REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 21 (1992) no. 1, pp. 59–65
ictp.acad.ro/jnaat

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE STEFFENSEN

ION PĂVĂLOIU
(Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et

$$f(x)=\theta \tag{1}$$

une équation, où $f:X\to X$ est une application et θ est l'élément nul de l'espace X.

Désignons par $[u,v;f]$ la différence divisées du premier ordre de l'application f sur les points $u,v\in X$ et par $[u,v,w;f]$ la différence divisée de deuxième ordre de cette application sur les points $u,v,w\in X$. Ces différences ont été introduites dans les travaux [1], [2], [5], [6], [7]. Supposons leur symétrie comme fonctions des points sur lesquels elles sont définies. À côté de l'équation (1) nous considérons une application $g:X\to X$ à l'aide de laquelle nous construisons la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par le procédé itératif suivant:

$$x_{n+1}=x_n-[x_n,g(x_n);f]^{-1}f(x_n),\qquad n\in\mathbb{N} \tag{2}$$

x_0 étant un élément arbitraire de X.

Il est bien connu que la différence divisée $[x_n,g(x_n);f]$ est une application linéaire de X en lui même, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sera bien définie dans le cas où cette application admettra une inverse pour chaque $n\in\mathbb{N}$.

Nous admettrons le fait que l'applicaiton $[x_0,g(x_0);f]$ admet un inverse $[x_0,g(x_0);f]^{-1}$ et nous donnerons des conditions suplémentaires pour que tous les éléments de la suite $([x_n,g(x_n);f])_{n=0}^{\infty}$ soient inversables. En même temp nous donnerons des conditions pour la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la relation (2).

On remarque que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la méthode (2), coincide avec la suite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par les égalités suivantes:

$$y_{n+1}=g(y_n)-[y_n,g(y_n);f]^{-1}f(g(y_n)), \tag{3}$$

où $y_0=x_0,\ n=1,2,\ldots$

Considérons les nombres réels et positifs B_0, K, α, ρ, λ et $d_0=\|f(x_0)\|$.

Désignons par $q\geq 2$ un nombre réel quelconque. Considérons l'ensemble

$$S=\{x\in X:\|x-x_0\|\leq\lambda\},\qquad x_0\in X \tag{4}$$

et désignons par a la plus petite racine de l'équation:

$$(1+\rho)t^2-[2(1+\rho)+\alpha d_0^{q-2}]t+1+\rho=0. \tag{5}$$

En ce qui concerne la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par (2) on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si les applications f et g et les nombres réels B_0, K, α, ρ, λ et q vérifient les conditions suivantes:*

i. $\|f(g(x))\| \leq \alpha \|f(x)\|^{q-1}$ *pour chaque* $x \in S$;
ii. *la différence divisée* $[u, v; g]$ *est symétrique comme fonction de* u *et* v *et* $\|[u, v; g]\| \leq \rho$, *pour chaque* $u, v \in S$;
iii. $\|[u, v, w; f]\| \leq K$, *pour chaque* $u, v, w \in S$;
iv. *il existe l'application* $[x_0, g(x_0); f]^{-1}$ *et* $\|[x_0, g(x_0); f]^{-1}\| \leq B_0$;
v. $B_0^2 K (1+\rho) \|f(x_0)\| \leq a$;
vi. $\lambda \geq \max\{\mu, \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\|\}$ *où*

$$\mu = B_0 b^{\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{c\delta_0}{1-(c\delta_0)^{q-1}},\ c = \frac{1}{(1-a)^2},\ b = KB_0^2\alpha,$$
$$\delta_0 = b^{\frac{1}{q-1}} d_0;$$

vii. $c\delta_0 < 1$;

alors l'équation (1) *a au moins une solution* $\bar{x} \in S$, $\bar{x} = \lim\ x_n$ *et on a la délimitation suivante:*

$$\|\bar{x} = x_n\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{(c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\cdot\delta_0)^{q^n(q-1)}}$$

Démonstration. Désignons par:

$$D_i = [x_i, g(x_i); f] \quad \text{et } \Gamma_i = D_i^{-1}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Si nous envisageons les notations ci-dessus, nous déduisons de (2) et (3) les relations suivantes:

$$x_1 = x_0 - \Gamma_0 \cdot f(x_0) \tag{6}$$

$$x_1 = g(x_0) - \Gamma_0 \cdot f(g(x_0)) \tag{7}$$

d'où l'on déduit:

$$\|x_1 - x_0\| \leq B_0 d_0 \tag{8}$$

$$\|x_1 - g(x_0)\| \leq B_0 \alpha d_0^{q-1} \tag{9}$$

En employant l'identité:

$$f(x_1) = f(x_0) + [x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0) + [x_1, x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0)(x_1 - g(x_0))$$

de iii, (6), (7), (8), (5) et de l'hypothèse $x_1 \in S$ on déduit.

$$\|f(x_1)\| \leq KB_0^2 \alpha d_0^q. \tag{10}$$

Pour prouver que $x_1 \in S$ nous remarquons que la plus petite racine de l'equation (5) vérifie la relation $0 < a < 1$, donc $c = \frac{1}{(1-a)^2} > 1$.

Alors de (8) il résulte que:

$$\|x_1 - x_0\| \leq B_0 d_0 \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c b^{\frac{1}{q-1}} d_0 \leq B_0 \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c\delta_0 \leq \mu \leq \lambda$$

c'est'à'dire $x_1 \in S$.

Par la suit nous prouvons l'existence de l'application $\Gamma_1 = D_1^{-1}$.

En employant les propriétés des différences divisées et les et les hypothèses du théorème on a:

$$\begin{aligned} (11) \quad \|D_0 - D_1\| &= \\ &= \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1, g(x_1); f]\| \\ &\leq \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1, g(x_0); f]\| + \|[x_1, g(x_0); f] - [x_1 g(x_1); f]\| \\ &\leq K B_0 d_0 + K\rho B_0 d_0 = K(1+\rho) B_0 d_0. \end{aligned}$$

Pour établir la dernière inégalité on emploie le fait que $g(x_0)$, $g(x_1) \in S$. Démontrons maintenant ces appartenances. En effet on a:

$$\|g(x_0) - x_0\| < \|g(x_0) - x_0\| + \rho\mu \leq \lambda$$

et

$$\|g(x_1 - x_0)\| \leq \|g(x_1) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \leq \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\| \leq \lambda.$$

De (11) on déduit:

$$\|\Gamma_0 \cdot (D_0 - D_1)\| \leq B_0^2 K (1+\delta) d_0 \leq a.$$

Du fait que $0 < a < 1$ et de l'hypothèse (vi) il résulte qu'on peut inverser l'opérateur

$$H_0 = I - \Gamma_0 (D_0 - D_1),$$

où I représente l'application identique.

On a:

$$\left\|H_0^{-1}\right\| \leq \tfrac{1}{1-a}.$$

Remarquons par la suite que:

$$H_0 = \Gamma_0 D_1$$

c'est-à-dire

$$H_0^{-1} = D_1^{-1} \cdot \Gamma_0^{-1}$$

d'où l'on déduit

$$D_1^{-1} = \Gamma_1 = H_0^{-1} \cdot \Gamma_0$$

et

$$\|\Gamma_1\| \leq \tfrac{B_0}{1-a}.$$

Si nous désignons par B_1 l'expression $\|\Gamma_1\|$, l'inégalité ci-dessus devient:

$$B_1 \leq \tfrac{B_0}{1-a} \tag{12}$$

Prouvons maintenant que:

$$B_1^2 K (1+\rho) d_1 < a.$$

En effet de (10) et (12) on déduit

$$B_1^2 K (1+\rho) d_1 \le \frac{B_0^4 K^2 (1+\rho) \alpha d_0^q}{(1-a)^2} = \frac{\left[B_0^2 \cdot K \cdot (1+\rho) d_0\right]^2}{(1-a)^2 (1+\rho)} \cdot \alpha \cdot d_0^{q-2}$$
$$\le \frac{a^2 \alpha d_0^{q-2}}{(1-a)^2 (1+\rho)} = a.$$

La dernière égalité est justifiée du fait que a représente la plus petite racine de l'équation (5).

Supposons par la suite que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

$\alpha)$ il existe les opérateurs $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$;
$\beta)$ $B_i \le \frac{B_{i-1}}{1-a}$ où $B_i = \|\Gamma_i\|$ $i = 1, 2, \ldots, s$;
$\gamma)$ $B_s^2 K (1+\rho) d_s \le a, d_s = \|f(x_s)\|$;
$\delta)$ $x_i \in S,\ g(x_i) \in S,$ pour $i = 1, 2, \ldots, s+1$

Dans ces hypothèses, en employant une identité analogue à celle de laquelle on a déduit la relaiton (10), on a l'inégalité suivante:

$$\|f(x_{s+1})\| \le K B_s^2 \alpha \|f(x_s)\|^q \tag{13}$$

c'est-à-dire:

$$d_{s+1} \le K B_s^2 \alpha d_s^q$$

Mais de $\beta)$ il résulte l'inégalité suivante:

$$d_{s+1} \le \frac{K B_0^2 \alpha d_s^q}{(1-a)^{2s}}$$

où

$$d_{s+1} \le b c^s d_s^q. \tag{14}$$

Des hypothèses de l'induction il résulte les inégalités suivantes:

$$d_{i+1} \le b c^i d_i^q, \qquad i = 0, 1, \ldots, s.$$

En muiltipliant par $\frac{1}{b^{q-1}}$ les termes des dernières inégalités et en désignant par δ_i l'expression:

$$\delta_i = b^{-\frac{1}{q-1}} d_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, s$$

nous obtenons:

$$\delta_{i+1} \le c^i \cdot \delta_i^q, \qquad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Admettons maintenant l'existence des nombres:

$$\alpha_i \text{ et } \beta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, s$$

tels que:

$$\delta_i \leq c^{\alpha_i} \delta^{\beta_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

où $\beta_0 = 1$ et $\alpha_0 = 0$. Alors on a:

$$\delta_{i+1} \leq c^i c^{q\alpha_i} \delta_0^{\beta_i q}$$

c'est-à-dire

$$\delta_{i+1} \leq c^{q\alpha_i + i} \delta_0^{\beta_i q} = c^{\alpha_{i+1}} \cdot \delta_0^{\beta_{i+1}}$$

où $\alpha_{i+1} = q\alpha_i + i$ $\alpha_0 = 0$ $i = 0, 1, \ldots, s$; et $\beta_{i+1} = q \cdot \beta_i, \beta_0 = 1$ $i = 0, 1, \ldots, s$.

Des relations ci-dessus nous déduisons facilement que:

$$\alpha_i = \tfrac{i-1-iq+q^i}{(q-1)^2}, \; \beta = q^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Alors si nous envisageons le fait que $c > 1$, nous déduisons les inégalités suivantes:

$$\delta_{i+1} \leq (c\delta_0)\, q^{q^{i+1}}; \qquad i = 0, 1, \ldots, s. \tag{15}$$

Démontrons maintenant que l'applicaiton Γ_{s+1} existe.

En effet on a:

$$\|D_s - D_{s+1}\| = \|[x_s, g(x_s); f] - [x_{s+1}, g(x_{s+1}); f]\| \leq K(1+\rho)(B_s d_s)$$

et

$$\|\Gamma_s (D_s - D_{s+1})\| \leq K(1+\rho) B_s^2 d_s \leq a.$$

Par conséquent l'applicaiton

$$H_s = I - \Gamma_s \cdot (D_s - D_{s+1}) = \Gamma_s D_{s+1}$$

admet une inverse pour laquelle

$$\left\|H_s^{-1}\right\| \leq \tfrac{1}{1-a}.$$

Des relations ci-dessus nous déduisons que:

$$D_{i+1}^{-1} = \Gamma_{i+1} = H_i^{-1} \cdot \Gamma_i$$

c'est-à-dire

$$\|\Gamma_{i+1}\| \leq \tfrac{B_i}{1-a}$$

ce qui nous conduit à l'inégalité suivante:

$$B_{s+1} \leq \tfrac{B_s}{1-a} \tag{16}$$

c'est-à-dire à l'inégalité $\beta)$ pour $i = s+1$.

Démontrons maintenant qu'on a l'inégalite $\gamma)$ pour $s+1$ c'est-à-dire:

$$B_{s+1}^2 K(1+\rho)\, d_{s+1} \leq a.$$

En effet de (15) il résulte $d_s \leq d_0$ et alors de (13) et (16) déduisons:

$$B_{s+1}^2 K (1+\rho)\, d_{s+1} \leq \tfrac{B_s^2 K)1+\rho}{(1-a)^2} K B_s^2 \alpha d_s^q$$
$$= \tfrac{B_s^2 K(1+\rho) d_s}{(1-a)^2(1+\rho)} \alpha d_s^{q-2} \leq \tfrac{a^2 \alpha d_s^{q-2}}{(1-a)^2(1+\delta)} \leq a.$$

Démontrons par la suite l'appartenance de x_{i+1} et celle de $g(x_{s+1})$ a la sphère S.

On démontre facilement que $\alpha_{s+1} + \frac{s+1}{2} \leq q^{s+1}$, pour $q \geq 2$, pour chaque $s \in \mathbb{N}$; alors on déduit de (2)

$$\begin{aligned} \|x_{s+2} - x_{s+1}\| &\leq \|\Gamma_{s+1}\| \cdot \|f(x_{s+1})\| \leq \tfrac{B_0}{(1-a)^{s+1}} \\ &\leq B_0 \cdot c^{\frac{s+1}{2}} \cdot c^{\alpha_{s+1}} \cdot \delta_0^{\beta_{s+1}} \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \\ &\leq c^{\alpha_{s+1} + \frac{s+1}{2}} \cdot \delta^{\beta_{s+1}} \cdot B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \\ &\leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^{s+1}}. \end{aligned}$$

Des relations ci-dessus il résulte les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \|x_{s+2} - x_0\| &\leq \sum_{k=0}^{s+1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \sum_{k=0}^{s+1} (c\delta_0)^{q^k} \\ &< \tfrac{B_0 \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c \cdot \delta_0}{1-(c\cdot\delta_0)^{q-1}} \leq \mu < \lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\|g(x_{s+2}) - x_0\| \leq \\ &\leq \|g(x_{s+2}) - g(x_{s+1})\| + \cdots + \|g(x_1) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \\ &\leq \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\| \leq \lambda, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x_{s+2} \in S$ et $g(x_{s+2}) \in S$.

Nous étudions par la suite la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Des inégalités.

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \tfrac{B_0}{b^{\frac{1}{q-1}}} (c\delta_0)^{q^k},$$

que sont vraies pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il résulte

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \sum_{k=n}^{n+p-1} \cdot (c\delta_0)^{q^k} \\ &\leq \tfrac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\delta_0)^{(q-1)q^n}} \end{aligned} \tag{17}$$

pour chaque $n,\ p \in \mathbb{N}$.

En envisageant le fait que $c \cdot \delta_0 < 1$ et le fait que l'espace X est complet, il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Désignons par $\bar{x}$ la limite; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. De l'inégalité (17) en y faisant $p \to \infty$ on déduit:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\delta_0)^{(q-1)q^n}}$$

De $\delta_n \leq (c\delta_0)^{q^n}$ il résulte que:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = \theta$$

ce qui signifie que $\bar{x}$ est la solution de l'équation (1). □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balasz M. şi Goldner G., *Diferenţe divizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor.* St. cerc. mat. 21, 7, (1969), pp. 985–995.

[2] Diaconu A., *Interpolation dans les espaces arbitraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenus par l'interpolations inverse. III.* Research Seminar of Functional Analysis and Numerical Methodes, Preprint Nr.1 1985, pp. 21–70.

[3] Lică Dionis, *Analiza funcţională şi rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare.* Editura Ştiinţifică, Kişinău, 1975.

[4] Păvăloiu I. *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires*, Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliquées. **XIII**, 1, (1968), pp. 149–158.

[5] Păvăloiu I., *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor.* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.

[6] Ul'm, S., *Ob obobscennîh razdelennîh raznostiah I*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S.S.R. 16, 1, (1967), pp. 13–26.

[7] Ul'm, S. *Ob obobscennîh razdelennîh raznostiah II*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S. S.R. 16, 2, (1967), pp. 146–155

Reçu le 20.XII. 1990

Institutul de Calcul
Str. Republicii, 37
3400 Cluj-Napoca
România