MATHEMATICA Vol. 11(34), 1969, No. 1, pp. 137–141

LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES À L'AIDE DES MÉTHODES ITÉRATIVES

par
ION PĂVĂLOIU
à Cluj

1. Soient X et Y deux espaces de type Banach et $Z = X \times Y$ le produit cartésien de ces espaces.

Dans l'espace Z on considérera l'équation suivante:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(x,y) \\ y &= \psi(x,y)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dans la présente note on interprétera l'équation antérieure comme un système de deux équations à deux inconnues où φ et ψ sont des opérateurs définis sur Z et à valeurs respectivement X et Y. De cette manière on mettra en évidence un critérium de convergence du procédé de Gauss-Seidel appliqué à la résolution de ce systéme. Ensuite on montrera que ce criterium est plus général que ceux qui sont connus.

Enfin on appliquera les résultats obtenus à l'élaboration d'une nouvelle méthode de résolution des systèmes des équations lineaires.

Une partie des résultats de cette note ont été obtenus par nous dans un cas particulier ($X = Y = \mathbb{R}$) dans le travail [1].

2. On suppose que les opérateurs φ et ψ satisfont les conditions suivantes:

a) Les opérateurs φ et ψ transforment le domaine $D \subset Z$ en lui même.

b) Il existe des constantes α, β, a et b telles que

$$\begin{aligned} \|\psi(x_2,y_2) - \psi(x_1,y_1)\| &\leq a\,\|x_2 - x_1\| + b\,\|y_2 - y_1\| \\ \|\varphi(x_2,y_2) - \varphi(x_1,y_1)\| &\leq \alpha\,\|x_2 - x_1\| + \beta\,\|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

pour tout $(x_i, y_i) \in D,\ i = 1,2.$

Théorème 1. *Si les opérateurs* φ *et* ψ *satisfont les conditions* a) *et* b), *où les constantes* α, β, a *et* b *satisfont aux inégalités:*

$$\alpha + b + a\beta < 2, \qquad (2)$$
$$(1-\alpha)(1-b) > a\beta,$$

alors on a les propriétés suivantes:

a') Le systéme (1) *a une seule solution* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D}$

b') Le procédé itératif

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= \psi(x_n, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \ (x_0, y_0) \in D \end{aligned} \qquad (3)$$

est convergent et on a:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad \bar{y} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Démonstration. On montrera d'abord qu'on a la propriété b'). Pour cela on observera que les sommes partielles des deux séries suivantes

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \qquad (4)$$
$$y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_{i-1})$$

coïncident avec les termes des suite (3). En notant

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= \|x_n - x_{n-1}\|, \\ g_{n-1} &= \|y_n - y_{n-1}\|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

et tenant compte des conditions b) on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} f_n &\le \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\le a f_n + b g_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

En employant maintenant le lemme 2 [1] il en résulte que si les conditions (2) ont lieu alors il existe un constante C indépendente de n telleque l'on ait

$$\begin{aligned} f_n &\le C h_1^{n-1} k_1^{n-1}, \\ g_n &\le C h_1^{n} k_1^{n-1} \end{aligned}$$

et que les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i, \sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes, où $0 \le h_1 k_1 < 1$, (h_1, k_1) etant une solution positive du système algébrique suivant:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta h &= kh \\ ak + b &= kh. \end{aligned}$$

Il en résulte la convergence absolue des séries (4) et donc la convergence du procédé (3). Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les limites des suites (3) alors en tenant compte de b) il en résulte que $(\bar{x}, \bar{y})$ est une solution pour le système (1).

Pour l'unicité on supposera que le système (1) a deux solutions $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{D}$ et $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \bar{D}$ alors on a

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{x}_1\| &\leq \alpha \|\bar{x} - \bar{x}_1\| + \beta \|\bar{y} - \bar{y}_1\| \\ \|\bar{y} - \bar{y}_1\| &\leq a \|\bar{x} - \bar{x}_1\| + b \|\bar{y} - \bar{y}_1\| \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{x}_1\| &\leq \tfrac{\beta a}{(1-b)(1-\alpha)} \cdot ||\bar{x} - \bar{x}_1|| \\ \|\bar{y} - \bar{y}_1\| &\leq \tfrac{\beta a}{(1-b)(1-\alpha)} \cdot \|\bar{y} - \bar{y}_1\| \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $(1-b)(1-\alpha) > a\beta$. □

Remarque. Si $\alpha,\ \beta,\ a$ et b satisfont les conditions $\alpha+\beta < 1,\ a+b < 1$ ou $\alpha + a < 1,\ \beta + b < 1$ alors les conditions (2) sont vérifiées.

L'évaluation des erreurs est donnée par les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} &\|\bar{x} - x_n\| \leq C \tfrac{h_1^{n-1} k_1^{n-1}}{1-h_1 k_1} \\ &\|\bar{y} - y_n\| \leq C \tfrac{h_1^{n} k_1^{n-1}}{1-h_1 k_1}, \quad n = 1, 2, \dots \ . \end{aligned}$$ □

3. On appliquera les résultats exposés antérieurement à la résolution des systémes d'équations linéaires de la forme

$$X = AX + b \tag{5}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, $A = (a_{i,j})\,;\ i,\ j = \overline{1,n}$ est la matrice du système et $b \in \mathbb{R}^n$ est le terme libre.

Pour la résolution du système (5) on décomposera la matrice A en les matrices $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ des types suivants. M_1 est une matrice du type $(s,\ s)$, M_2 est du type $(s,\ n-s)$, M_4 est du type $(n-s, s)$ et M_4 est du type $(n-s,\ n-s)$, $1 \leq s < n$, c'est-à-dire que A a la forme suivante

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} M_1 & \vdots & M_2 \\ \cdots & & \cdots \\ M_3 & \vdots & M_4 \end{pmatrix} s. \\ \qquad\quad s \end{array}$$

On notera aussi

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

où $u,\ b_1 \in \mathbb{R}^s$ et $v,\ b_2 \in \mathbb{R}^{n-s}$. Ainsi le systéme (5) peut être écrit sous la forme:

$$
\begin{aligned}
u &= M_1 u + M_2 v + b_1 \\
v &= M_3 u + M_4 v + b_2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

où u et v sont les vecteurs des inconnues, $(u,v) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$.

Pour la résolution du système (6) on appliquera le procédé itératif suivant:

$$
\begin{aligned}
u_i &= M_1 u_{i-1} + M_2 v_{i-1} + b_1 \\
v_i &= M_3 u_i + M_4 v_{i-1} + b_2, \ \ i = 1,2,\ldots, \ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ce procédé itératif résulte comme une application du procédé (3) exposé dans la première partie de cette note.

En appliquant la théorème 1 on obtiendra le

Théorème 2. *Si les matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 satisfont aux inégalités suivantes:*

$$
\begin{aligned}
&\|M_1\| + \|M_4\| + \|M_2\| \ \ \|M_3\| < 2 \\
&(1 - \|M_1\|)\,(1 - \|M_4\|) > \|M_3\|\,\|M_2\|
\end{aligned}
\tag{8}
$$

alors le système (6) *a une seule solution* $(\bar{u},\ \bar{v}) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ *et le procédé* (7) *converge vers cette solution.*

On a ainsi obtenu une nouvelle méthode itérative de résolution des systèmes d'équations. Cette méthode converge dans des conditions beacoup plus générales que la méthode de l'itération simple ou la méthode de Gauss-Seidel. On ilustrera ce fait par l'example numérique suivant.

4. Soit donné le système:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.02 x_1 + 0.045 x_2 + 8 x_3 + 0.4 \\
x_2 &= 0.05 x_1 + 0.042 x_2 + 3 x_3 - 0.6 \\
x_3 &= 0.003 x_1 + 0.013 x_2 + 0.45 x_3 - 0.8.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

On notera

$$
\begin{aligned}
u &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \ v = (x_3)\,, \\
M_1 &= \begin{pmatrix} 0.02 & 0.045 \\ 0.05 & 0.042 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\
M_3 &= (0.003,\ 0.013)\,, \quad M_4 = (0.45)\,, \\
b_1 &= \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = (-0.8)\,.
\end{aligned}
$$

Si on considère pour ces matrices la norme uniforme on a

$$\begin{aligned}\|M_1\| &= 0.092,\\ \|M_2\| &= 8,\\ \|M_3\| &= 0.016 \text{ et}\\ \|M_4\| &= 0.45.\end{aligned}$$

On vérifiera si avec ces valeurs les conditions (8) sont remplies,

$$\begin{gathered}0.092+0.45+8\times 0.016=0.67<2\\ (1-0.092)\,(1-0.45)=0.4994>0.016\times 8=0.128\end{gathered}\tag{10}$$

Il en résulte que les conditions (8) sont vérifiées. Du théorème 2 et de (10) il résulte que le procédé itératif suivant

$$\begin{aligned}x_1^{(i)} &= 0.02x_1^{(i-1)}+0.045x_2^{(i-1)}+8x_3^{(i-1)}+0,4\\ x_2^{(i)} &= 0.05x_1^{(i-1)}+0.042x_2^{(i-1)}+3x_3^{(i-1)}-0,6\\ x_3^{(i)} &= 0.003x_1^{(i)}+0.013x_2^{(i)}+0,45x_3^{(i-1)}-0.8,\quad i=1,2,\ldots\end{aligned}$$

$x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0$ arbitraires, converge vers la solution du systême (5).

En exécutant les calculs on vérifie toutes les conclusions théoriques antérieures et après 40 itérations environ on obtient la solution approchée suivante

$$\begin{aligned}x_1 &\approx -13.6542065,\\ x_2 &\approx -6.6168795,\\ x_3 &\approx -1.6854203.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

clickable →

[1] I. Păvăloiu, *Observaţii asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii cu ajutorul procedeelor iterative*, Studii şi Cercetări Matematice, 19 (1967) no. 9, 1289–1298 (in Romanian) [English translation of the title: Remarks on solving the systems of equations by iterative methods]

Reçu le 12. VII. 1969.