Ecuaţii diferenţiale care modelează circuite electrice

Daniel Anisiu
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Facultatea de Electronică şi Telecomunicaţii
Str. G. Bariţiu nr. 26-28

Mira-Cristiana Anisiu
Institutul de Calcul Tiberiu Popoviciu al Academiei Române
C. P. 68, 3400 Cluj-Napoca

1 Introducere

Ecuaţiile diferenţiale reprezintă o aplicaţie importantă a calculului diferenţial şi integral. De aceea, ele îşi găsesc locul firesc atât în manualele de liceu, cât şi în programele facultăţilor de ştiinţe. Exemplele ilustrative, dacă sunt bine alese, vor arăta elevilor şi studenţilor atât puterea, cât şi rolul unificator al matematicii în înţelegerea fenomenelor naturii. Este necesar ca astfel de exemple legate de practică să apară mai mult în manuale, cum se procedează în alte ţări (vezi [2]).

2 Exemple şi noţiuni de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea

În manualul [1] există o secţiune (9.6) dedicată ecuaţiilor diferenţiale, care în partea introductivă cuprinde trei exemple:

1. Ecuaţia căderii libere a unui punct material pe verticală

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g; \tag{1}$$

2. Ecuaţia mişcării rectilinii a unui punct material (legea lui Newton), pentru care ecuaţia (1) este un caz particular

$$mx'' = F(t)\,; \tag{2}$$

3. Ecuaţia legii răcirii

$$\frac{dT}{dt} = -kT. \tag{3}$$

Menţionăm că ecuaţia (3) este de ordinul întâi dar, printr-o derivare, poate fi scrisă ca o ecuaţie de ordinul al doilea, şi anume

$$T'' + kT' = 0. \tag{4}$$

Ecuaţiile (1), (2) şi (4) sunt cazuri particulare de ecuaţii liniare de ordinul al doilea

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)\,,\ x \in I. \tag{5}$$

Ecuaţiei neomogene (5) i se ataşează ecuaţia omogenă

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0,\ x \in I. \tag{6}$$

Dacă y_1 şi y_2 sunt soluţii liniar independente (sau, echivalent, wronskianul

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

este diferit de zero pentru orice $x \in I$), atunci soluţia generală a ecuaţiei omogene (6) este

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{7}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

Pentru ecuaţia neomogenă (5), soluţia generală va fi dată de

$$y = y_0 + y_p, \tag{8}$$

unde y_0 este soluţia generală (7) a ecuaţiei omogene ataşate, iar y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Un tip de ecuaţii care modelează fenomene importante, şi care au o metodă simplă de rezolvare, îl constituie ecuaţiile omogene cu coeficienţi constanţi, şi anume

$$Ay'' + By' + C = 0,\ A, B, C \in \mathbb{R},\ A \neq 0. \tag{9}$$

Ecuaţiei (9) i se asociază ecuaţia caracteristică

$$Ar^2 + Br + C = 0,$$

care va avea rădăcinile r_1 şi r_2. Indicăm forma soluţiei generale a ecuaţiei omogene (9) în funcţie de natura rădăcinilor r_1 şi r_2:

r_1, r_2	Soluţia ecuaţiei (9)
reale şi distincte	$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
reale şi confundate $r = r_1 = r_2$	$y_0 = e^{rx} \left(C_1 + C_2 x \right)$
complexe distincte $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_0 = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right)$

3 Modelul unui circuit electric simplu (RLC)

Un circuit RLC (reprezentat schematic în Fig.1) este format din:
- un rezistor cu rezistenţa de R ohmi (Ω);
- o bobină cu inductanţa de L henryi (H);
- un condensator cu capacitatea de C farazi (F),

în serie cu o sursă de tensiune (baterie sau generator), care produce o tensiune de $E\left(t\right)$ volţi la momentul t.

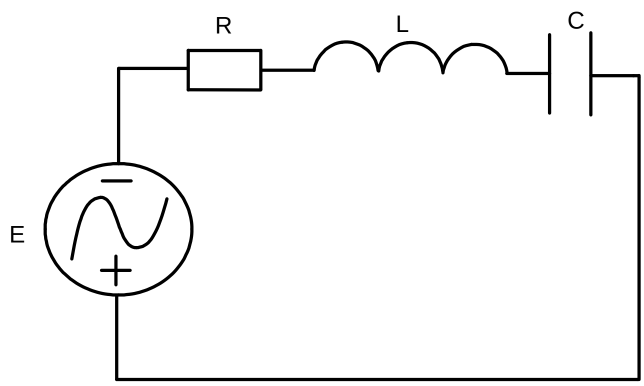

Fig.1: *Schema unui circuit* RLC

Când circuitul se închide, apare un curent cu intensitatea de $I\left(t\right)$ amperi (A) şi o sarcină de $Q\left(t\right)$ coulombi (C) pe condensator la momentul t, cu

$$\frac{dQ}{dt} = I\left(t\right). \tag{10}$$

Căderile de tensiune corespunzătoare sunt: $L\frac{dI}{dt}$, RI, $\frac{1}{C}Q$. Legea lui Kirchhoff se scrie aşadar

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E\left(t\right).$$

Ţinând cont de (10), această relaţie devine o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea în Q

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E\left(t\right). \tag{11}$$

Deoarece în electrotehnică şi în electronică interesează intensitatea $I(t)$ a curentului în circuit, prin derivare obţinem din ecuaţia (11) o ecuaţie de ordinul al doilea în I

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'(t). \tag{12}$$

Aşadar, aceeaşi ecuaţie (5) modelează un sistem mecanic (1) sau (2), un proces termodinamic (4), dar şi circuitul electric din Fig.1, care este blocul de bază în sisteme electrice şi reţele. Prin abstractizare matematică, fenomene atât de diferite din natură şi tehnică pot fi studiate în mod similar, ecuaţia diferenţială corespunzătoare putând fi rezolvată cu uşurinţă.

4 Rezolvarea ecuaţiei (12) şi interpretarea soluţiilor

Ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei (12) are coeficienţi constanţi, şi metoda menţionată în Secţiunea 2 poate fi aplicată. Ecuaţia caracteristică este

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0, \tag{13}$$

cu $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$. Coeficienţii ecuaţiei (13) fiind pozitivi, indiferent de semnul lui Δ, rădăcinile (respectiv partea lor reală) vor fi negative, şi din forma soluţiei ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (12) se observă că $I_0(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$. Această proprietate justifică denumirea de *curent tranzitoriu* pentru I_0 (se mai numeşte şi *curent în regim liber*), care din punct de vedere matematic reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene.

Observaţie. Dacă tensiunea E este constantă, ecuaţia (12), care modelează circuitul, este omogenă. Din cele de mai sus rezultă că, după un anumit timp, intensitatea curentului devine practic nulă.

Mai interesant, şi foarte des întâlnit în practică, este cazul când tensiunea E este generată de un curent alternativ, adică $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Ecuaţia (12) se scrie în acest caz

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = \omega E_0 \cos \omega t. \tag{14}$$

Pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei neomogene (14) $I = I_0 + I_p$, mai trebuie să dispunem de o soluţie particulară I_p. Se poate verifica faptul că

$$I_p(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{15}$$

este într-adevăr soluţie pentru ecuaţia (14), unghiul α fiind determinat din relaţia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}-\omega L}$, şi purtând numele de *unghi de fază.* Soluţia particulară I_p se numeşte *curent periodic.*

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ (ohmi)}$$

care intervine în expresia (15) a curentului periodic se numeşte *impedanţa* circuitului, şi putem scrie

$$I_p\left(t\right) = \frac{E_0}{Z}\cos\left(\omega t - \alpha\right). \tag{16}$$

Deoarece tensiunea la bornele circuitului a fost exprimată ca funcţie de sinus, se preferă ca şi intensitatea curentului periodic să se exprime prin sinus (nu prin cosinus), pentru a se evidenţia astfel diferenţa de fază între tensiune şi intensitate. Avem $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$ şi, punând $\delta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ în (16) obţinem

$$I_p\left(t\right) = \frac{E_0}{Z}\sin\left(\omega t - \delta\right), \tag{17}$$

cu $\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. Expresia

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

se numeşte *reactanţa* circuitului.

Se observă că noţiuni pe care elevii sau studenţii le cunosc de la orele de fizică sau electrotehnică apar în mod natural rezolvând pur şi simplu ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea.

5 Aplicaţie

O ecuaţie de tip (5), care ar putea modela un circuit electric, este propusă în manualul [1] ca exerciţiu, şi anume

$$y'' + y' + 4y = 2\cos 2x.$$

Considerăm că este foarte instructiv să se propună o problemă reală, pentru care să se construiască modelul matematic, şi abia apoi să se rezolve.

Problemă. Un circuit RLC cu $R = 50\ \Omega,\ L = 0,2\ H$ şi $C = 10^{-3}F$ se conectează la reţeaua de curent (care are tensiunea $E_0 = 220\ V$ şi frecvenţa de 50 Hz). Se cere să se determine intensitatea curentului care apare în circuit.

Rezolvare. Frecvenţei de 50 Hz îi corespunde $\omega = 2\pi \cdot 50\ rad/s \approx 314\ rad/s$.

Ecuaţia (12) se va scrie

$$0,2I'' + 50I' + 1000I = 69080\ \cos 314t.$$

Se obţin rădăcini reale (negative) pentru ecuaţia caracteristică (conducând la curentul tranzitoriu care tinde la 0). Se determină apoi curentul periodic din (15) sau (17).

6 Concluzii

Modelele care provin din electricitate sunt foarte adecvate pentru a fi prezentate elevilor şi studenţilor, deoarece:

- sunt simple, dar reprezintă fenomene complexe;

- pentru rezolvarea lor se aplică o serie de cunoştinţe matematice pe care elevii le au deja;

- se face o fixare a cunoştinţelor de fizică, putându-se urmări legătura dintre fenomenele fizice şi reprezentarea lor matematică;

- se deschide orizontul tinerilor prin sublinierea faptului că aceeaşi ecuaţie (5) modelează şi fenomene electrice, şi mecanice; mai concret, ecuaţia (5) permite construirea de modele electrice (mai ieftine şi permiţând măsurări uşor de făcut) prin care pot fi anticipate performanţele unor sisteme mecanice.

Bibliografie

1. D. Andrica, M. Andronache, N. Bişboacă, M. Piticari, I. Şerdean, D. Zaharia, Matematică, *Manual pentru clasa a XII-a M1*, Editura Plus, Bucureşti 2002

2. P.W. Davis, Differential Equations for Mathematics, Science and Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1992.