"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminaries
Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1 , 1985, pp. 71 - 78.

RESOLUTION DES ÉQUATIONS À L'AIDE DES FONCTIONS RATIONNELLES D'INTERPOLATION INVERSE

C. Iancu et I. Păvăloiu

1. Désignons par $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, où I est un intervalle de l'axe réel.

Désignons par x_0, x_1, x_2 trois points distincts de I . Considérons l'ensemble $\varphi_{a,b,\alpha,\beta}$ des fonctions de la forme :

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta} \quad , \quad \alpha \neq 0 \quad ,$$

où a, b, α, β sont des paramètres réels qu'il s'agit de déterminer de telle manière que la fonction φ coincide avec la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2 , c'est-à-dire

$$(2) \qquad \varphi(x_0) = f(x_0) \; , \quad \varphi(x_1) = f(x_1) \; , \quad \varphi(x_2) = f(x_2) \; .$$

Nous supposerons d'abord que $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$, $x_0 \neq x_2$ et $f(x_0) \neq f(x_1)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x_0) \neq f(x_2)$.

Nous déduisons de (1) et (2)

$$(3) \qquad \frac{ax_0 + b}{\alpha x_0 + \beta} = f(x_0) \quad , \quad \frac{ax_1 + b}{\alpha x_1 + \beta} = f(x_1) \quad , \quad \frac{ax_2 + b}{\alpha x_2 + \beta} = f(x_2) \; .$$

Le système (3) contient 4 inconnues, dont 3 seulement sont essentielles. Si aux équations (3) nous ajoutons (1) et éliminons les paramètres a, b, α, β , nous obtenons l'égalité

$$(4) \qquad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_0)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x_0)}{(x - x_0)(x_2 - x_1)}$$

d'où il résulte

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} = \frac{[x_1,x_2;f]}{[x_0,x_2;f]} \cdot \frac{x - x_1}{x - x_0}$$

De (5) nous déduisons pour les paramètres a,b,α,β les expressions suivantes

$$(6) \qquad \begin{aligned} a &= f(x_1)[x_0,x_2;f] - f(x_0)[x_1,x_2;f] \\ b &= x_1 f(x_0)[x_1,x_2;f] - x_0 f(x_1)\cdot[x_0,x_2;f] \\ \alpha &= [x_0,x_2;f] - [x_1,x_2;f] \\ \beta &= [x_1,x_2;f]\, x_1 - [x_0,x_2;f]\, x_0 \end{aligned}$$

où nous avons désigné par $[x,y;f]$ la différence divisée de la fonction f sur les points x et y.

De cette manière la fonction φ donnée par (1) qui vérifie les conditions (2) est parfaitement déterminée.

Dans ce qui suit nous désignons, pour fixer les idées, par F l'image de l'intervalle I par la fonction f et nous supposerons qu'il existe $f^{-1}: F \longrightarrow I$.

Si $\bar{x} \in I$ est une racine de l'équation

$$(7) \qquad f(x) = 0 \;,$$

alors $0 \in F$ et evidemment $\bar{x} = f^{-1}(0)$.

Considérons à présent l'ensemble $\varphi_{a',b',\alpha',\beta'}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-\frac{\beta'}{\alpha'}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de la forme suivante:

$$(8) \qquad \varphi(y) = \frac{a'y + b'}{\alpha' y + \beta'} \;, \qquad \alpha' \neq 0 \;.$$

Nous déterminerons les paramètres a',b',α',β' de telle sorte que la fonction (8) vérifie les conditions

$$(9) \qquad \varphi(y_0) = x_0 \;, \quad \varphi(y_1) = x_1 \;, \quad \varphi(y_2) = x_2 \;,$$

où $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2,3$.

En procédant comme ci-dessus nous déduisons pour les paramètres a',b',α',β' les expressions suivantes :

$$(10) \qquad \begin{aligned} a' &= x_1[x_1,x_2;f] - x_0[x_0,x_2;f] \\ b' &= f(x_1)\, x_0[x_0,x_2;f] - f(x_0)\, x_1[x_1,x_2;f] \\ \alpha' &= [x_1,x_2;f] - [x_0,x_2;f] \\ \beta' &= f(x_1)[x_0,x_2;f] - f(x_0)[x_1,x_2;f] \end{aligned}$$

La fonction φ donnée par (8) où a',b',α',β' ont les valeurs (10) représente la fonction rationnelle d'interpolation inverse de la fonction f. Une approximation pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (7) s'obtient de la sorte :

$$(11) \qquad \bar{x} \simeq \varphi(0) = \frac{x_0 f(x_1)[x_0,x_2;f] - x_1 f(x_0)[x_1,x_2;f]}{f(x_1)[x_0,x_2;f] - f(x_0)[x_1,x_2;f]}$$

En utilisant (11) on peut obtenir diverses méthodes itératives pour la résolutions de l'équation (7).

On obtient une première méthode en se donnant les points x_0 et x_1 et en prenant $x_2 = z_0$. Il résulte alors de (11) la méthode itérative suivante :

$$(12) \qquad z_{n+1} = \frac{x_0 f(x_1)[x_0,z_n;f] - x_1 f(x_0)[x_1,z_n;f]}{f(x_1)[x_0,z_n;f] - f(x_0)[x_1,z_n;f]} \;, \quad z_0 = x_2 \;,$$

$$n = 0,1,\ldots .$$

Nous supposerons que $f(x_1)/f(x_0) \neq [x_1,\bar{x};f] / [x_0,\bar{x};f]$ et que les éléments de la suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ peuvent être déterminés. Si la suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} z_n = \bar{x}$, il s'ensuit immédiatement que $f(\bar{x}) = 0$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ est la racine de l'équation $f(x) = 0$.

On peut obtenir une autre méthode itérative en se donnant, par exemple, le point x_0 et en prenant $x_1 = z_0$ et $x_2 = z_1$.

Il résulte alors de (11)

$$(13) \qquad z_{n+1} = \frac{x_o\, f(z_{n-1})\, [x_o, z_n; f] - z_{n-1}\, f(x_o)\, [z_{n-1}, z_n; f]}{f(z_{n-1})\, [x_o, z_n; f] - f(x_o)\, [z_{n-1}, z_n; f]}$$

où $z_o = x_1$, $z_1 = x_2$, $n = 1,2, \dots$.

On prouve facilement, dans les conditions analogues à celles de la méthode (12) que si la suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (13) est convergente et $\bar{x} = \lim_{n \to \infty} z_n$, alors $f(\bar{x}) = 0$.

<u>Remarque</u> 1. L'approximation donnée par (11) pour $\bar{x}$ peut se mettre sous la forme

$$(14) \qquad \bar{x} \simeq x_o - \frac{f(x_o)\, [x_1, x_2; f]}{[x_o, x_1; f] \cdot [x_o, x_2; f] - f(x_o)\, [x_o, x_1, x_2; f]}$$

<u>Remarque</u> 2. Supposons que $x_o < x_1 < x_2$ et $\max\{(x_1 - x_o) , (x_2 - x_1)\} < \left| \frac{[x_o, x_2; f]}{[x_o, x_1, x_2; f]} \right|$. Ceci nous assure que la fonction φ donnée par (1) avec a, b, α, β donnés par (6) est continue et indéfiniment dérivable dans l'intervalle $[x_o, x_2]$, c'est-à-dire $-\frac{\beta}{\alpha} \notin [x_o, x_2]$.

Si $x \in [x_o, x_2]$, et si nous supposons que la fonction f admet des dérivées jusqu'au 3-ème ordre inclusivement dans l'intervalle (x_o, x_2) , alors il est facile de voir qu'il existe au moins un point $\xi \in (x_o, x_2)$ tel que

$$(15) \qquad f(x) - \varphi(x) = \frac{f'''(\xi) - \varphi'''(\xi)}{6}\, \omega(x) \ ,$$

où $\omega(x) = (x - x_o)(x - x_1)(x - x_2)$ et $\varphi'''(x) = \frac{6\alpha^2 (a\beta - \alpha b)}{(\alpha x + \beta)^4}$.

En ajoutant aux hypothèses ci-dessus les conditions $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in (x_o, x_2)$ et $\max\{|f(x_1) - f(x_o)| , |f(x_2) - f(x_1)|\} < \left| \frac{[x_1, x_2; f]\, [x_o, x_1; f]}{[x_o, x_1, x_2; f]} \right|$ on obtient de (15) l'évaluation sui-

vante :

$$(16) \qquad |f^{-1}(0) - \varphi(0)| \leq \frac{|(f^{-1}(\xi))''' - \varphi'''(\xi)|}{6} \cdot |f(x_o)|\, |f(x_1)|\, |f(x_2)|$$

où $\varphi'''(\xi) = \frac{6\alpha'^2 (a'\beta' - \alpha' b')}{(\alpha' \xi + \beta')^4}$, $\xi \in (u, v)$ où

$$u = \min\{f(x_o) , f(x_2)\} \quad \text{et} \quad v = \max\{f(x_o), f(x_2)\}.$$

À propos de la délimitation (16) nous avons supposé que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans l'intervalle (x_o, x_2) .

L'inégalité (16) représente une délimitation de l'erreur commise en approximant la racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ par $\frac{b'}{\beta'}$ donnée par l'expression (11) .

On remarque dans (16) que $\frac{b'}{\beta'}$ approche $\bar{x}$ d'autant mieux que $f(x_o)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ sont plus proches de zéro.

Nous nous proposons à présent de déterminer une fonction de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$(17) \qquad \varphi(y_o) = x_o \ ; \quad \varphi'(y_o) = 1/f'(x_o) \ ; \quad \varphi(y_1) = x_1 \ .$$

Nous déduisons de ces conditions pour les coefficients a', b', α', β' les expressions suivantes :

$$(18) \qquad \begin{aligned} a' &= x_1\, [x_o, x_1; f] - x_o\, f'(x_o) \\ b' &= f(x_1)\, x_o\, f'(x_o) - f(x_o)\, x_1\, [x_o, x_1; f] \\ \alpha' &= [x_o, x_1; f] - f'(x_o) \\ \beta' &= f(x_1) . f'(x_o) - f(x_o)\, [x_o, x_1; f] \end{aligned}$$

qui nous conduisent à l'approximation suivante pour $\bar{x}$:

$$(19) \qquad \bar{x} \simeq \frac{b'}{\beta'} = \frac{x_o\, f(x_1)\, f'(x_o) - x_1\, f(x_o) . [x_o, x_1; f]}{f(x_1)\, f'(x_o) - f(x_o)\, [x_o, x_1; f]} .$$

Dans l'hypothèse $f'(x) \neq 0$ dans l'intervalle (x_o, x_1) il existe la délimitation suivante :

$$(20) \qquad \left|\bar{x} - \frac{b'}{\beta'}\right| \leq \frac{|(f^{-1}(\xi))''' - \varphi'''(\xi)|}{6} \, |f(x_o)|^2 . |f(x_1)|$$

où $\xi \in (u', v')$, où $u' = \min\{f(x_o), f(x_1)\}$ et $v' = \max\{f(x_o), f(x_1)\}$, et la fonction φ a la forme (8) avec les coefficients donnés par (18) .

Nous allons supposer à présent que nous connaissons les valeurs de la fonction f aux points $x_o < x_1 < \ldots < x_n$, où $x_i \in I$, $i = o,1,\ldots,n$ ainsi que la valeur de la dérivée de la fonction f au point x_o . Nous désignerons , pour fixer les idées, par s le plus petit nombre naturel pour lequel l'équation $f(x) = 0$ admet une racine dans l'intervalle (x_s, x_{s+1}) . Nous supposerons que $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$.

Nous désignons par $\varphi_o : [f(x_o) , f(x_1)] \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme

$$(21) \qquad \varphi_o(y) = \frac{a_o y + b_o}{\alpha_o y + \beta_o}$$

Si nous exigeons que φ_o satisfasse aux conditions

$$(22) \qquad \varphi_o(y_o) = x_o \ , \quad \varphi_o'(y_o) = 1/f'(x_o) \ , \quad \varphi_o(y_1) = x_1$$

où $y_i = f(x_i)$, $i=o,1,\ldots,n$, alors les coefficients a_o, b_o, α_o, β_o ont la forme suivante :

$$(23) \qquad \begin{aligned} a_o &= x_1[x_o,x_1;f] - x_o f'(x_o) \\ b_o &= f(x_1)\, x_o\, f'(x_o) - f(x_o)\, x_1\, [x_o,x_1;f] \\ \alpha_o &= [x_o,x_1;f] - f'(x_o) \\ \beta_o &= f(x_1).f'(x_o) - f(x_o)[x_o,x_1;f] \end{aligned}$$

Nous déterminerons à présent les fonctions

$\varphi_i : [f(x_i), f(x_{i+1})] \to \mathbb{R}$, où

$$(24) \qquad \varphi_i(y) = \frac{a_i y + b_i}{\alpha_i y + \beta_i} \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \ .$$

de telle manière qu'elle satisfassent aux conditions :

$$(25) \qquad \varphi_i(y_i) = x_i \ , \quad \varphi_i'(y_i) = \varphi_{i-1}'(y_i) \ , \quad \varphi_i(y_{i+1}) = x_{i+1} \ , \quad i = 1,2,\ldots, s \ .$$

Nous considérons alors comme une approximation pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (7) le nombre

$$\bar{x}_p = \varphi_s(0) \ .$$

Si nous écrivons $T_{i-1} = 1/\varphi_{i-1}'(y_i)$, alors nous obtenons pour les coefficients a_i, b_i, α_i, β_i de (24) les expressions suivantes :

$$(26) \qquad \begin{aligned} a_i &= x_{i+1}[x_i,x_{i+1};f] - x_i T_{i-1} \\ b_i &= f(x_{i+1})\, x_i\, T_{i-1} - f(x_i)\, x_{i+1}\, [x_i,x_{i+1};f] \\ \alpha_i &= [x_i,x_{i+1};f] - T_{i-1} \\ \beta_i &= f(x_{i+1})\, T_{i-1} - f(x_i)\, [x_i,x_{i+1};f] \end{aligned}$$

Il résulte de la condition $\bar{x} \simeq \varphi_s(0)$ l'expression suivante pour l'approximation de la racine $\bar{x}$:

$$(27) \qquad \bar{x} \simeq \frac{b_s}{\beta_s} = \frac{f(x_{s+1})\, x_s\, T_{s-1} - f(x_s)\, x_{s+1}\, [x_s,x_{s+1};f]}{f(x_{s+1})\, T_{s-1} - f(x_s)\, [x_s,x_{s+1};f]}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. IMAMOV, A., Reşenie nelineinîh uravnenii metodomi splain- - interpolirovanie , Metodî splain-funkţii , Akademia Nauk SSSR. , Novosibirsk, 81 (1979), 74 -80,

2. PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare , Editura Dacia , Cluj, 1981 .

3. IANCU, C., PAVALOIU, I., Resolution des équations à l'aide des fonctions spline d'interpolation inverse , Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods , "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics , Research Seminaries, Preprint Nr.1, (1984) , 97 - 104 .