta_{k+1} \leq \alpha$. En effet dans les hypothèses du lemme et l'hypothèse de l'induction il résulte:

$$\theta_{k+1} \leq \left(2\alpha^2 + \alpha\beta\right) = \alpha\left(\beta + 2\alpha\right) \leq \alpha,$$

parceque:

$$2p^k - p^{k+1} > 0,\ p^k + p^{k-1} - p^{k+1} = 0 \text{ et } d < 1$$

De même

$$\begin{aligned}\delta_{k+1} &\leq \left(\mu_k d^{p^k} + \theta_k d^{p^k} + \theta_{k+1} d^{p^{k-1}}\right)^3 \\ &= \left(\mu_k d^{p^k - p^{k-1}} + \theta_k d^{p^k - p^{k-1}} + \theta_{k-1}\right) d^{3p^{k-1} - p^{k+1}} d^{p^{k+1}} \\ &= \mu_{k+1} d^{p^{k+1}} \\ \mu_{k+1} &\leq \left(\beta + 2\alpha\right)^2 \leq \beta, \qquad \text{par ce que } 3p^{k-1} - p^{k+1} > 0.\end{aligned}$$

Donc il résulte que pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ on a les inégalités (23), (24) d'où on a:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Le lemme est démontré. □

En se basant sur le lemme 1, nous établirons les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 4. *Si dans la sphère $S = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\| \leq r\}$ sont vérifiées les conditions suivantes:*

1) *L'opérateur P admet des dérivées de type Fréchet jusqu'à l'ordre* 2 *inclusivement, la dérivée d'ordre* 1 *este inversable et on a $\|[P'(x)]^{-1}\| \leq B < +\infty$, $x \in S$, et $\|P''(x)\| \leq M < +\infty$, $x \in S$.*
2) $2MB^2 \|P(x_0)\| \leq \alpha d$, $\|E - P'(x_0) A_0\| \leq \beta d$, *où*

$$\beta < 1, \alpha < 1 - \beta,\ d < \tfrac{\beta}{(2-\beta)^3},\ r = \tfrac{\alpha d}{MB(1-d)},$$

alors, on a les propriétés suivantes:

1) *La méthode itérative* (14) *est convergente.*
2) *L'équation opérationnelle admet la solution $x^* \in S$, qui peut s'obtenir comme la limite de la suite donnée par la méthode* (14).
3) *On a les délimitations suivantes:*

$$\|x^* - x_n\| \leq \tfrac{\alpha d^{2^n}}{MB\left(1-d^{2^n}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

si $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, *la suite* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *tende vers* A^* *et on a:*

$$\|A^* - A_n\| \le \tfrac{2Bd^{2^n}\left(2\alpha+\beta-\beta d^{2^n}\right)}{1-d^{2^n}}.$$

Démonstration. Nous démonstrerons en utilisant l'induction mathématique que pour chaque $n = 0, 1, \ldots$ sont vraies les propriétés suivantes:

(a) $$x_n \in S,$$

(b) $$\rho_n = 2MB^2 \|P(x_n)\| \le \alpha d^{2^n},$$
$$\delta_n = \left\|E - P'(x_n) A_n\right\| \le \beta d^{2^n},$$

(c) $$\|A_n\| \le 2B.$$

Pour $n = 0$ les propriétés a) et b) sont vérifiées dans les hypothèses du théorème. Pour c) on a:

$$\begin{aligned}\left\|A_0\right\| &\le \left\| \left[P'(x_0)\right]^{-1} + A_0 - \left[P'(x_0)\right]^{-1} \right\| \\ &\le \left\| \left[P'(x_0)\right]^{-1} \right\| \left(1 + \left\|E - P'(x_0) A_0\right\|\right) \\ &\le B(1 + \alpha d) < 2B.\end{aligned}$$

Nous supposons que a), b), c) sont vraies pour $n = 0, 1, \ldots, k$. Pour $n = k+1$ on a:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_0\| &\le \sum_{i=0}^{k} \|x_{i+1} - x_i\| \le \sum_{i=0}^{k} \|A_i\| \cdot \|P(x_i)\| \le 2B\tfrac{\alpha}{2MB^2} \sum_{i=0}^{k} d^{2^i} \\ &= \tfrac{\alpha}{MB}\left(d + d^2 + d^{2^2} + \ldots + d^{2^k}\right) < \tfrac{\alpha d}{MB(1-d)},\end{aligned}$$

d'où il résulte $x_{n+1} \in S$.

Pour b) en procédant comme en [2] nous déduisons les relations:

$$\|P(x_{k+1})\| \leq \tfrac{M}{2}\|A_k\|^2\|P(x_k)\|^2 + \|P(x_k)\|\left\|E - P'(x_k)A_k\right\|$$

et

$$\left\|E - P'(x_{k+1})A_{k+1}\right\| \leq \left(\left\|E - P'(x_k)A_k\right\| + M\|A_k\|^2\|P(x_k)\|\right)^3,$$

d'où avec les notations introduites on a:

$$\begin{cases} \rho_{k+1} \leq \rho_k^2 + \rho_k\delta_k \\ \delta_{k+1} \leq (\rho_k + 2\rho_k)^3 \end{cases}$$

Dans les hypothèses du théorème il résulte que pour $a = 2$ sont vérifiées les hypothèses de lemme 1, en effet on a:

$$\rho_{k+1} \leq \alpha d^{2^{k+1}}, \quad \delta_{k+1} \leq \beta d^{2^{k+1}}$$

Pour c) on déduit de manière analogue à celle du cas

$$\|A_{k+1}\| \leq 2B.$$

Les propriétés a), b), c) étant vraies pour $n = k+1$ aussi il résulte leur valabilité pour chaque $n = 0, 1, \ldots$

On a maintenant:

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} + x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1}\|x_{i+1} - x_i\| \\ &\leq \tfrac{\alpha d^{2^n}}{MB}\left(1 + d^{2^{n+1}-2^n} + d^{2^{n+2}-2^n} + \ldots + d^{2^{n+m-1}-2^n}\right) \\ &< \tfrac{\alpha d^{2^n}}{MB\left(1-d^{2^n}\right)}, \end{aligned}$$

d'où il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ etant fondamentale, elle sera convergente vers x^*. De b) il résulte $\lim\limits_{n\to\infty}\|P(x_n)\| = 0$, d'où $P(x^*) = 0$. Dans l'inégalité ci-dessus on voit facilement que $x^* \in S$ et que l'on a l'inégalité suivante

$$\|x^* - x_n\| \leq \tfrac{\alpha d^{2^n}}{MB\left(1-d^{2^n}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

si $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$ on a:

$$\begin{aligned} \|A^* - A_n\| &= \left\|\left[P'(x^*)\right]^{-1} - A_n\right\| \\ &\leq \left\|\left[P'(x^*)\right]^{-1}\right\|\left\|E - P'(x^*)A_n\right\| \\ &\leq 2B\left(\left\|E - P'(x_n)A_n\right\| + M\|x^* - x_n\|\|A_n\|\right) \\ &\leq \tfrac{2Bd^{2^n}\left(2\alpha+\beta-\beta d^{2n}\right)}{1-d^{2^n}}, \end{aligned}$$

d'où il résulte que $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ tend vers A^*et que a lieu la délimitation donnée. La théorème est démontré. □

Théorème 5. *Si dans la sphère* $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$ *sont vérifiées les conditions suivantes:*

1) *L'opérateur P admet les différences divisées jousqu'à l'ordre 2 inclusivement, la différence divisée du premier ordre admet une inverse bornée, c'est-a-dire $\left\| [x,y;P]^{-1} \right\| \le B < +\infty$ pour chaque $x, y \in S$ et $\|[x,y,z;P]\| \le M < +\infty$ pour chaque $x,y,z \in S$.*
2) *L'opérateur itératif Q satisfait aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned} \|Q(x) - Q(y)\| &\le L\|x-y\|, \quad \textit{pour chaque } x, y \in S, \\ \|x - Q(x)\| &\le C\|P(x)\|, \quad \textit{pour chaque } x \in S. \end{aligned}$$

3) *L'élément initial x_0 peut être choisi de telle manière que les conditions suivantes soient remplies:*

$$\begin{aligned} 2MB(2B+C)\|P(x_0)\| &\le \alpha d, \\ \|E - [x_0, Q(x_0); P] A_0\| &\le \beta d, \end{aligned}$$

où

$$\beta < 1,\ \alpha < 1 - \beta,\ d < \tfrac{\beta}{[a+(1-a)\beta]^3},$$

avec

$$a = \tfrac{1+L}{2B+C} > 1 \textit{ et } r = \tfrac{\alpha d[2B+C(1-d)]}{2MB(2B+C)(1-d)},$$

alors:

1) *Les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ données par la méthode itérative (16) sont convergentes.*
2) *L'équation (1) admet une solution $x^* \in S$ qu'on peut obtenir comme la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $A^* = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = [x^*, Q(x^*); P]^{-1}$.*
3) *On a:*

$$\|x^* - x_n\| \le \tfrac{\alpha d^{2^n}}{M(2B+C)\left(1-d^{2^n}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

et

$$\|A^* - A_n\| \leq Bd^{2^n}\left[\beta + \tfrac{2\alpha B(1+L)}{(2B+C)\left(1-d^{2^n}\right)}\right], \quad n = 0, 1, \ldots$$

La démonstration de ce théorème est absolutment analogue avec la démonstration du théorème 4, tenant compte du lemme 1 et des relations établies à l'occasion de la démonstration du théorème 3, [2].

Théorème 6. *Si dans la sphère* $S = \{\alpha \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ *sont vérifiées les conditions suivantes:*

1) *L'opérateur P admet des différences divisées jusqu'à l'ordre 2 inclusivement, la différence divisée du premier ordre admet une inverse bornée, c'est-à-dire* $\left\|[x, y; P]^{-1}\right\| \leq B < +\infty$ *pour chaque* $x, y \in S$ *et* $\|[x, y, z; P]\| \leq M < +\infty$ *pour* $x, y, z \in S$
2) *L'opérateur* A_0 *est borné et* $\|A_0\| \leq B$.
3) *On a les inégalités:*

$$4MB^2 \|P(x_0)\| < \alpha d,$$
$$4MB^2 \|P(x_1)\| \leq \alpha d^p,$$

$$\|E - [x_0, x_1; P]\, A_0\| \leq \sqrt[3]{\beta} d^{\frac{p}{3}},$$

où

$$p = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ d < 1,\ (\beta + 2\alpha)^3 < \beta < 1,$$

$$r = \frac{\alpha d}{2MB\left(1-d^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}$$

alors:

1) *Les suites* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *et* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *données par (15) sont convergentes*
2) *L'équation* (1) *admet la solution* $x^* \in S$, *qu'on peut obtenir comme la limite de la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *donnée par* (15).
3) *Si* A^* *est la limite de la suite d'opérateurs* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *il est en même temps la limite de la suite d'opérateurs* $\left([x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left([x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right.$ *existe pour chaque* $n = 0, 1, \ldots$ *par ce que* $x_n \in S$ *ce qui résulte de la démonstration);*

4) *On a:*

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\alpha d^{p^n}}{2MB\left(1 - d^{p^n \frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)},$$

$$\|A^* - A\| \leq d^{p^{n-1}} \left[2B(\alpha+\beta)\frac{d^{p^{n-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{1-d^{p^{n-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} + 2\alpha B\frac{1}{1-d^{p^{n-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}\right].$$

Démonstration. En employant la méthode de l'induction mathématique nous démontrerons les propriétés suivantes.

a) $x_n \in S, \qquad n = 0, 1, \ldots,$
b) $\rho_n = 4MB^2 \left|\left|P(x_n)\right|\right| \leq \alpha d^{p^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$
c) $\delta_n = \left|\left|E - [x_{n-1}, x_n; P]\, A_n\right|\right| \leq \beta d^{p^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$
d) $\left|\left|A_n\right|\right| \leq 2B, \qquad n = 0, 1, \ldots,$

Dans les hypothèses du théorème il résulte que les propriétés a), b), d) sont vérifiées pour $n = 0$ et c) pour $n = 1$.

Nous supposons que les propriétés a)–d) sont vérifiées pour $n = k$ et nous montrerons leur valabilité pour $n = k + 1$.

Pour la propriété a) on a:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{k} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^{k} \|A_i\| \cdot \|P(x_i)\| \\ &< 2B\sum_{i=0}^{k} \|P(x_i)\| \leq \tfrac{\alpha d}{2MB}\left(1 + d^{p-1} + d^{p^2-1} + \ldots\right) \\ &< \tfrac{\alpha d}{2MB(1-d^{p-1})} = \frac{\alpha d}{2MB\left(1-d^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)} = r,\end{aligned}$$

donc $x_{k+1} \in S$.

Pour les propriétés b), c) on établit de la même façon que dans [2] les inégalités:

$$\begin{aligned}\|P(x_{k+1})\| \leq & M\|A_k\| \cdot \|P(x_k)\| \left(\|A_{k-1}\| \cdot \|P(x_k)\| + \|A_{k-1}\| \cdot \|P(x_{k-1})\|\right) \\ &+ \|P(x_k)\| \cdot \|E - [x_{k-1}, x_k; P]\, A_k\|,\end{aligned}$$

$$\|E-[x_k,x_{k+1};P]\,A_{k+1}\|\leq$$
$$\leq\left\{\|E-[x_{k-1},x_k;P]\,A_k\|+M\left\|A_k^{-1}\right\|\Big(\|A_k\|\,\|P\,(x_k)\|+\|A_{k-1}\|\,\|P\,(x_{k-1})\|\Big)\right\}^3,$$

d'où vu que $\|A_k\|\leq 2B, \|A_{k-1}\|\leq 2B$ avec les notations introduites, il résulte:

$$\begin{cases}\rho_{k+1}\leq\rho_k^2+\rho_k\rho_{k-1}+\rho_k\delta_k,\\ \delta_{k+1}\leq(\delta_k+\rho_k+\rho_{k-1})^3\,.\end{cases}$$

Du fait que les hypothèses du lemme 2) sont vérifiées

$$\rho_{k+1}\leq\alpha d^{p^{k+1}}\quad\text{et}\quad\delta_{k+1}\leq\beta d^{p^{k+1}}.$$

Pour le propriété d) on a:

$$\begin{aligned}\left\|A_{k+1}\right\|&\leq\left\|\,[x_k,x_{k+1};P]^{-1}\,\right\|(1+\|E-[x_k,x_{k+1};P]\,A_{k+1}\|)\\&\leq B\,(1+\delta_{k+1})<2B.\end{aligned}$$

En accord avec la principe de l'induction mathématique il résulte que les propriétés a), b), d) sont vraies pour chaque $n=0,1,\ldots,$ et la propriété c) pour chaque $n=1,2,\ldots$

De la même manière que dans la théorème antérieur il résulte:

$$\|x_{m+n}-x_n\|\leq\frac{\alpha d^{p^n}}{2MB\left(1-d^{p^n\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)},$$

d'où il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ étant fondamentale elle convergera vers x^* donné par l'inégalité:

$$\|x^*-x_n\|\leq\frac{\alpha d^{p^n}}{2MB\left(1-d^{p^n\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)},$$

d'où, en faisant $n=0$ il résulte $x^*\in S$. Du fait que $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{n=0,}il$ résulte que $P\,(x^*)=0$.

Pour la démonstration de la convergence de la suite $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ et de la dernière inégalité on évalue:

$$\begin{aligned}
&\|A_{i+1} - A_i\| \leq \\
&\leq \|A_i\| \, \|E - [x_i, x_{i+1}; P] \, A_i\| \\
&\leq 2B\{\|E - [x_{i-1}, x_i; P] \, A_i\| + \|[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; P]\| \cdot \|x_{i+1} - x_i\| \cdot \|A_i\|\} \\
&\leq 2B \, (\alpha + \beta) \, d^{p^i} + 2\alpha B d^{p^{i-1}}
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\|A_{n+m} - A_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \\
&< d^{p^{n-1}} \left[2B \, (\alpha + \beta) \, \frac{d^{p^{n-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{1 - d^{p^{n}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} + 2\alpha B \frac{1}{1 - d^{p^{n-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \right],
\end{aligned}$$

d'où il résulte que la suite $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ étant fondamentale elle sera convergente. En désignant par A^* sa limite, il résulte la délimitation exprimée par l'inégalité de 4).

Nous établirons maintenant que la suite d'opérateurs $\left([x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right)_{n=0}^{\infty}$ tend aussi vers A^*. En effet:

$$\begin{aligned}
&\left\|A^* - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \left\|A^* - A_n\right\| + \left\|A_n - [x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right\| \\
&= \left\|A^* - A_n\right\| + \left\|[x_n, x_{n+1}; P]^{-1}\right\| \cdot \|E - [x_n, x_{n+1}; P] \, A_n\| \\
&\leq \|A^* - A_n\| + B \, (\alpha + \beta) \, d^{p^n} + \alpha B^{p^{n-1}},
\end{aligned}$$

d'où il résulte que: $\lim\limits_{n \to \infty} [x_n, x_{n+1}; P]^{-1} = A^*$.

La théorème est démontré. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Collatz, L., *Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen,* Archive for Rational Mechanics and Analysis **II** (1), 66–75 (1958).

clickable → [2] Diaconu, A., şi Păvăloiu, I., *Asupra unor metode iterative pentru rezolvarea ecua- ţiilor operationale neliniare* (I), Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, sous presse **2** (1973), nr. 1, pp. 61–79.

[3] Jankó, B., *Sur la théorie unitaire des méthdes d'itération pour la résolution des équations opérationelles non linéaires.* Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, **II**, Ser. A, 302–311 (1961).

[4] Jankó, B., *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii Banach.* Bucureşti, Editura Academiei R.S.R. (1969).

clickable → [5] Păvăloiu, I., *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires*, Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XIII,** 6, 857–861 (1968).

clickable → [6] Păvăloiu, I., *Interpolation dans des éspaces linéaires normés et applications.* Mathematica (Cluj), **12(35)**, 1, 149–158 (1970).

clickable → [7] Păvăloiu, I., *Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence.* Mathematica (Cluj), **12 (35)**, 2, 309–324 (1970).

clickable → [8] Păvăloiu, I., *Consideraţii asupra metodelor iterative obţinute prin interpolare inversă*, Studii şi cercetări matematice, **XXIII**, 10, 1545–1549 (1971).

available soon, click here → [9] Popoviciu, T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **XIII**, 1, 75–78 (1968).

[10] Sergheev, A. S., *O metode hord.* Sibirski mat. jurnal, **XI**, 2, 282–289 (1961)

[11] Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs N.J. (1964)

[12] Ul'm, S., *Ob obobşcenîh razdelenyh raznostjah I.* Izv. Akad. Nauk. Estonskoi S.S.R., **16,** 1, 13–26 (1967)

[13] Ul'm, S., *Ob obobşcenîh razdelenyh raznostjah II.* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R., **16**, 2, 146–155 (1967).

[14] Ul'm, S., *Ob iteraccionnyh metodah s posledovatel'noi approksimacii obratnovo operatora.* Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R., **16,** 4, 403–411 (1967).

Reçu le 18. IX.1971.