MATHEMATICA - REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 5 (1976) no. 1, pp. 63–67
ictp.acad.ro/jnaat

SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS À L'AIDE DES SUITES À ÉLÉMENTS DANS UN ESPACE DE BANACH

par
ION PĂVĂLOIU
(Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et Y un sepace linéaire normé.

On considère l'équation:

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

où $P : X \to Y$ et θ est l'élément nul de l'espace Y.

Nous désignons par $\Sigma = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, une suite à éléments dans l'espace X et par k un nombre naturel arbitraire.

Définition 1. *On dit que la suite Σ a l'ordre k par raport à l'application P, s'il existe une constante non-négative ρ qui ne dépend pas de n, et telle que pour chaque $n = 0, 1, \ldots$ soient satisfaites les inégalités suivantes:*

$$\|P(x_{n+1})\| \leq \rho \|P(x_n)\|^k$$

Définition 2. *On dit que la suite Σ a l'ordre de convergence k par rapport à l'application P, si les conditions suivantes sont remplies:*

a) *la suite Σ a l'ordre k par rapport à l'application P;*
b) *la suite Σ este convergente.*

Si $S \in X$ est un ensemble à éléments dans l'espace X, nous désignerons par $S^* = \int(S)$, l'intérieur de cet ensemble.

Soit $s \geq 2$ un nombre naturel donné et P l'approximation qui détermine l'équation (1).

Dans cette note nous chercherons des conditions imposées à l'application P et à la suite Σ, pour que la suite Σ ait l'ordre de convergence s par rapport à l'application P et de plus, si nous désignons par $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$, pour que nous ayons alor $P(\bar{x}) = \theta$.

Par rapport au problème ci-dessus posé, on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Si la suite Σ, l'application P et le nombre réel et positif δ sont tels que pour chaque point $x \in Int(S)$, où $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, les conditions suivantes sont remplies:*

i) *l'application P admet des dérivées du type Fréchet, jusqu'a l'ordre s $(s \geq 2)$ inclusivement, sur chaque point de l'ensenble $Int(S)$ et*

$$\sup_{x\in Int(S)} \|P^{(s)}(x)\| \leq M < +\infty;$$

ii) *Il existe une constante réelle et non-négative α, que ne dépend pas de n, telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\Big\| \sum_{i=0}^{s-1} \tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^i \Big\| \leq \alpha \|P(x_n)\|^s,$$

où $x_n \in \Sigma \cap S^*$, $n = 0, 1, \ldots;$

iii) *Il existe une constante réelle et non-négative β qui ne dépend pas de n et telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta \|P(x_n)\|,$$

où

$$x_n \in \Sigma \cap S^*, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

iv) *les constantes α, β et les nombres réels M et δ satisfont aux inégalités suivantes:*

$$\rho_0 = v \cdot \|P(x_0)\| < 1 \ \textit{et} \ \tfrac{\beta\rho_0}{(1-\rho_0)\cdot v} \leq \delta \ \textit{où}$$
$$v = \left(\alpha + \tfrac{M\beta^s}{s!}\right)^{\frac{1}{s-1}},$$

alors relativement à l'équation (1) et à la suite Σ ont lieu des propriétés suivantes:

j) *la suite Σ a l'ordre de convergence s et si $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = \theta$.*

jj) $\bar{x} \in S$

jjj) $\|\bar{x}_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta\rho_0^{s^n}}{v}$

jv) $\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta\rho_0^{s^n}}{v\left(1-\rho_0^{s^n}\right)}$

v) $\|P(x_n)\| \leq \frac{\rho_0^{s^n}}{v}$

Démonstration. Nous démontrerons en premier lieu que les éléments de la suite Σ sont contenus en S^*, si les conditions du théorème énoncé sont remplies.

Pour x_1 on a:

$$\|x_1 - x_0\| \leq \beta \|P(x_0)\| \leq \frac{\beta v \|P(x_0)\|}{v} \leq \frac{\beta\rho_0}{v} < \frac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta, \tag{2}$$

d'où il résulte que $x_1 \in S^*$. En effet, en utilisant la formule de Taylor généralisée on déduit

$$\begin{aligned}\|P(x_1)\| \leq &\left\| P(x_1) - \sum_{i=0}^{s-1} \tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i \right\| \\ &+ \left\| \sum_{i=0}^{s-1} \tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i \right\| \\ \leq &\tfrac{M}{s!} \|x_1 - x_0\|^s + \alpha \|P(x_0)\|^s \\ \leq &\left(\tfrac{M\beta^s}{s!} + \alpha\right) \cdot \|P(x_0)\|^s,\end{aligned}$$

d'où on déduit:

$$\|P(x_1)\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_0)\|^s. \tag{3}$$

Nous supposons que les proprietés suivantes sont remplies:

1) $x_i \in S^*, \quad i = 0, 1, \ldots, n;$
2) $\|x_i - x_{i-1}\| \leq \frac{\beta}{v} \cdot \rho_0^{s^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$
3) $\|P(x_i)\| \leq v^{s-1} \|P(x_{i-1})\|^s, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

et dans ces hypothèses nous démontrerons que:

$$x_{n+1} \in S^*, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta}{v}\rho_0^{s^n} \quad \text{et} \quad \|P(x_{n+1})\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_n)\|^s.$$

D'après ce que nous avons démonstré ci-dessus, il résulte que les propriétés 1)–3) sont vérifiées pour $i = 1$.

En multipliant par v l'inégalité 3) et en désignent par $\rho_i = v\left\|P\left(x_i\right)\right\|,\ i = 1,2,\ldots,n$, nous déduisons facilement les inégalités:

$$\rho_i \leq \rho_0^{s^i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Des inégalités (4) et de iii) on déduit

$$\left\|x_{n+1} - x_n\right\| \leq \beta\left\|P\left(x_n\right)\right\| = \tfrac{\beta v\|p(x_n)\|}{v} \leq \tfrac{\beta\rho_0^{s^n}}{v}. \tag{5}$$

De (5) on déduit:

$$\left\|x_{n+1} - x_0\right\| \leq \sum_{i=0}^{n}\left\|x_{i+1} - x_i\right\| \leq \tfrac{\beta}{v}\sum_{i=0}^{n}\rho_0^{s^i} < \tfrac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta$$

d'où il résulte $x_{n+1} \in S^*$.

L'inégalité 2) pour $i = n+1$ résulte de (5).

Pour la dernière inégalité on a:

$$\begin{aligned}\left\|P\left(x_{n+1}\right)\right\| \leq & \Big\|P\left(x_{n+1}\right) - \sum_{i=0}^{s-1}\tfrac{1}{i!}P^{(i)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^i\Big\| \\ & + \Big\|\sum_{i=0}^{s-1}\tfrac{1}{i!}P^{(i)}\left(x_n\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)^i\Big\| \\ \leq & \big(\alpha + \tfrac{M\beta^s}{s!}\big)\cdot\left\|P\left(x_n\right)\right\| = v^{s-1}\left\|P\left(x_n\right)\right\|^s.\end{aligned}$$

Par conséquent les propriétés 1)–3) sont remplies pour chaque $n = 1,2,\ldots$

La propriété 3) montre que la suite Σ a l'ordre s.

Nous démontrerons dans ce qui suit que la suite Σ est convergente. Pour ce faire nous démontrerons d'abord que la suite Σ est fondamentale.

Soient n et p deux nombres naturels.

On a:

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1}\left\|x_{i+1} - x_n\right\| \leq \tfrac{\beta}{v}\sum_{i=n}^{n+p-1}\rho_0^{s^i} \leq \tfrac{\beta\rho_0^{s^n}}{v\left(1-\rho_0^{s^n}\right)}. \tag{6}$$

De l'inégalité (6) il résulte que Σ este convergente.

Soit $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, alors de (6) il résulte l'inégalité:

$$\left\|\bar{x} - x_n\right\| \leq \tfrac{\rho_0^{s^n}}{v\left(1-\rho_0^{s^n}\right)}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Il en résulte que $\bar{x} \in S$ et nous avons aussi obtenu l'inégalité jv). L'inégalité jjj) résulte de (6) pour $p = 1$.

Il reste à démontrer que $\bar{x}$ est la solution de l'équation (1).

Nous avons prouvé que l'inégalité (4) est vraie pour chaque $n = 0,1,\ldots$. Alors on obtient:

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0$$

mais $\rho_n = v\left\|P\left(x_n\right)\right\|$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(x_n\right) = P\left(\bar{x}\right) = \theta$.

Ceci achève la démonstration du théorème. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

clickable →

[1] Ghinea, M., *Sur la résolution des équations operationnelles dans les espaces de Banach*, Revue Francaise de traitement de l'information, **8**, 3–22, (1965).

[2] Păvăloiu, I., *Sur les procédés iteratifs a un ordre élevé de convergence*, Mathematica, **12 (35)**, 2, 309–324, (1970).

[3] Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs N. J. (1964).

Recu le 30.VI. 1976