MATHEMATICA - REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 12 (1983) no. 1, pp. 83–88
ictp.acad.ro/jnaat

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES DE TYPE INTERPOLATOIRE À VITESSE DE CONVERGENCE OPTIMALE

par
I. PĂVĂLOIU et IOAN ŞERB
(Cluj-Napoca)

Dans cet article nous étudions une classe de méthodes iteŕatives pour la résolution des équations de la forme:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle et I est un invervalle de l'axe réel.

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1},\ n+1$ points distincts de l'intervalle I et par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1},\ n+1$ nombres naturels tels que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = m + 1, \tag{2}$$

où $m \in \mathbb{N}$.

Il est bien connu que quels que soiient les nombres $y_i^j,\ j = 0,\ 1, \ldots, \alpha_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n+1$, il existe un seul polynôme H_1 de degré au plus m qui vérifie les conditions:

$$H_1^{(j)}(x_i) = y_i^j,\ j = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{3}$$

Le polynôme H_1 déterminé par les conditions (3) a la forme:

$$H_1(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} y_i^j \tfrac{1}{k!j!} \left[\tfrac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)} \tfrac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i - j - k}}, \tag{4}$$

où

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{\alpha_i}. \tag{5}$$

Si on suppose que la fonction f admet une dérivée d'ordre $m+1$ sur l'intervalle I et si $y_i^j = f^{(j)}(x_i)$, $j = 0,1,\ldots,\alpha_i - 1$, $i = 1,2,\ldots,n+1$, alors H_1, le polynôme d'Hermite de la fonction f, relativement aux noeuds x_i, aux ordres de mutiplicité α_i, vérifie l'égalité:

$$f(x) - H_1(x) = \tfrac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega(x), \tag{6}$$

où $\xi \in I$.

Dans ce qui suit on suppose que $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in I$ et on désigne par $F = f(I)$. Il résulte que $f : I \to F$ est une fonction bijective et il existe $f^{-1} : F \to I$. La fonction inverse f^{-1} admet une dérivée d'ordre $m+1$, pour tout $x \in F$.

La dérivée d'ordre $k, k \leq m+1$ sur un point $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in F$ peut se calculer par la formule:

(7)

$$\left(f^{-1}\right)^{(k)}(y_0) = \sum \tfrac{(2k-i_1-2)!(1-)^{k+i_1-1}}{i_2!\ldots i_k!(f'(x_0))^{2k-1}} \left(\tfrac{f'(x_0)}{1!}\right)^{i_1} \left(\tfrac{f''(x_0)}{2!}\right)^{i_2} \ldots \left(\tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)^{i_k},$$

où la somme ci-dessus est étendue à toutes les solutions entières et nonnégatives du système:

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 + \ldots + (k-1)\,i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k = k-1. \end{cases} \tag{8}$$

Si on suppose que l'équation (1) a une racine dans l'intervalle I, cette racine est unique parce que $f'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in I$ et nous la désignerons par $\bar{x}$. Alors de $f(\bar{x}) = 0$ il résulte que $\bar{x} = f^{-1}(0)$.

Dans ce qui suit, dans l'expression du polynôme d'interpolation donnée par (4) on prendra comme noeuds d'interpolation les valeurs $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ et comme valeurs y_i^j les valeurs des dérivées $\left(f^{-1}\right)^{(j)}(y_i)$, $i = 1,2,\ldots,n = 1$, $j = 0,1,\ldots,\alpha_i - 1$. Par conséquent on obtient le polynôme d'interpolation d'Hermite pour la fonction inverse f^{-1}. Ce polynôme a alors la forme suivante:

$$H(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \left(f^{-1}\right)^{(j)}(y_i) \tfrac{1}{k!j!} \left[\tfrac{(y-y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)}\right]_{y=y_i}^{(k)} \tfrac{\omega(y)}{(y-y_i)^{\alpha_i - j - k}}, \tag{9}$$

où

$$\omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)^{\alpha_i}. \tag{10}$$

De (6) il résulte l'égalité

$$f^{-1}(y) - H(y) = \tfrac{\left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}\omega(y),$$

où $\eta \in F$.

Si $y = 0$, alors $\bar{x} = f^{-1}(0)$ et

$$\bar{x} - H(0) = \frac{\left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(\eta_1)}{(m+1)!}\omega(0), \tag{11}$$

où $\eta_1 est$ un point du plus petit intervalle contenant les points:

$$0, f(x_1), \ldots, f(x_{n+1}).$$

Si on désigne par F_1 cet intervalle et par

$$M_{m+1} = \sup_{y \in F_1} \left| \left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(y) \right|,$$

alors

$$|\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|\omega(0)|.$$

De (10) et du fait que $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+1$ on déduit

$$|\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|f(x_1)|^{\alpha_1} \cdot |f(x_2)|^{\alpha_2} \ldots |f(x_{n+1})|^{\alpha_{n+1}}. \tag{12}$$

De l'inégalité (12) il résulte que si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont dans un voisinage suffisamment petit de $\bar{x}$, alors $\prod_{i=1}^{n+1}|f(x_i)|^{\alpha_i}$ se trouvera dans un voisinage donné d'avance de 0. En conséquence, nous pouvons supposer que $H(0)$ est un approximant de la racine $\bar{x}$ de l'équation (1).

Si $|\bar{x} - H(0)|$ n'est pas suffisamment petit, alors, par des itérations successives on peut obtenir des approximations meilleures. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, $n+1$ approximations initiales de la racine $\bar{x}$ de (1). Soit $x_{n+2} = H(0) = H(y_1, \alpha_1; \ldots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; 0)$, où $H(y_1, \alpha_1; y_2, \alpha_2; \ldots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; y)$ est le polynôme d'interpolation d'Hermite (9) de la fonction f^{-1} relatif aux noeuds $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ aux ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ et $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+1$. Si nous considérons maintenant le nouveau système de noeuds $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$ an obtient une nouvelle approximation $x_{n+3} = H(y_2, \alpha_1; y_3, \alpha_2; \ldots; y_{n+2}, \alpha_{n+1}; 0)$ et ainsi de suite.

Mais, si nous rangeons les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans l'ordre $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ on obtient une nouvelle suite d'approximations de $\bar{x}$, donnée par les formules

(13)

$$\begin{cases} x_{n+2} = H\left(y_{i_1}, \alpha_{i_1}; y_{i_2}, \alpha_{i_2}; \ldots; y_{i_{n+1}}; \alpha_{i_{n+1}}; 0\right) = H(0) \\ x_{n+s+2} = H\left(y_{i_{s+1}}, \alpha_{i_1}; \ldots; y_{i_{n+1}}, \alpha_{n+1-s}; y_{n+2}, \alpha_{i_{n+2-s}}; \ldots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0\right), \\ \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{n+s+2} = H\left(y_{s+1}, \alpha_{i_1}; y_{s+2}, \alpha_{i_2}; \ldots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0\right),\ s = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

où $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots$

Pour chaque permutation des nombres $1, 2, \ldots, n + 1$ on obtient une suite d'approximations de $\bar{x}$ donnée par (13). En tout, il y a $(n + 1)!$ suites d'approximations de $\bar{x}$.

On pose la question de choisir parmi ces $(n + 1)!$ suites, celle qui assure la vitesse de convergence maximale.

Pour résoudre ce problème, on considère les équations suivantes

$$P(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \ldots - a_2 t - a_1 = 0, \tag{14}$$

$$Q(t) = t^{n+1} - a_1 t^n - a_2 t^{n-1} - \ldots - a_n t - a_{n+1} = 0, \tag{15}$$

$$R(t) = t^{n+1} - a_{i_1} t^n - \ldots - a_{i_n} t - a_{i_{n+1}} = 0, \tag{16}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in R$ vérifient les relations

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} > 1, \ a_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{17}$$

$$a_{n+1} \geq a_n \geq \ldots \geq a_2 \geq a_1, \tag{18}$$

et $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ est une permutation quelconque de $1, 2, \ldots, n + 1$.

Lemme 1. *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ *vérifient la relation* (17), *alors chaque équation de la forme* (16) *a une seule racine plus grande que l'unité. Si, de plus,* $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ *vérifient la condition* (18) *et si* a, b, c *sont respectivement les racine positives des équaitons* (14), (15) *ou* (16), *alors on a les inégalités*

$$1 < b \leq c \leq a \tag{19}$$

Démonstration. On désigne par s le plus grand nombre pour lequel $a_{i_s} \neq 0$. Alors $a_{i_{s+1}} = a_{i_{s+2}} = \ldots = a_{i_n} = a_{i_{n+1}} = 0$, $a_{i_s} \neq 0$. Désignons par ψ la fonction définie par $\psi(t) = R(t)/t^{n-s+1}$. On a $\psi(1) = 1 - a_{i_1} - \ldots - a_{i_s} < 0$ et $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = \infty$, donc l'équation $\psi(t) = 0$ admet une racine plus grande que l'unité. Alors, l'équation $R(t) = 0$ a une racine plus grande que 1. L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant la fonction $f(t) = -t^{n+1} R(1 \backslash t)$ qui vérifie la condition $f'(t) > 0$ pour $t > 0$.

Pour prouver les inégalites (19) il suffit de montrer que $R(b) \leq 0$ et $R(a) \geq 0$. En effet

$$\begin{aligned}
R(b) = & R(b) - Q(b) \\
& = (a_1 - a_{i_1}) b^n + (a_2 - a_{i_2}) b^{n-1} + \ldots + (a_n - a_{i_n}) b + a_{n+1} - a_{i_{n+1}} \\
& = (b - 1) \big[(a_1 - a_{i_1}) b^{n-1} + (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2}) b^{n-2} + \ldots \\
& \quad + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_{n-1}}) b \\
& \quad + a_1 + \ldots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_n} \big] \leq 0
\end{aligned}$$

parce que $b > 1$ et de (18) il résulte

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_s - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_s} \leq 0, \qquad \text{pour } s = 1, 2, \ldots, n.$$

De manière analogue on montre que $R(a) \geq 0$.

Soit maintenant $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n+1$, pour laquelle les nombres naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ qui vérifient la relation (2) peuvent se ranger en ordre croissant

$$\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n+1}}. \tag{20}$$

Le suite correspondante des noeuds est $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ et la suite correspondante des approximations successive de $\bar{x}$ est donnée par (13). Si nous désignons par

$$a_s = \alpha_{i_s}, s = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{21}$$

et par

$$u_s = x_{i_s}, s = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{22}$$

alors la suite d'approximations (13) devient $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ où

$$x_{n+s+2} = H\left(y_{s+1}, a_1; y_{s+2}, a_2; \ldots; y_{s+n+1}, a_{n+1}; 0\right), \tag{23}$$

$s = 0, 1, \ldots,$où $y_i = f(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

L'inégalité (12) devient

$$|\bar{x} - H(0)| = |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \tfrac{M}{(m+1)!} |f(u_1)|^{a_1} \ldots |f(u_{n+1})|^{a_{n+1}}, \tag{24}$$

où $M = \sup\limits_{y \in F} \left| \left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(y) \right|$. Si nous désignons par $\beta = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$ alors de (23) et (24) on obtient

$$|\bar{x} - u_{n+2}| \leq \tfrac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_1|^{a_1} \ldots |\bar{x} - u_{n+1}|^{a_{n+1}}. \tag{25}$$

En général, is les éléments de la suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ sont dans l'intervalle I, alors

$$|\bar{x} - u_{n+s+1}| \leq \tfrac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_s|^{a_1} \ldots |\bar{x} - u_{s+n}|^{a_{n+1}} \tag{26}$$

$s = 1, 2, \ldots$. Si nous écrivons $\rho_i = \beta \sqrt{\tfrac{\beta M}{(m+1)!}} |\bar{x} - u_i|, i = 1, 2, \ldots,$ alors de (26) on obtient

$$\rho_{n+s+1} \leq \rho_{n+s}^{a_{n+1}} \rho_{n+s-1}^{a_n} \cdots \rho_{s+1}^{a_2} \rho_s^{a_1}, \tag{27}$$

$s = 1, 2, \ldots$.

Nous supposons maintenant qu'il existe un nombre $d, 0 < d < 1$ tel que

$$\rho_i \leq d^{\omega^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{28}$$

où ω est l'unique racine positive de l'équation

$$t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \ldots - a_2 t - a_1 = 0. \tag{29}$$

Si on suppose que pour un s fixé $s \geq 2$ nous avons

$$\rho_{n+s} \leq d^{x+s}, \tag{30}$$

alors de (27), (28) et (29) il résulte immédiatement que

$$\begin{aligned} \rho_{n+s+1} &\leq d^{a_{n+1}\omega^{n+s}} \cdot d^{a_n\omega^{n+s-1}} \ldots d^{a_2\omega^{s+1}} \cdot d^{a_1\omega^s} \\ &= d^{a_{n+1}\omega^{n+s}+a_n\omega^{n+s-1}+\ldots+a_2\omega^{s+1}+a_1\omega^s} = d^{\omega^{n+s+1}}, \end{aligned} \tag{31}$$

et par induction il résulte que

$$\rho_n \leq d^{\omega^n}, n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

La solution ω de l'équation (29) s'appelle l'ordre de convergence de la méthode itérative (23). On a

$$|\bar{x} - u_n| \leq \frac{1}{\beta \sqrt[m]{\frac{M\beta}{(m+1)!}}} d^{\omega^n}, n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

d'où il résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \bar{x}$. □

On remarque que l'ordre de convergence des méthodes (13) dépend de la racine positive ω de l'equation (29).

En tenant compte du lemme et des considérations ci-dessus on obtient le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ *une permutation de* $1, 2, \ldots, n+1$ *et* $M(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ *la méthode itérative* (13) *correspondante. Si* $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha_{i_{n+1}}$ *où* α_{i_j} *est l'ordre de multiplicité du noeud* $y_{i_j} = f(x_{i_j})$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, *alors dans les conditions* (20) *méthode* (23) *assure l'ordre de convergence* ω *maximal, parmi les* $(n+1)!$ *méthodes itératives de la forme* (13).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ostrowski, M. A., *Solution of Equations and Systems of Equations,* Academic Press, New-York and London, 1960.

clickable → [2] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, 1981.

clickable → [3] Păvăloiu, I., Iancu, C., *La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite*, Seminar of functional analysis and Numerical methods, "Babeş-Bolyai" University, Research Seminaries, Preprint Nr. 4, (1981), 72–84.
republished in: Mathematica (Cluj), 26(49) (1984), no. 2, pp. 115–123.

Recu le 5.III.1983

Institutul de Calcul al Universităţii Babeş-Bolyai
Str. Republicii 37
3400 Cluj-Napoca