„BABEŞ—BOLYAI" UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES

SEMINAR OF

FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr. 1, 1983

CLUJ-NAPOCA
ROMANIA

CONTENTS

tient le théorème suivant:

THEOREME. Soit $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ une permutation de $1, 2, \ldots, n+1$ et $M(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ la méthode itérative (13) correspondante. Si $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha_{i_{n+1}}$, où α_{i_j} est l'ordre de multiplicité du noeud $y_{i_j} = f(x_{i_j})$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, alors dans les conditions (28) $M(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ assure l'ordre de convergence ω maximal, parmi les $(n+1)!$ méthodes itératives de la forme (13).

B I B L I O G R A P H I E

[1] O s t r o w s k i, M. A. Solution of equations and systems of equations, Academic Press, New-York and London, 1960.

[2] P ă v ă l o i u, I., Rezolvarea ecuatiilor prin interpolare, Ed. DACIA, 1981.

[3] P ă v ă l o i u, I., I a n c u, C., La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite, Seminar of functional analysis and numerical methods, "Babeş-Bolyai" University, Research Seminaries, Preprint Nr. 4, (1981), 72-84.

SUR DES MÉTHODES ITÉRATIVES OPTIMALES

par

ION PĂVĂLOIU et IOAN ŞERB

Dans ce travail nous étudions des méthodes itératives pour la résolution de l'équation:

(1) $$x = \varphi(x),$$

où $\varphi : X \longrightarrow X$ est une aplication donnée et (X, ρ) est un espace métrique complet.

A l'application φ nous attacherons une aplication $F : X^k \longrightarrow X$, qui a la propriété suivante:

(2) $$F(x, x, \ldots, x) = \varphi(x), \quad \text{pour chaque } x \in X.$$

Pour résoudre l'équation (1) nous considerons la méthode itérative à plusieurs pas, de la forme:

(3) $$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}), \quad n = k-1, k, k+1, \ldots .$$

Si $i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}$ est une permutation des nombres $0, 1, \ldots, k-1$, alors $i_0+n-k+1, i_1+n-k+1, \ldots, i_{k-1}+n-k+1$ sera une permutation qui correspond aux nombres $n-k+1, n-k+2, \ldots, n$.

Pour une telle permutation on obtient une nouvelle méthode itérative à plusieurs pas:

(4) $$x_{n+1} = F(x_{i_0+n-k+1}, x_{i_1+n-k+1}, \ldots, x_{i_{k-1}+n-k+1}),$$

où $n = k-1, k, \ldots$.

De cette maniere, à partir de l'application donnée F, on obtient $k!$ méthodes itératives, qui sont en général distinctes.

Si dans certaines conditions imposées à l'application F, toutes ces $k!$ méthodes itératives convergent vers une solution de l'équation (1), le problème se pose de choisir la méthode pour laquelle on

obtient la meilleure délimitation de l'erreur.

Dans ce qui suit nous supposerons que F vérifie la relation suivante:

(5) $$\rho(F(u_1,u_2,\dots,u_k),\ F(v_1,v_2,\dots,v_k)) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\ \rho(u_i,v_i)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

quels que soient les éléments $u_1,u_2,\dots,u_k,\ v_1,v_2,\dots,v_k \in X$, où $a_i \geq 0$ et $\beta > 0$ sont données et $0 < \sum_{i=1}^{k} a_i < 1$.

On remarque que si F vérifie les conditions (2) et (5) alors φ vérifie la condition:

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y)) = \rho(F(x,x,\dots,x),\ F(y,y,\dots,y)) \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\ \rho(x,y)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{\beta}} \rho(x,y),$$

et du fait que $0 < \sum_{i=1}^{k} a_i < 1$, il résulte que φ est une contraction, c'est-à-dire que l'équation (1) a une seul solution.

D'autre part, si nous désignons par $\mathcal{F}_{\beta}(a_1,a_2,\dots,a_k)$ l'ensemble des fonctions F vérifiant les conditions (2) et (5), alors si $\beta < \beta'$ il résulte $\mathcal{F}_{\beta}(a_1,a_2,\dots,a_k) \subset \mathcal{F}_{\beta'}(a_1,a_2,\dots,a_k)$.

Pour $\beta < \beta'$ on déduit de l'inégalité de Hölder:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \rho(u_i,v_i)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left[\sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{\frac{\beta}{\beta'}}\ \rho(u_i,v_i)^{\beta}\right) a_i^{1-\frac{\beta}{\beta'}}\right]^{\frac{1}{\beta}} \leq$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\ \rho(u_i,v_i)^{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \left[\sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{1-\frac{\beta}{\beta'}}\right)^{\frac{\beta'}{\beta'-\beta}}\right]^{\frac{\beta'-\beta}{\beta\beta'}} =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\ \rho(u_i,v_i)^{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{\beta'-\beta}{\beta\beta'}} < \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\ \rho(u_i,v_i)^{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}},$$

donc $\mathcal{F}_{\beta}(a_1,a_2,\dots,a_k) \subset \mathcal{F}_{\beta'}(a_1,a_2,\dots,a_k)$.

Considérons les nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,k$, qui vérifient les relations:

(6) $$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{k-1} \geq \alpha_k \geq 0,$$

et

(6') $$0 < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1.$$

Nous considérons à présent les équations

(7) $$P(u) = u^k - \alpha_1 u^{k-1} - \dots - \alpha_{k-1} u - \alpha_k = 0,$$

(8) $$Q(u) = u^k - \alpha_k u^{k-1} - \dots - \alpha_2 u - \alpha_1 = 0,$$

et

(9) $$R(u) = u^k - \alpha_{i_1} u^{k-1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} u - \alpha_{i_k} = 0,$$

où $i_1,i_2,\dots,i_k$ est une permutation quelconque des nombres $1,2,\dots,k$.

LEMME. <u>Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vérifient les conditions (6) et (6') alors chaque équation de la forme (9) a une seule racine positive. Si nous désignons par a la racine positive de l'équation (7) et par b la racine positive de l'équation (8), alors la racine positive c de l'équation (9) vérifie les inégalités suivantes:</u>

(10) $$0 < a \leq c \leq b < 1.$$

<u>Démonstration</u>. Soit $i_1,i_2,\dots,i_k$ une permutation des nombres $1,2,\dots,k$ et soit s le plus grand indice pour lequel $\alpha_{i_s} \neq 0$. Nous avons évidement $\alpha_{i_{s+1}} = \alpha_{i_{s+2}} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$ et $\alpha_{i_s} \neq 0$. Considérons la fonction $\psi(u) = R(u)/u^{k-s}$. Alors $\psi(0) = -\alpha_{i_s} < 0$ et $\psi(1) = R(1) = 1 - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} - \alpha_{i_k} = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k > 0$. Donc $\psi(u)$ a une racine positive dans l'intervalle $(0,1)$. Il résulte que $R(u) = u^{k-s}\psi(u)$ a une racine dans l'intervalle $(0,1)$.

L'unicité de cette racine résulte immédiatement en

L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant l'équation $f(v) = -v^k R(1/v) = 0$, pour laquelle $f'(v) > 0$ si $v > 0$ et $f(0) = -1$.

Pour prouver l'inégalité (10) il suffit de montrer que $R(a) \leqq R(c) = 0$ et $R(b) \geqq R(c) = 0$. En effet, on a:

$$R(a) = a^k - \alpha_{i_1} a^{k-1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} a - \alpha_{i_k} =$$

$$= (\alpha_1 - \alpha_{i_1}) a^{k-1} + (\alpha_2 - \alpha_{i_2}) a^{k-2} + \dots + \alpha_k - \alpha_{i_k} =$$

$$= (a-1)(\alpha_1 - \alpha_{i_1}) a^{k-2} + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}) a^{k-3} + \dots +$$

$$+ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-2} - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_{k-2}}) a +$$

$$+ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_{k-1}}) \leqq 0 ,$$

parce que $0 < a < 1$ et de (6) il résulte que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_s} \geqq 0 ;$$

pour chaque $s = 1,2,\dots,k-1$.

De manière analogue on montre que $R(b) \geqq 0$, Q.E.D.

Maintenant, nous rangeons les coefficients a_i de (5) en ordre décroissant, c'est-à-dire:

(11) $$a_{i_1} \geqq a_{i_2} \geqq \dots \geqq a_{i_k} \geqq 0 ,$$

et nous écrivons

(11') $$\alpha_s = a_{i_s} , \quad s = 1,2,\dots,k.$$

Nous considérons l'application $G : X^k \to X$, donnée par la relation

(12) $$G(u_1,u_2,\dots,u_k) = F(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_k}) ,$$

où $i_1,i_2,\dots,i_k$ est la permutation des nombres $1,2,\dots,k$ qui correspond à la relation (11). On obtient alors de (5), pour G, la

condition

(13) $$\rho(G(u_1,u_2,\dots,u_k), G(v_1,v_2,\dots,v_k)) \leqq$$
$$\leqq \Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \rho(u_i,v_i)^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}} ,$$

quels que soient les éléments $u_1,u_2,\dots,u_k, v_1,v_2,\dots,v_k \in X$, où

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_k \geqq 0 , \quad \beta > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1.$$

Pour résoudre l'équation (1) nous considerons la méthode itérative suivante:

(14) $$x_{n+1} = G(x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-k+1}) , \quad n = k-1,k, \dots ,$$

où $x_0,x_1,\dots,x_{k-1} \in X$.

Si nous écrivons $q_i = \rho(x_i,x_{i+1})$, $i = 0,1, \dots$, alors de (13) et (14) on obtient

(15) $$q_i \leqq \Big(\sum_{s=1}^{k} \alpha_s q_{i-s}^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}} , \quad i = k,k+1, \dots .$$

Si dans l'équation (7) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont données par (11') et si a est la racine positive de l'équation (7), alors $a^{\frac{1}{\beta}} \in (0,1)$.

Soit C une constante positive telle que:

$$q_s \leqq C a^{s/\beta} , \quad \text{pour } s = 0,1,\dots,k-1.$$

De (15) on obtient:

$$q_i \leqq \Big(\sum_{s=1}^{k} \alpha_s q_{i-s}^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqq \Big(C \sum_{s=1}^{k} \alpha_s a^{i-s}\Big)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= C a^{(i-k)/\beta} \Big(\sum_{s=1}^{k} \alpha_s a^{k-s}\Big)^{\frac{1}{\beta}} = C a^{(i-k)/\beta} a^{k/\beta} = C a^{i/\beta} ,$$

$i = k,k+1, \dots$. Puisque $a^{1/\beta} \in (0,1)$ il résulte que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est fondamentale. Désignons par $\bar{x}$ sa limite. Il est évident que $\bar{x}$ est l'unique solution de l'équation (1) et

(16) $$\rho(\bar{x}, x_n) \leq \frac{C\, a^{n/\beta}}{1 - a^{1/\beta}} .$$

Alors, en utilisant le lemma on obtient le théorème suivant:

THEOREME. Supposons que $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ et que l'on donne les $k!$ méthodes itératives de la forme (4), attachées à F.

La méthode itérative pour laquelle on obtient la meilleure délimitation de l'erreur est celle donnée par (14), avec G définie par (12) et qui corresponde à l'ordre décroissante de la suite des coefficients a_i, $i = 1,2,\ldots,k$, de (5).

Remarques. 1) Parce que, de $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ il résulte que φ est une contraction, avec la constante de Lipschits $(\sum_{i=1}^{k} a_i)^{1/\beta}$, il est clair que la méthode itérative

(17) $$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in X, \; n = 0,1, \ldots ,$$

converge vers la solution $\bar{x}$ de l'équation (1). De plus, nous avons

(18) $$\rho(\bar{x}, x_n) \leq C_1 \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i)^{n/\beta}}{1 - (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{1/\beta}} .$$

Nous démontrerons que $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq a$, où a est la solution de l'équation (7), avec α_s, $s = 1,2,\ldots,k$ données par la formule (11').

On a :

$$P(\sum_{i=1}^{k} a_i) = (\sum_{i=1}^{k} a_i)^k - \alpha_1 (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-1} - \alpha_2 (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-2} - \ldots -$$

$$- \alpha_{k-1} (\sum_{i=1}^{k} a_i) - \alpha_k \leq (\sum_{i=1}^{k} a_i)^k - \alpha_1 (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-1} - \alpha_2 (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-1} -$$

$$- \ldots - \alpha_{k-1} (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-1} - \alpha_k (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{k-1} = (\sum_{i=1}^{k} a_i)^k - (\sum_{i=1}^{k} a_i)^k = 0,$$

d'où il résulte que $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq a$.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ et $\varphi(x) = F(x,x,\ldots,x)$. Les formules (16) et (18) valables pour une métrique quelconque et pour chaque paire (F, φ), avec les propriétés ci- dessus, nous montrent que pour la méthode itérative (17) on obtient une délimitation de l'erreur meilleure que dans le cas des autres méthodes de la forme (4). Ceci ne signifie pas que pour chaque choix des points initiaux et chaque application F, la méthode (17) converge plus vite que toutes les méthodes itératives de la forme (4).

Soit, par exemple, $X = \mathbb{R}$, $\rho = |\cdot|$, $\varphi(x) = (1/4) \sin x$, $F(x,y) = (1/2) \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$. On a

$$|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| \leq (1/4)\, |x_1 - x_2| + (1/4)\, |y_1 - y_2| ,$$

pour chaque $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$; $F \in \mathcal{F}_1(1/4, 1/4)$ et $F(x,x) = \varphi(x)$.

On considère les méthodes itératives suivantes:

(19) $$x_{n+1} = (1/4) \sin x_n , \quad n = 0,1,\ldots , \quad x_0 = \pi/2 ,$$

(20) $$x_{n+2} = (1/2) \sin \frac{x_{n+1}}{2} \cos \frac{x_n}{2} , \quad n = 0,1,\ldots , \quad x_0 = \pi/2, \; x_1 = 0,$$

(21) $$x_{n+2} = (1/2) \cos \frac{x_{n+1}}{2} \sin \frac{x_n}{2} , \quad n = 0,1,\ldots , \quad x_0 = \pi/2, \; x_1 = 0.$$

Dans ce cas la suite (20) converge plus vite que la suite (19) où la suite (21).

2) Il existe des méthodes itératives de la forme (4) respectivement (17), pour lesquelles les délimitations (16) respectivement (18) ne peuvent pas s'améliorer, c'est-a-dire:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \rho(\bar{x}, x_n)^{1/n} = a^{1/\beta} ,$$

respectivement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \rho(\bar{x}, x_n)^{1/n} = (\sum_{i=1}^{k} a_i)^{1/\beta} .$$

Exemple. Soit $X = \mathbb{R}$, $\rho = |\cdot|$, $\varphi(x) = (5/6)\, x$, $F(x,y) = (1/2)\, x + (1/3)\, y$, $F(x,x) = \varphi(x)$, $|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| \leq$

$\leq (1/2)\,|x_1 - x_2| + (1/3)\,|y_1 - y_2|$, $\beta = 1$. Soit

(22) $$x_{n+1} = (5/6)\,x_n\,,\ n = 0,1,\ldots\,,\ x_0 \geq 1,$$

(23) $$x_{n+2} = (1/2)\,x_{n+1} + (1/3)\,x_n\,,\ n = 0,1,\ldots\,,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1,$$

(24) $$x_{n+2} = (1/3)\,x_{n+1} + (1/2)\,x_n\,,\ n = 0,1,\ldots\,,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1.$$

Dans ce cas on obtient respectivement les formules:

(22') $$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = 5/6 = 1/2 + 1/3\,,$$

(23') $$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = a\,,$$

où a est la racine positive de l'équation $x^2 - (1/2)\,x - 1/3 = 0$, c'est-à-dire $a = (3 + \sqrt{57})/12$. De la même manière on obtient

(24') $$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = b\,,$$

b est la racine positive de l'équation caractéristique $x^2 - (1/3)\,x - 1/2 = 0$, c'est-à-dire $b = (1 + \sqrt{19})/6$. Il est clair que

$$5/6 < (3 + \sqrt{57})/12 < (1 + \sqrt{19})/6.$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] P ă v ă l o i u, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Ed. DACIA, 1976.

[2] P ă v ă l o i u, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Ed. DACIA, 1981.

[3] W e i n i s c h k e, J. H., Über eine Klasse von Iterationsverfahren, Num. Math., 6 (1964), 395-404.