REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, Tome 1, 1972, pp. 5—35

DUALITÄT BEI OPTIMIERUNGSAUFGABEN IN HALBGEORDNETEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN (I)

von

WOLFGANG W. BRECKNER

(Cluj)

In dieser Arbeit wird eine allgemeine Dualitätstheorie für Optimierungsaufgaben entwickelt deren Zielfunktion eine konvexe Abbildung ist, die auf einer konvexen Teilmenge eines reellen oder komplexen Vektorraumes erklärt ist und Werte in einem gerichteten halbgeordneten topologischen Vektorraum annimmt. Aus dieser Theorie können verschiedene, in den letzten Jahren bekannt gewordene Verallgemeinerungen des Dualitätssatzes und des Sattelpunktsatzes aus der linearen Optimierung in endlichdimensionalen Vektorräumen einheitlich und auf sehr einfache Weise hergeleitet werden.

§ 1. Einleitung

Sind $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}'$ zwei nichtleere Teilmengen einer nichtleeren Menge F, die mit einer binären Relation ρ versehen ist, so kann man die folgenden beiden Aufgaben stellen:

I. *Bestimme ein Element* z_0 *von* $\mathscr{Z}$, *so dass es kein* $z \in \mathscr{Z}$ *mit* $z\rho z_0$ *gibt.*

II. *Bestimme ein Element* z'_0 *von* $\mathscr{Z}'$, *so dass es kein* $z' \in \mathscr{Z}'$ *mit* $z'_0\rho z'$ *gibt.*

Aufgaben des Typs I *heissen Minimierungsaufgaben in* (F,ρ) *und ihre Lösungen minimale Elemente, während Aufgaben des Typs* II *Maximierungsaufgaben in* (F,ρ) *und ihre Lösungen maximale Elemente genannt* *werden*. Minimierungs- und Maximierungsaufgaben in (F,ρ) fasst man unter dem gemeinsamen Namen Optimierungsaufgaben in (F,ρ) zusammen.

Wie die Geschichte der Mathematik zeigt, waren zu allen Zeiten Optimierungsaufgaben in sehr verschiedenen Räumen Gegenstand mathematischer Untersuchungen. Besonders intensiv wurden diese Untersuchungen in den letzten zwanzig Jahren, da man feststellte, dass sich viele Aufgaben aus verschiedenartigen Teil- und Anwendungsgebieten der Mathematik dem Problemkreis der Optimierung unterordnen.

Bei der numerischen Behandlung von Optimierungsaufgaben zeigte es sich, dass es sehr oft von Vorteil ist bestimmte Minimierungs- und Maximierungsaufgaben in Beziehung zueinander zu setzen und gemeinsam zu untersuchen. Optimierungsaufgaben, die in einem bestimmten Zusammenhang zueinander stehen, bezeichnet man gewöhnlich als dual zueinander. Bisher gibt es in der mathematischen Literatur noch keine einheitliche Definition für zueinander duale Optimierungsaufgaben. Einen Überblick über verschiedene Dualitätstheorien für Optimierungsaufgaben findet man bei ELSTER K.-H. und C. SUPPE [24] und bei GOL'STEIN E. G. [28]. Unseren Ausführungen legen wir den folgenden Dualitätsbegriff zu Grunde:

Eine Minimierungs- und eine Maximierungsaufgabe in (F,ρ) heissen dual zueinander bezüglich einer in F eingeführten binären Relation ρ_1, wenn für die entsprechenden Mengen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ die folgenden Aussagen gelten:

1° *Gilt für $z_0 \in \mathcal{Z}$ und $z_0' \in \mathcal{Z}'$ die Beziehung $z_0\rho_1 z_0'$, so ist z_0 ein minimales Element von $\mathcal{Z}$ und z_0' ein maximales Element von $\mathcal{Z}'$.*

2° *Ist z_0 ein minimales Element von $\mathcal{Z}$, so gibt es ein $z_0' \in \mathcal{Z}'$ mit $z_0\rho_1 z_0'$.*

3° *Ist z_0' ein maximales Element von $\mathcal{Z}'$, so gibt es ein $z_0 \in \mathcal{Z}$ mit $z_0\rho_1 z_0'$.*

Fasst man die Dualität von Optimierungsaufgaben in diesem Sinn auf, so ergibt sich sofort, dass die beiden Optimierungsaufgaben, die man in der Theorie der linearen Optimierung in endlichdimensionalen Vektorräumen dual zueinander nennt, in $(R, <)$ dual zueinander sind bezüglich der Relation $=$, wobei R die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

In der Tat, in der linearen Optimierung geht man aus von einer linearen Abbildung π des Raumes $X = R^n$ in den Raum $Y = R^m$, einem linearen Funktional $x_0^*: X \to R$, einem festen Element $y_0 \in Y$ und bildet dann die Mengen

$$Z = \{x \in X : x \geqq \theta_X,\ \pi(x) \geqq y_0\},$$
$$Z' = \{y^* \in Y^* : y^* \geqq \theta_{Y^*},\ \pi^*(y^*) \leqq x_0^*\}.$$

Dabei bezeichnet θ_X das Nullelement von X, θ_{Y^*} das Nullelement des dualen Raumes Y^* von Y, π^* die zu π adjungierte Abbildung und $\leqq$ die komponentenweise Halbordnung von X und von Y[1]), also auch die von

---

[1]) Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir alle Halbordnungen die in unserer Arbeit vorkommen mit demselben Zeichen $\leqq$.

X^* und von Y^*, denn bekanntlich kann X^* mit X und Y^* mit Y identifiziert werden.

Die beiden Probleme, deren Zusammenhang in der linearen Optimierung untersucht wird, lauten dann:

$(\mathrm{P_I})$: *Ist Z nicht leer, so bestimme ein $z_0 \in Z$, für das*

$$x_0^*(z_0) = \inf\,\{x_0^*(z) : z \in Z\}$$

gilt.

$(\mathrm{P_{II}})$: *Ist Z' nicht leer, so bestimme ein $z_0^* \in Z'$, für das*

$$z_0^*(y_0) = \sup\,\{z^*(y_0) : z^* \in Z'\}$$

gilt.

Setzt man $F = R$, $\rho = <$, $\mathcal{Z} = \{x_0^*(z) : z \in Z\}$ und $\mathcal{Z}' = \{z^*(y_0) : z^* \in Z'\}$, so bemerkt man, dass im Falle des Problems $(\mathrm{P_I})$ die minimalen Elemente von $\mathcal{Z}$ und im Falle des Problems $(\mathrm{P_{II}})$ die maximalen Elemente von $\mathcal{Z}'$ gesucht werden. $(\mathrm{P_I})$ und $(\mathrm{P_{II}})$ sind also Optimierungsaufgaben in $(R, <)$. Wie bekannt (vgl. z. B. COLLATZ L. und W. WETTERLING [16, S. 60]), sind sie durch den folgenden Satz verknüpft:

SATZ. *Für die Probleme $(\mathrm{P_I})$ und $(\mathrm{P_{II}})$ gelten die folgenden Aussagen:*

1° *Gilt $x_0^*(z_0) = z_0^*(y_0)$ für ein $z_0 \in Z$ und ein $z_0^* \in Z'$, so ist z_0 eine Lösung von $(\mathrm{P_I})$ und z_0^* eine Lösung von $(\mathrm{P_{II}})$.*

2° *Ist z_0 eine Lösung von $(\mathrm{P_I})$, so gibt es ein $z_0^* \in Z'$ mit $x_0^*(z_0) = z_0^*(y_0)$.*

3° *Ist z_0^* eine Lösung von $(\mathrm{P_{II}})$, so gibt es ein $z_0 \in Z$ mit $x_0^*(z_0) = z_0^*(y_0)$.*

Dieser Satz besagt jedoch nichts anderes, als dass die Optimierungsaufgaben $(\mathrm{P_I})$ und $(\mathrm{P_{II}})$ in $(R, <)$ dual zueinander sind bezüglich der Relation $=$. Daher nennen wir ihn das Dualitätsprinzip der linearen Optimierung in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Dem Problem $(\mathrm{P_I})$ kann man statt $(\mathrm{P_{II}})$ auch folgendes Problem zuordnen:

$(\mathrm{P_{III}})$: *Das Funktional $L : X \times Y^* \to R$ sei durch*

$$L(x, y^*) = x_0^*(x) - y^*(\pi(x) - y_0) \quad \text{für} \quad (x, y^*) \in X \times Y^*$$

definiert. Bestimme ein $z_0 \in X$ mit $z_0 \geqq \theta_X$ und ein $z_0^* \in Y^*$ mit $z_0^* \geqq \theta_{Y^*}$, so dass (z_0, z_0^*) ein Sattelpunkt von L bezüglich der Menge

$$M = \{(x, y^*) \in X \times Y^* : x \geqq \theta_X,\ y^* \geqq \theta_{Y^*}\}$$

ist, d. h. dass gilt

$$L(z_0, y^*) \leqq L(z_0, z_0^*) \leqq L(x, z_0^*) \quad \text{für alle} \quad (x, y^*) \in M.$$

Dieses Problem nennt man das Sattelpunktproblem der linearen Optimierung.

Über das Verhältnis der Probleme (P_I) und (P_{III}) zueinander gilt der folgende Sattelpunktsatz (vgl. z. B. KARLIN S. [31, S. 121]):

SATZ. *Ein Element $z_0 \in X$ ist genau dann eine Lösung des Problems (P_I), wenn es ein $z_0^* \in Y^*$ gibt, so dass (z_0, z_0^*) eine Lösung des Problems (P_{III}) ist.*

Natürlich stellt man sich die Frage, ob sich diese Ergebnisse nicht auch für Probleme verallgemeinern lassen, bei denen entweder die Zielfunktion, d.h. die Funktion nach deren Minimum gefragt ist, nicht linear ist, oder bei denen die Restriktionen nicht lineare Ungleichungen sind. Aufgaben dieser Art bezeichnet man als nichtlineare Optimierungsaufgaben. Die Notwendigkeit einer solchen Verallgemeinerung ergibt sich daraus, dass die meisten Optimierungsaufgaben, die in der Praxis auftreten, nicht linear sind und es nicht immer sinnvoll ist sie durch zusätzliche Annahmen in lineare überzuführen. Der wirkliche Sachverhalt wird dann nämlich durch das mathematische Modell nur ungenau wiedergegeben und es kann vorkommen, dass die Lösung des idealisierten linearen Problems einen schlechten Näherungswert für das Optimum des vorliegenden praktischen Problems liefert.

Für die Entwicklung der Theorie der nichtlinearen Optimierung war die Arbeit von KUHN H. W. und A. W. TUCKER [39] von ausserordentlicher Bedeutung. In dieser Arbeit wurde erstmals das Problem der konvexen Optimierung in endlichdimensionalen Vektorräumen formuliert und eine Beziehung zwischen den Lösungen dieses Problems und denen eines ihm zugeordneten Sattelpunktproblems hergestellt. Das Problem der konvexen Optimierung erhält man, wenn man in der Formulierung des Problems (P_I) statt des linearen Funktionals x_0^* ein konvexes betrachtet und statt der linearen Abbildung π eine Abbildung, deren Komponenten konkave Funktionale sind. Die konvexe Optimierung ist also eine natürliche Verallgemeinerung der linearen Optimierung.

H. W. Kuhn und A. W. Tucker befassten sich in ihrer Arbeit auch mit der „Maximierung" einer konkaven Abbildung von R^n in R^p $(p > 1)$ und bewiesen erstmals einen Sattelpunktsatz für ein solches Problem. Ihre diesbezüglichen Untersuchungen wurden von L. Hurwicz (vgl. ARROW K. J., L. HURWICZ und UZAWA H. [3, S. 38—102]) weitergeführt, der das Problem der konvexen Optimierung in beliebigen halbgeordneten topologischen Vektorräumen stellte und ihm ein Sattelpunktproblem zuordnete, das (P_{III}) verallgemeinert. — Eine Verallgemeinerung des Problems (P_{II}), wenn man statt (P_I) die von L. Hurwicz behandelte konvexe Optimierungsaufgabe annimmt, wurde von BRECKNER W. W. und I. KOLUMBÁN [9] angegeben.

Das Paar (P_I), (P_{II}) war Ausgangspunkt auch für die Untersuchungen von RUBINSTEIN G. Š. [48], [49], der einen rein mengentheoretischen Zugang zur Dualitätstheorie der Optimierungsaufgaben eröffnete. Seine Ergebnisse wurden von KOLUMBÁN I. [34], [35] verallgemeinert um eine Theorie zu erzielen, in die sich auch die Theorie der Infraelemente einordnet.

Einen anderen Weg beschritt FENCHEL W. [25] um die Dualitäts- und Sattelpunkttheorie aus der linearen Optimierung auf Optimierungsaufgaben zu übertragen, bei denen der Extremwert eines reellwertigen konvexen Funktionals gesucht wird. Er betrachtete zwei nichtleere konvexe Teilmengen U, V des Vektorraumes $X = R^n$, ein konvexes Funktional $\varphi : U \to R$, ein konkaves Funktional $\psi : V \to R$ und untersuchte die folgenden beiden Aufgaben:

(Q_I): *Ist $U \cap V$ nicht leer, so bestimme ein $z_0 \in U \cap V$, für das*

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) = \inf \{\varphi(z) - \psi(z) : z \in U \cap V\}$$

gilt.

(Q_{II}): *Ist $U' \cap {}'V$ nicht leer, so bestimme ein $z_0^* \in U' \cap {}'V$, für das*

$$'\psi(z_0^*) - \varphi'(z_0^*) = \sup \{'\psi(z^*) - \varphi'(z^*) : z^* \in U' \cap {}'V\}$$

gilt, wobei die Funktionale φ', $'\psi$, die man das zu φ bzw. zu ψ konjugierte Funktional nennt, für alle $x^* \in X^*$ durch

$$\varphi'(x^*) = \sup \{x^*(u) - \varphi(u) : u \in U\},$$

$$'\psi(x^*) = \inf \{x^*(v) - \psi(v) : v \in V\}$$

und U', $'V$ durch

$$U' = \{x^* \in X^* : \varphi'(x^*) < +\infty\}, \; 'V = \{x^* \in X^* : {}'\psi(x^*) > -\infty\}$$

definiert sind.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen zeigte W. Fenchel, dass diese beiden Optimierungsaufgaben in $(R, <)$ dual zueinander sind bezüglich der Relation $=$.

Fenchels Untersuchungen wurden von ROCKAFELLAR R. T. [44], DIETER U. [20], [21], BRECKNER W. W. und I. KOLUMBÁN [10], IOFFE A. D. und V. M. TIHOMIROV [30] fortgesetzt und auf Optimierungsaufgaben in allgemeineren Räumen übertragen. Konjugierte Funktionale von konvexen Funktionalen, die auf topologischen Vektorräumen definiert sind, wurden auch noch von BRONDSTED A. [11], MOREAU J. J. [41] und TYNJANSKII N. T. [52] behandelt (vgl. auch ROCKAFELLAR R. T. [46], STOER J. und C. WITZGALL [51]). Eine weitere Verallgemeinerung des Begriffes des konjugierten Funktionals findet man bei VOGEL W. [53] und WEISS E.-A. [54].

Obwohl die auf dem Konzept der konjugierten Funktionale beruhende Dualitätstheorie sehr umfassend ist (vgl. DIETER U. [19]), ist nicht bekannt, ob aus ihr alle bisher für konvexe Optimierungsaufgaben bewiesenen Dualitätsaussagen folgen, denn schon in dem einfachsten Fall, nämlich der Herleitung des Dualitätsprinzips der linearen Optimierung, muss man komplizierte Überlegungen anstellen (vgl. DIETER U. [20]). Daher bringen manche Autoren (z. B. KARLIN S. [31]) getrennte Darstellungen für die Theorie der konvexen Optimierungsaufgaben und für die Theorie der konjugierten Funktionale.

ROCKAFELLAR R. T. [45] versuchte diese Nachteile der Theorie der konjugierten Funktionale durch Modifikation der von W. Fenchel betrachteten Probleme (Q_I) und (Q_{II}) zu beseitigen. Er ging aus von zwei reellen topologischen Vektorräumen X und Y, einer nichtleeren konvexen Teilmenge U von X, einer nichtleeren konvexen Teilmenge V von Y, einem nach unten halbstetigen konvexen Funktional $\varphi : U \to R$, einem nach oben halbstetigen konkaven Funktional $\psi : V \to R$, einer stetigen linearen Abbildung $\pi : X \to Y$ und stellte dann die folgenden beiden Aufgaben:

(R_I) : *Ist die Menge* $Z = \{x \in U : \pi(x) \in V\}$ *nicht leer, so bestimme ein* $z_0 \in Z$, *für das*

$$\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) = \inf \{\varphi(z) - \psi(\pi(z)) : z \in Z\}$$

gilt.

(R_{II}) : *Ist die Menge* $Z' = \{y^* \in {}'V : \pi^*(y^*) \in U'\}$ *nicht leer, so bestimme ein* $z_0^* \in Z'$, *für das*

$$'\psi(z_0^*) - \varphi'(\pi^*(z_0^*)) = \sup \{'\psi(z^*) - \varphi'(\pi^*(z^*)) : z^* \in Z'\}$$

gilt, wobei π^* *die zu* π *adjungierte Abbildung bezeichnet, während* U', $'V$, φ' *und* $'\psi$ *die gleiche Bedeutung wie in der Formulierung von* (Q_{II}) *haben, nur muss man bei* $'V$, $'\psi$ *statt* X^* *den Raum* Y^* *nehmen.*

Aus dem für diese beiden Optimierungsaufgaben bewiesenen Dualitätsprinzip folgt das Dualitätsprinzip der linearen Optimierung auf sehr einfache Weise, doch sind Rockafellars Voraussetzungen, dass π linear und φ, ψ reellwertig sind, zu einschränkend um eine Reihe bekannter Optimierungsaufgaben in der Formulierung (R_I) erfassen zu können. Ausser den schon erwähnten Arbeiten von H. W. Kuhn und A. W. Tucker, L. Hurwicz, S. Karlin, W. W. Breckner und I. Kolumbán, haben nämlich auch GHIKA A. [27], BOD P. [6], KLINGER A. [32], [33], CHANG S. S. L. [12], DA CUNHA N. O. und E. POLAK [17], [18], GEOFFRION A. M. [26], LEONTE A. [40], RUDEANU S. [50], ALTMAN M. [1], [2], ROY B. [47], BLUMENTHAL B. [5] in ihren Arbeiten darauf hingewiesen, dass bei Anwendungen sehr oft Optimierungsaufgaben auftreten, deren Zielfunktionen Werte in einer halbgeordneten Menge annehmen. BRECKNER W. W. [7] gab daher eine Verallgemeinerung der Aufgaben (R_I) und (R_{II}) an, bei der auf Rockafellars Einschränkungen verzichtet wurde und entwickelte eine Dualitätstheorie in halbgeordneten topologischen Vektorräumen. Diese Theorie, in die sich auch die von YAMASAKI M. [56] behandelten Aufgaben einordnen, enthält als Spezialfälle sowohl die Dualitätstheorie der konvexen Optimierung, als auch die auf den konjugierten Funktionalen beruhende Dualitätstheorie und die Herleitung dieser beiden Theorien bietet keinerlei Schwierigkeiten.

In der vorliegenden Arbeit bringen wir eine neue Darstellung der allgemeinen Dualitätstheorie aus [7], wobei die Hauptergebnisse dieser Theorie unter schwächeren Voraussetzungen als in [7] bewiesen werden.

§ 2. Bezeichnungen aus der Theorie der halbgeordneten Vektorräume

2.1. Halbgeordnete Vektorräume

Ein halbgeordneter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum F, der mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen binären Relation $\leq$ (Halbordnung genannt) versehen ist, die für alle f_1, $f_2 \in F$ folgende Eigenschaften besitzt:

(H_1) Aus $f_1 \leq f_2$ folgt $f_1 + f \leq f_2 + f$ für alle $f \in F$.

(H_2) Aus $f_1 \leq f_2$ folgt $\lambda f_1 \leq \lambda f_2$ für alle $\lambda > 0$.

Zwei Elemente f_1 und f_2 eines halbgeordneten Vektorraumes F sind vergleichbar, wenn eine der Beziehungen $f_1 \leq f_2$, $f_2 \leq f_1$ gilt. Sind die Elemente aller Paare $(f_1, f_2) \in F \times F$ vergleichbar, so heisst F geordnet.

Ist $f_1 \leq f_2$, aber $f_1 \neq f_2$, so schreiben wir der Kürze halber $f_1 < f_2$.

Bezeichnet θ_F das Nullelement eines halbgeordneten Vektorraumes F, so sind die Mengen

$$K_F = \{f \in F : \theta_F \leq f\}, \quad K_F^+ = \{f \in F : \theta_F < f\}$$

konvexe Kegel mit θ_F als Scheitel und nennt sie Kegel der positiven bzw. der strikt positiven Elemente aus F.

Gibt es für jedes Element f eines halbgeordneten Vektorraumes F ein $h \in K_F$ mit $f \leq h$, so heisst F gerichtet.

Man stellt sofort fest, dass ein halbgeordneter Vektorraum F genau dann gerichtet ist, wenn gilt $F = K_F - K_F$.

Ein halbgeordneter Vektorraum F mit $K_F^+ \neq \emptyset$ heisst archimedisch, wenn es zu jedem Paar $(f, g) \in F \times K_F^+$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $f < ng$ gilt.

Offensichtlich ist jeder archimedische halbgeordnete Vektorraum gerichtet.

Ist M eine nichtleere konvexe Teilmenge eines reellen oder komplexen Vektorraumes und P eine Abbildung von M in einen halbgeordneten Vektorraum F, so heisst P konvex (bzw. konkav), wenn

$$P(\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2) \leq (\text{bzw.} \geq)\ \lambda P(m_1) + (1 - \lambda)P(m_2)$$

für alle m_1, $m_2 \in M$ und alle $\lambda \in \,]0, 1[$ gilt.

2.2. Halbgeordnete topologische Vektorräume

Einen halbgeordneten Vektorraum F nennt man halbgeordneten topologischen Vektorraum, wenn auf F eine separierte Topologie erklärt ist, so dass die Abbildungen $(f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ von $F \times F$ in F und $(\lambda, f) \to \lambda f$ von $R \times F$ in F stetig sind.

Ist F ein reeller topologischer Vektorraum, so bezeichnet man bekanntlich die Menge F^* der reellen, auf F erklärten stetigen linearen Funktionale, als den dualen Raum von F. Definiert man $f_1^* + f_2^*$ für f_1^*, $f_2^* \in F^*$ und λf^* für $\lambda \in R$, $f^* \in F^*$ durch

$$(f_1^* + f_2^*)(f) = f_1^*(f) + f_2^*(f),$$

$$(\lambda f^*)(f) = \lambda f^*(f)$$

für alle $f \in F$, so wird F^* ein reeller Vektorraum. Falls $F \neq \{\theta_F\}$ ein gerichteter halbgeordneter topologischer Vektorraum ist, kann man in F^* eine Halbordnung einführen, indem man sagt $f_1^* \leqq f_2^*$ gilt genau dann, wenn $f_1^*(f) \leqq f_2^*(f)$ für alle $f \in K_F$ ist. Der Kegel der positiven bzw. strikt positiven Elemente aus F^* ist dann

$$K_{F^*} = \{f^* \in F^* : f^*(f) \geqq 0 \text{ für alle } f \in K_F\},$$

$$K_{F^*}^+ = \{f^* \in K_{F^*} : \exists f \in K_F^+ \text{ mit } f^*(f) > 0\}.$$

Ausser diesen beiden Kegeln werden wir in unseren Ausführungen auch noch folgenden Kegel benutzen:

$$K_{F^*}^{++} = \{f^* \in F^* : f^*(f) > 0 \text{ für alle } f \in K_F^+\}.$$

Es gilt dann $K_{F^*}^{++} \subseteq K_{F^*}^+ \subset K_{F^*}$.

Ein halbgeordneter topologischer Vektorraum $F \neq \{\theta_F\}$ heisst Fundamentalraum, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

(F_1) F ist gerichtet;

(F_2) $K_{F^*}^+ = K_{F^*}^{++}$.

Es ist leicht ersichtlich, dass jeder archimedische halbgeordnete topologische Vektorraum ein Fundamentalraum ist. — Weitere Ergebnisse über archimedische halbgeordnete Vektorräume und Fundamentalräume findet man bei BRECKNER W. W. [8].

§ 3. Die allgemeine Dualitätstheorie

3.1. Die Formulierung der primären und der dualen Optimierungsaufgabe

Gegeben seien:

a) ein reeller oder komplexer Vektorraum X,

b) ein reeller topologischer Vektorraum Y,

c) ein gerichteter halbgeordneter topologischer Vektorraum $F \neq \{\theta_F\}$ mit $K_{F^*}^+ \neq \emptyset$,

d) zwei nichtleere Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$,

e) drei Abbildungen $\varphi : U \to F$, $\pi : U \to Y$ und $\psi : V \to F$.

Im Raum X bilden wir die Menge

$$Z = \{z \in U : \pi(z) \in V\}$$

und bezeichnen jedes $z \in Z$ als zulässiges Element.

Definition 3.1.1. *Ein zulässiges Element z_0 heisst Minimalelement, wenn es kein $z \in Z$ mit*

$$\varphi(z) - \psi(\pi(z)) < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$$

gibt.

Als primäre Optimierungsaufgabe bezeichnen wir nun das folgende Problem: *ist die Menge Z nicht leer, so bestimme die Minimalelemente.*

Um eine weitere Optimierungsaufgabe stellen zu können, definieren wir zunächst auf dem Produktraum $Y^* \times K_{F^*}^+$ die folgenden beiden Funktionale, die wir das zu φ bzw. zu ψ konjugierte Funktional nennen:

$$\varphi'(y^*, f^*) = \sup \{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\},$$

$$'\psi(y^*, f^*) = \inf \{y^*(v) - f^*(\psi(v)) : v \in V\}.$$

Mit ihrer Hilfe bilden wir die Mengen

$$U' = \{(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+ : \varphi'(y^*, f^*) < +\infty\},$$

$$'V = \{(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+ : '\psi(y^*, f^*) > -\infty\}$$

und bezeichnen jedes $(y^*, f^*) \in U' \cap {}'V$ als zulässiges Funktional. Weiterhin setzen wir $Z' = U' \cap {}'V$.

Definition 3.1.2. *Ein Element f aus F heisst Indikator des zulässigen Funktionals (y^*, f^*), wenn es der Gleichung*

$$f^*(f) = {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*)$$

genügt.

Man stellt sofort fest, dass jedes zulässige Funktional wenigstens einen Indikator besitzt. — Die Menge der Indikatoren eines zulässigen Funktionals (y^*, f^*) bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(y^*, f^*)$. Weiterhin definieren wir

$$\mathcal{J} = \{f \in F : \exists (y^*, f^*) \in Z' \text{ mit } f \in \mathcal{J}(y^*, f^*)\}.$$

Definition 3.1.3. *Ein Element $f_0 \in \mathcal{J}$ heisst Maximalindikator, wenn es kein $f \in \mathcal{J}$ gibt, so dass $f_0 < f$ gilt. Ein zulässiges Funktional*

(y_0^*, f_0^*) *heisst Maximalfunktional, wenn die Menge* $\mathcal{J}(y_0^*, f_0^*)$ *einen Maximalindikator enthält.*

Als duale Optimierungsaufgabe bezeichnen wir nun das folgende Problem: *ist die Menge Z' nicht leer, so bestimme die Maximalfunktionale.*

Ziel unserer weiteren Ausführungen ist es zu zeigen, dass die primäre und die duale Optimierungsaufgabe in $(F, <)$ dual zueinander sind (im Sinne der Definition aus der Einleitung) bezüglich einer bestimmten binären Relation. Dazu benötigen wir jedoch noch die folgenden zusätzlichen Voraussetzungen:

(i) U und V sind konvexe Mengen;

(ii) es gibt eine Teilmenge W von Y, die das Nullelement θ_Y enthält und für die $V + W \subseteq V$ gilt;

(j) φ und $-\psi$ sind konvexe Abbildungen;

(jj) gehören die Elemente $\pi(u_1) - y_1$ und $\pi(u_2) - y_2$ der Menge W an, wobei u_1, u_2 aus U und y_1, y_2 aus Y sind, dann gilt
$$\pi(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) - (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in W$$
für alle $\lambda \in]0, 1[$;

(jjj) gehört $\pi(u) - y$ der Menge W an, wobei u aus U und y aus V ist, dann gilt die Ungleichung $\psi(y) \leq \psi(\pi(u))$.

Im folgenden setzen wir voraus, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind.

3.2. Zwei Sätze über Indikatoren

SATZ 3.2.1. *Zwei Indikatoren eines zulässigen Funktionals* (y^*, f^*) *mit* $f^* \in K_{F^*}^{++}$ *sind entweder gleich oder nicht vergleichbar.*

Beweis. Es seien $f_1 \in F$ und $f_2 \in F$ Indikatoren des Funktionals (y^*, f^*). Wir nehmen an es gelte $f_1 < f_2$. Da f^* aus $K_{F^*}^{++}$ ist, folgt daraus die Ungleichung $f^*(f_1) < f^*(f_2)$. Beachtet man nun, dass wegen Definition 3.1.2 die Beziehung
$$f^*(f_i) = {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*) \text{ für } i = 1, 2$$
gilt, so ergibt sich
$${}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*) < {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*).$$
Demnach müssen f_1 und f_2 entweder gleich oder nicht vergleichbar sein.

SATZ 3.2.2. *Ist z ein zulässiges Element und* (y^*, f^*) *ein zulässiges Funktional mit* $f^* \in K_{F^*}^{++}$, *so gibt es kein* $f \in \mathcal{J}(y^*, f^*)$ *mit*

(3.2.1) $$\varphi(z) - \psi(\pi(z)) < f.$$

Beweis. Wir machen die Annahme es gebe ein $f \in \mathcal{J}(y^*, f^*)$, für das Beziehung (3.2.1) gilt. Wegen $f^* \in K_{F^*}^{++}$ und Definition 3.1.2 ist dann

(3.2.2) $$f^*(\varphi(z) - \psi(\pi(z))) < f^*(f) = {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*).$$

Andererseits resultiert aus der Definition von ${}'\psi(y^*, f^*)$ und $\varphi'(y^*, f^*)$ die Ungleichung
$${}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*) \leq f^*(\varphi(z) - \psi(\pi(z))),$$
die im Widerspruch zu (3.2.2) steht.

3.3. Durchschnittssätze zur Charakterisierung der Minimalelemente und der Maximalfunktionale

Hilfssatz 3.3.1. *Die Menge*
$$[U, \varphi] = \{(y, g) \in Y \times F : \exists u \in U \text{ mit } \pi(u) - y \in W,\ \varphi(u) \leq g\}$$
ist konvex.

Beweis. Es seien $p_1 = (y_1, g_1)$ und $p_2 = (y_2, g_2)$ Elemente aus $[U, \varphi]$. Dann gibt es in U zwei Elemente u_1 und u_2, so dass für $i = 1, 2$ die Beziehungen $\pi(u_i) - y_i \in W$ und $\varphi(u_i) \leq g_i$ gelten. Ist nun λ eine Zahl aus dem Intervall $]0, 1[$ und setzt man $u = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$, so folgt einerseits dass $u \in U$, $\pi(u) - (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in W$ und andererseits dass
$$\varphi(u) \leq \lambda\varphi(u_1) + (1 - \lambda)\varphi(u_2) \leq \lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2$$
gilt. Demnach ist $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$ ein Element von $[U, \varphi]$.

Hilfssatz 3.3.2. *Für alle f aus F ist*
$$[V, \psi + f] = \{(y, g) \in V \times F : g \leq \psi(y) + f\}$$
eine konvexe Menge.

Beweis. Es seien $q_1 = (y_1, g_1)$ und $q_2 = (y_2, g_2)$ Elemente von $[V, \psi + f]$. Ist λ eine Zahl aus dem Intervall $]0, 1[$, so gilt einerseits $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in V$ und andererseits
$$\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2 \leq \lambda\psi(y_1) + \lambda f + (1 - \lambda)\psi(y_2) + (1 - \lambda)f \leq$$
$$\leq \psi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) + f.$$
Demnach ist $\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$ ein Element von $[V, \psi + f]$.

Hilfssatz 3.3.3. *Ist U' nicht leer, so ist*
$$[U', \varphi'] = \{((y^*, f^*), \alpha) \in U' \times R : \varphi'(y^*, f^*) \leq \alpha\}$$
eine konvexe Menge.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass $\varphi'|_{U'}$ ein konvexes Funktional ist.

Hilfssatz 3.3.4. *Ist $'V$ nicht leer, so ist*

$$['V,\ '(\psi + f)] = \{((y^*, f^*), \alpha) \in {}'V \times R : \alpha \leq {}'\psi(y^*, f^*) - f^*(f)\}$$

für alle $f \in F$ eine konvexe Menge.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass $'\psi|_{'V}$ ein konkaves Funktional ist.

Anmerkung. Ist $f = \theta_F$, so schreiben wir statt $[V,\ \psi + f]$, $['V,\ '(\psi + f)]$, einfach $[V,\ \psi]$ und $['V,\ '\psi]$.

Vermittels der in den obigen Hilfssätzen eingeführten Mengen kann man die Minimalelemente und die Maximalfunktionale charakterisieren. Es gelten nämlich die folgenden Durchschnittssätze:

SATZ 3.3.1. *Ein zulässiges Element z_0 ist genau dann ein Minimalelement, wenn gilt*

(3.3.1) $$[U,\ \varphi] \cap [V,\ \psi + f] = \emptyset \text{ für alle } f \in F \text{ mit } f < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)).$$

Beweis. Notwendigkeit. Es sei z_0 ein Minimalelement. Wir nehmen an es gebe ein Element $f \in F$ mit $f < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ und

$$[U,\ \varphi] \cap [V,\ \psi + f] \neq \emptyset.$$

Ist $(y,\ g)$ ein Element dieses Durchschnitts, so gibt es ein $u \in U$ mit $\pi(u) - y \in W$ und

(3.3.2) $$\varphi(u) \leq g \leq \psi(y) + f.$$

Da y aus V ist, gilt $\psi(y) \leq \psi(\pi(u))$. Aus (3.3.2) folgt dann

$$\varphi(u) - \psi(\pi(u)) \leq \psi(y) - \psi(\pi(u)) + f \leq f.$$

Demnach ist

$$\varphi(u) - \psi(\pi(u)) < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)),$$

was der Minimalität von z_0 widerspricht.

Hinlänglichkeit. Es sei (3.3.1) erfüllt. Wäre z_0 kein Minimalelement, so würde es ein zulässiges Element z_1 mit

$$\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1)) < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$$

geben. Dann hätten wir aber

$$(\pi(z_1),\ \varphi(z_1)) \in [U,\ \varphi] \cap [V,\ \psi + \varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))],$$

was unserer Voraussetzung widerspricht.

SATZ 3.3.2. *Ein Element f_0 aus $\mathcal{J}$ ist genau dann ein Maximalindikator, wenn gilt*

(3.3.3) $$[U',\ \varphi'] \cap ['V,\ '(\psi + f)] = \emptyset \text{ für alle } f \in F \text{ mit } f_0 < f.$$

Beweis. Notwendigkeit. Es sei f_0 ein Maximalindikator. Wir nehmen an es gebe ein Element $f \in F$, so dass $f_0 < f$ und

$$[U',\ \varphi'] \cap ['V,\ '(\psi + f)] \neq \emptyset$$

gilt. Ist $((y^*, f^*),\ \alpha)$ ein Element dieses Durchschnitts, so haben wir

$$\varphi'(y^*, f^*) \leq \alpha \leq {}'\psi(y^*, f^*) - f^*(f).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1° Es ist

$$\varphi'(y^*, f^*) = {}'\psi(y^*, f^*) - f^*(f).$$

Diese Gleichung besagt, dass f ein Indikator von (y^*, f^*) ist. Wegen $f_0 < f$ ist dann f_0 kein Maximalindikator. Das widerspricht jedoch unserer Annahme.

2° Es ist

(3.3.4) $$\varphi'(y^*, f^*) < {}'\psi(y^*, f^*) - f^*(f).$$

Da der Raum F gerichtet ist, gibt es ein $h_0 \in K_F$, so dass $f \leq h_0$ gilt. Wegen $f^* \in K_{F^*}^+$ gibt es aber ein Element $h_1 \in K_F^+$ mit $f^*(h_1) > 0$. Setzt man nun $h = h_0 + h_1$, so gilt $f < h$ und $f^*(h) > 0$. Wir wählen nun die natürliche Zahl n so gross, dass die Ungleichung

(3.3.5) $$f^*(nh) > {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*)$$

gilt. Die Hilfsfunktion

$$P(\lambda) = {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*) - \lambda f^*(f) - (1 - \lambda) f^*(nh)$$

ist für $\lambda \in [0,\ 1]$ stetig und nimmt wegen (3.3.5) und (3.3.4) die Werte $P(0) < 0$ und $P(1) > 0$ an. Daher gibt es ein $\lambda_0 \in\ ]0,\ 1[$ mit $P(\lambda_0) = 0$. Setzt man $g = \lambda_0 f + (1 - \lambda_0) nh$, so gilt also $g \in \mathcal{J}(y^*, f^*)$ und $f_0 < g$. Dieses widerspricht jedoch wiederum der Maximaleigenschaft von f_0.

Hinlänglichkeit. Es sei (3.3.3) erfüllt. Wenn f_0 kein Maximalindikator ist, gibt es ein zulässiges Funktional (y^*, f^*) und ein $f \in \mathcal{I}(y^*, f^*)$ mit $f_0 < f$. Daraus folgt aber

$$((y^*, f^*), \varphi'(y^*, f^*)) \in [U', \varphi'] \cap ['V, '(\psi + f)].$$

Die Annahme, f_0 sei kein Maximalindikator, führt also auf einen Widerspruch.

K o r o l l a r 3.3.1. *Ein zulässiges Funktional (y_0^*, f_0^*) ist genau dann ein Maximalfunktional, wenn es einen Indikator $f_0 \in F$ besitzt, so dass Beziehung (3.3.3) gilt.*

3.4. C h a r a k t e r i s i e r u n g d e r M i n i m a l e l e m e n t e d u r c h M a x i m a l f u n k t i o n a l e

Um die Minimalelemente durch Maximalfunktionale charakterisieren zu können, benötigen wir folgende zusätzliche Bedingung:

(B_1) *Haben die Mengen $[U, \varphi]$ und $[V, \psi + f]$ höchstens Randpunkte gemeinsam, wobei f ein Element des Raumes F bezeichnet, dann ist der Durchschnitt $[U', \varphi'] \cap ['V, '(\psi + f)]$ nicht leer.*

Es gilt

SATZ 3.4.1. *Bedingung* (B_1) *sei für alle f aus F erfüllt. Ist $z_0 \in Z$ ein Minimalelement, so gilt*

$$[U', \varphi'] \cap ['V, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)))] \neq \emptyset. \tag{3.4.1}$$

Beweis. Die Mengen $[U, \varphi]$ und $[V, \psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))]$ haben höchstens Randpunkte gemeinsam, weil ein gemeinsamer Punkt (y, g) dieser Mengen weder dem Inneren von $[U, \varphi]$ noch dem Inneren von $[V, \psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))]$ angehören kann. In der Tat, nehmen wir an (y, g) sei ein innerer Punkt von $[U, \varphi]$, so gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von θ_Y und eine Umgebung $\mathcal{V}$ von θ_F mit

$$(y, g) + \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq [U, \varphi]. \tag{3.4.2}$$

Wählen wir nun ein Element h aus K_F^+, so gibt es dafür eine Zahl $\alpha > 0$ mit $(-\alpha h) \in \mathcal{V}$. Aus (3.4.2) folgt also $(y, g - \alpha h) \in [U, \varphi]$. Das bedeutet aber, dass ein Element $u \in U$ existiert mit $\pi(u) - y \in W$ und

$$\varphi(u) \leq g - \alpha h. \tag{3.4.3}$$

Andererseits resultiert aus $(y, g) \in [V, \psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))]$, dass y der Menge V angehört und der Ungleichung

$$g \leq \psi(y) + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) \tag{3.4.4}$$

genügt. Aus $\pi(u) - y \in W$ und $y \in V$ ergibt sich aber $\psi(y) \leq \psi(\pi(u))$. Unter Benutzung von (3.4.3) und (3.4.4) erhält man also

$$\varphi(u) - \psi(\pi(u)) \leq g - \alpha h - \psi(\pi(u)) < g - \psi(\pi(u)) \leq \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)).$$

Diese Ungleichung steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass z_0 ein Minimalelement ist.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch die Annahme (y, g) sei ein innerer Punkt von $[V, \psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))]$, auf einen Widerspruch führt. Wegen Bedingung (B_1) gilt also (3.4.1).

K o r o l l a r 3.4.1. *Bedingung* (B_1) *sei für alle f aus F erfüllt. Ist die Menge Z' leer, so gibt es in Z keine Minimalelemente.*

H i l f s s a t z 3.4.1. *Ist z_0 ein zulässiges Element, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *Es gilt*

$$((y_0^*, f_0^*), \varphi'(y_0^*, f_0^*)) \in [U', \varphi'] \cap ['V, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)))].$$

2° (y_0^*, f_0^*) *ist ein zulässiges Funktional mit*

$$\varphi'(y_0^*, f_0^*) = y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0)), \tag{3.4.5}$$

$$'\psi(y_0^*, f_0^*) = y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\psi(\pi(z_0))). \tag{3.4.6}$$

3° $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ist ein Indikator des zulässigen Funktionals* (y_0^*, f_0^*).

Beweis. Aus 1° ergibt sich die Ungleichung

$$\varphi'(y_0^*, f_0^*) \leq '\psi(y_0^*, f_0^*) - f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))). \tag{3.4.7}$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(y_0^*, f_0^*) \leq y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\psi(\pi(z_0))) - f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) =$$
$$= y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0)).$$

Andererseits ist aber

$$y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0)) \leq \varphi'(y_0^*, f_0^*).$$

Demnach gilt Gleichung (3.4.5).

Unter Benutzung von (3.4.7) erhält man

$$y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\psi(\pi(z_0))) = y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0)) + f_0^*(\varphi(z_0) -$$
$$- \psi(\pi(z_0))) \leq \varphi'(y_0^*, f_0^*) + f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq '\psi(y_0^*, f_0^*).$$

Andererseits ist aber

$$'\psi(y_0^*, f_0^*) \leq y_0^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\psi(\pi(z_0))).$$

Demnach gilt auch Gleichung (3.4.6). Folglich resultiert Aussage 2° aus 1°.

Aus (3.4.5) und (3.4.6) erhält man durch Subtraktion die Gleichung

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) = '\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*). \tag{3.4.8}$$

Diese besagt, dass $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ein Indikator des zulässigen Funktionals (y_0^*, f_0^*) ist. Demnach folgt Aussage 3° aus 2°.

Aus Aussage 3° folgt wegen (3.4.8) sofort 1°.

Beachtet man diesen Hilfssatz, so kann man für Satz 3.4.1 noch die folgenden beiden Formulierungen angeben:

Korollar 3.4.2. *Bedingung* (B_1) *sei für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Beziehungen* (3.4.5) *und* (3.4.6) *gelten.*

Korollar 3.4.3. *Bedingung* (B_1) *sei für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein zulässiges Funktional für das* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator ist.*

Es erhebt sich nun natürlich die Frage, ob auch die Umkehrung von Korollar 3.4.3 (also auch die Umkehrung von Korollar 3.4.2 und Satz 3.4.1) gilt, d. h. ob jedes zulässige Element z_0 für das es ein zulässiges Funktional mit dem Indikator $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ gibt ein Minimalelement ist. Wir werden im folgenden zeigen, dass das unter passenden Zusatzvoraussetzungen der Fall ist. Ohne Zusatzvoraussetzungen kommt man dabei nicht aus, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich ist.

Es sei $X = Y = R$, $U = V = [0, +\infty[$, $W = \{0\}$, $F = R^2$ versehen mit der komponentenweisen Halbordnung; $\varphi(u) = (2u, 0)$, $\psi(u) = (u, 1)$ und $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$. Man stellt sofort fest, dass $z_0 = 1$ ein zulässiges Element, jedoch kein Minimalelement ist. Hingegen ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) = (1, -1)$ ein Indikator des zulässigen Funktionals (y_0^*, f_0^*), wobei y_0^* und f_0^* durch

$$y_0^*(y) = 0 \qquad \text{für alle } y \in Y,$$

$$f_0^*(f) = f_2 \qquad \text{für alle } f = (f_1, f_2) \in F$$

definiert sind, denn es ist $\varphi'(y_0^*, f_0^*) = 0$ und $'\psi(y_0^*, f_0^*) = -1$.

SATZ 3.4.2. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein*

$$((y_0^*, f_0^*), \alpha) \in [U', \varphi'] \cap [{}'V, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)))]$$

mit $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$, *so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an z_0 sei kein Minimalelement. Dann gibt es ein zulässiges Element z_1 mit

$$\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1)) < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)),$$

woraus wegen $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ die Ungleichung

$$f_0^*(\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))) < f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \tag{3.4.9}$$

folgt.

Andererseits erhält man aus $((y_0^*, f_0^*), \alpha) \in [{}'V, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)))]$

$$\begin{aligned} y_0^*(\pi(z_1)) - f_0^*(\varphi(z_1)) - \alpha &= y_0^*(\pi(z_1)) - f_0^*(\psi(\pi(z_1))) - \alpha - \\ - f_0^*(\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))) &\geq {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \alpha - f_0^*(\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))) \geq \\ &\geq f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) - f_0^*(\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))). \end{aligned}$$

Wegen (3.4.9) ist also

$$y_0^*(\pi(z_1)) - f_0^*(\varphi(z_1)) - \alpha > 0. \tag{3.4.10}$$

Beachtet man nun, dass $((y_0^*, f_0^*), \alpha)$ auch der Menge $[U', \varphi']$ angehört, so erhält man

$$y_0^*(\pi(z_1)) - f_0^*(\varphi(z_1)) - \alpha \leq \varphi'(y_0^*, f_0^*) - \alpha \leq 0$$

im Widerspruch zu (3.4.10).

Nach Hilfssatz 3.4.1 folgen aus diesem Satz

Korollar 3.4.4. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ *für das die Beziehungen* (3.4.5) *und* (3.4.6) *gelten, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Korollar 3.4.5. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ *für das* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator ist, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist

SATZ 3.4.3. *Ist* F *ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Ist Bedingung* (B_1) *für alle* f *aus* F *erfüllt und* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, dann ist* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Maximalindikator.*

2° *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Maximalindikator, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Beweis. 1° Nach Korollar 3.4.3 ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ Indikator eines zulässigen Funktionals (y_0^*, f_0^*). Beachtet man nun, dass es wegen Satz 3.2.2 kein $f \in \mathcal{I}$ mit $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) < f$ gibt, so folgt, dass $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ in Maximalindikator ist.

2° Die Behauptung ergibt sich aus Korollar 3.4.5.

Bemerkung. Aussage 1° dieses Satzes bleibt nicht gültig, wenn Bedingung (B_1) nicht für alle f aus F erfüllt ist. Um dieses zu zeigen, wählen wir $X = Y = F = R$, $U =]-\infty, 0]$, $V = [0, +\infty[$, $W = \{0\}$; $\varphi(u) = -u$, $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$ und $\psi(v) = \sqrt{v}$ für alle $v \in V$. Da $Z = \{0\}$ ist, ist 0 ein Minimalelement. — Andererseits ist

$$U' = \{(y^*, f^*) \in R^2 : f^* > 0,\ y^* + f^* \geqq 0\},$$

$$'V = \{(y^*, f^*) \in R^2 : y^* > 0,\ f^* > 0\}$$

und

$$\varphi'(y^*, f^*) = 0 \text{ für alle } (y^*, f^*) \in U',$$

$$'\psi(y^*, f^*) = -(4y^*)^{-1}(f^*)^2 \text{ für alle } (y^*, f^*) \in {}'V.$$

Demnach ist $Z' = {}'V$, doch gibt es in dieser Menge kein Funktional mit dem Indikator $\varphi(0) - \psi(\pi(0)) = 0$. Satz 3.4.3 ist in diesem Fall nicht anwendbar.

Korollar 3.4.6. *Ist F ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Ist Bedingung (B_1) für alle f aus F erfüllt und $z_0 \in Z$ ein Minimalelement, so gibt es ein Funktional $f_0^* \in K_{F^*}^+$, das der Gleichung*

(3.4.11) $$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) = \inf\{f_0^*(\varphi(z) - \psi(\pi(z))) : z \in Z\}$$

genügt.

2° *Gilt Gleichung (3.4.11) für ein zulässiges Element z_0 und für ein Funktional f_0^* aus $K_{F^*}^+$, so ist z_0 ein Minimalelement.*

Beweis. 1° Nach Satz 3.4.3 gibt es ein zulässiges Funktional (y_0^*, f_0^*), das der Gleichung

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) = {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*)$$

genügt. Hieraus folgt

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leqq y_0^*(\pi(z)) - f_0^*(\psi(\pi(z))) - y_0^*(\pi(z)) + {} + f_0^*(\varphi(z)) = f_0^*(\varphi(z) - \psi(\pi(z)))$$

für alle z aus Z. Also gilt (3.4.11).

2° Wir nehmen an es gebe ein zulässiges Element z_1 mit

$$\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1)) < \varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)).$$

Hieraus ergibt sich wegen $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ und wegen (3.4.11) die Ungleichung

$$f_0^*(\varphi(z_1) - \psi(\pi(z_1))) < \inf\{f_0^*(\varphi(z) - \psi(\pi(z))) : z \in Z\},$$

die im Widerspruch zur Definition des Infimums steht. Demnach ist z_0 ein Minimalelement.

Beachtet man Definition 3.1.3, so ergibt sich aus Satz 3.4.3 der folgende

SATZ 3.4.4. *Ist F ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Ist Bedingung (B_1) für alle f aus F erfüllt und $z_0 \in Z$ ein Minimalelement, dann gibt es ein Maximalfunktional (y_0^*, f_0^*), so dass $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ein Indikator von (y_0^*, f_0^*) ist.*

2° *Ist z_0 ein zulässiges Element und $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ Indikator eines Maximalfunktionals (y_0^*, f_0^*), so ist z_0 ein Minimalelement.*

Bei Anwendungen ist es oft schwierig direkt festzustellen, ob Bedingung (B_1) für alle f aus F erfüllt ist. Wir geben daher zum Abschluss dieses Abschnitts noch eine Bedingung an die es uns ermöglicht bei vielen konkreten Aufgaben auf dieses Nachprüfen zu verzichten. Zunächst beweisen wir jedoch

Hilfssatz 3.4.2. *Gilt für $(y^*, f^*, \alpha) \in Y^* \times F^* \times R$ die Ungleichung*

(3.4.12) $$\sup\{y^*(y) - f^*(g) : (y, g) \in [U, \varphi]\} \leqq \alpha,$$

dann ist f^* aus K_{F^*}.

Beweis. Es sei f ein beliebiges Element des Kegels K_F und u_0 aus U. Dann gilt

$$(\pi(u_0),\ \varphi(u_0) + nf) \in [U, \varphi] \text{ für alle } n \in N,$$

wobei N die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet. Wegen (3.4.12) ist demnach

$$y^*(\pi(u_0)) - f^*(\varphi(u_0) + nf) \leqq \alpha \text{ für alle } n \in N,$$

woraus durch Umformen

$$n^{-1}[y^*(\pi(u_0)) - f^*(\varphi(u_0)) - \alpha] \leqq f^*(f) \text{ für alle } n \in N$$

folgt. Für $n \to \infty$ hat die linke Seite dieser Ungleichung den Grenzwert Null. Demnach ist $f^*(f) \geqq 0$.

SATZ 3.4.5. *Es gelte mindestens eine der beiden Voraussetzungen:*

(B_2) *Int $([U, \varphi]) \cap (V \times F)$ ist nicht leer*[2].

(B_3) *Es gibt ein $(u_0, g_0) \in U \times F$ mit $(\pi(u_0), g_0) \in$ Int $([V, \psi])$.*

Dann ist Bedingung (B_1) für alle f aus F erfüllt.

Beweis. Es sei f ein Element aus F, so dass die Mengen $[U, \varphi]$ und $[V, \psi + f]$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Wir nehmen an Voraussetzung (B_2) sei erfüllt. Beachtet man Hilfssatz 3.3.1 und Hilfssatz 3.3.2, so gibt es nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen (vgl.

[2] Int (M) bezeichnet das Innere der Menge M.

KÖTHE G. [36, S. 191]) ein Funktional $t^* \in (Y \times F)^*$ und eine reelle Zahl α mit

$$(3.4.13) \qquad \sup\{t^*(t) : t \in [U, \varphi]\} \leq \alpha \leq \inf\{t^*(t) : t \in [V, \psi + f]\},$$

$$(3.4.14) \qquad t^*(t) < \alpha \text{ für alle } t \in \operatorname{Int}([U, \varphi]).$$

Definiert man nun die Funktionale y^* und f^* durch

$$y^*(y) = t^*((y, \theta_F)) \quad \text{für alle } y \in Y,$$
$$f^*(g) = -\,t^*((\theta_Y, g)) \text{ für alle } g \in F,$$

so gilt $y^* \in Y^*$, $f^* \in F^*$ und

$$t^*(t) = y^*(y) - f^*(g) \text{ für alle } t = (y, g) \in Y \times F.$$

Die Beziehungen (3.4.13) und (3.4.14) kann man also auch wie folgt schreiben:

$$(3.4.15) \qquad \sup\{y^*(y) - f^*(g) : (y, g) \in [U, \varphi]\} \leq \alpha \leq$$
$$\leq \inf\{y^*(y) - f^*(g) : (y, g) \in [V, \psi + f]\},$$

$$(3.4.16) \qquad y^*(y) - f^*(g) < \alpha \text{ für alle } (y, g) \in \operatorname{Int}([U, \varphi]).$$

Nach Hilfssatz 3.4.2 folgt aus (3.4.15), dass f^* dem Kegel K_{F^*} angehört. Um zu zeigen, dass f^* sogar aus $K^+_{F^*}$ ist, wählen wir ein Element

$$(y_0, g_0) \in \operatorname{Int}([U, \varphi]) \cap (V \times F).$$

Dann ist $(y_0, \psi(y_0) + f)$ aus $[V, \psi + f]$ und wegen (3.4.16), (3.4.15) gilt

$$y^*(y_0) - f^*(g_0) < \alpha \leq y^*(y_0) - f^*(\psi(y_0) + f).$$

Also ist

$$(3.4.17) \qquad f^*(g_0 - \psi(y_0) - f) > 0.$$

Da der Raum F gerichtet und $F \neq \{\theta_F\}$ ist, gibt es ein $h \in K^+_F$ mit $g_0 - \psi(y_0) - f \leq h$. Wegen (3.4.17) ist dann $f^*(h) > 0$, d. h. f^* ist aus $K^+_{F^*}$.

Beachtet man nun, dass $(\pi(u), \varphi(u))$ für alle u aus U der Menge $[U, \varphi]$ angehört, so folgt aus (3.4.15) dass $(y^*, f^*) \in U'$ und $\varphi'(y^*, f^*) \leq \alpha$. Genau so ergibt sich aus

$$(v, \psi(v) + f) \in [V, \psi + f] \text{ für alle } v \in V,$$

dass (y^*, f^*) aus $'V$ ist und der Ungleichung

$$\alpha \leq {}'\psi(y^*, f^*) - f^*(f)$$

genügt. Demnach haben wir

$$((y^*, f^*), \alpha) \in [U', \varphi'] \cap [{}'V, {}'(\psi + f)].$$

Es sei nun Voraussetzung (B_3) erfüllt. Wie vorhin folgt die Existenz zweier Funktionale $y^* \in Y^*$, $f^* \in F^*$ und einer reellen Zahl α, so dass (3.4.15) und

$$(3.4.18) \qquad \alpha < y^*(y) - f^*(g) \text{ für alle } (y, g) \in \operatorname{Int}([V, \psi + f])$$

gilt. Nach Hilfssatz 3.4.2 ist f^* aus K_{F^*}. Um zu zeigen, dass f^* dem Kegel $K^+_{F^*}$ angehört, bemerken wir, dass $(\pi(u_0), g_0 + f)$ ein innerer Punkt von $[V, \psi + f]$ ist. Wegen (3.4.15) und (3.4.18) gilt also

$$y^*(\pi(u_0)) - f^*(\varphi(u_0)) \leq \alpha < y^*(\pi(u_0)) - f^*(g_0 + f),$$

woraus die Ungleichung

$$f^*(\varphi(u_0) - g_0 - f) > 0$$

folgt. Der weitere Beweis verläuft nun wie im vorhergehenden Fall.

3.5. Sattelpunktsätze

Hilfssatz 3.5.1. *Ist z_0 ein zulässiges Element und (y_0^*, f_0^*) ein zulässiges Funktional, so gelten die folgenden Aussagen:*

1° *Ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ein Indikator von (y_0^*, f_0^*), so gilt*

$$(3.5.1) \qquad L_1(\pi(z_0), y^*) \leq L_1(\pi(z_0), y_0^*) \leq L_1(v, y_0^*)$$

für alle y^* aus

$$U_1' = \{y^* \in Y^* : (y^*, f_0^*) \in U'\}$$

und alle v aus V, wobei L_1 durch

$$L_1(v, y^*) = y^*(v) - f_0^*(\psi(v)) - \varphi'(y^*, f_0^*)$$

für alle $(v, y^*) \in V \times U_1'$ erklärt ist.

2° *Gilt Beziehung* (3.5.1) *und*

(3.5.2) $$\sup\{y^*(\pi(z_0)) - \varphi'(y^*, f_0^*) : y^* \in U_1'\} = f_0^*(\varphi(z_0)),$$

so ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*).

Beweis. 1° Ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ein Indikator von (y_0^*, f_0^*), so haben wir

(3.5.3) $$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) = {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*).$$

Andererseits gilt aber

$${}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*) \leq L_1(v, y_0^*)$$

für alle v aus V und

$$L_1(\pi(z_0), y^*) \leq y^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\psi(\pi(z_0))) -$$
$$-(y^*(\pi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0))) = f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)))$$

für alle y^* aus U_1'. Beachtet man (3.5.3), so folgt also

$$L_1(\pi(z_0), y^*) \leq f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq L_1(v, y_0^*)$$

für alle y^* aus U_1' und alle v aus V. Hieraus ergibt sich sofort (3.5.1).

2° Es seien nun (3.5.1) und (3.5.2) erfüllt. Aus

$$L_1(\pi(z_0), y^*) \leq L_1(\pi(z_0), y_0^*) \text{ für alle } y^* \in U_1'$$

erhält man dann die Ungleichung

$$\sup\{y^*(\pi(z_0)) - \varphi'(y^*, f_0^*) : y^* \in U_1'\} - f_0^*(\psi(\pi(z_0))) \leq L_1(\pi(z_0), y_0^*).$$

Wegen (3.5.2) gilt also

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq L_1(\pi(z_0), y_0^*).$$

Beachtet man andererseits, dass

$$L_1(\pi(z_0), y_0^*) \leq L_1(v, y_0^*) \text{ für alle } v \in V$$

die Ungleichung

$$L_1(\pi(z_0), y_0^*) \leq {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*)$$

zur Folge hat, so ergibt sich

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*).$$

Aus der Definition von ${}'\psi(y_0^*, f_0^*)$ und von $\varphi'(y_0^*, f_0^*)$ resultiert aber

$${}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*) \leq f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))).$$

Demnach gilt Gleichung (3.5.3), d. h. $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ist ein Indikator des zulässigen Funktionals (y_0^*, f_0^*).

B e m e r k u n g. Beziehung (3.5.1) besagt, dass $(\pi(z_0), y_0^*)$ ein Sattelpunkt von L_1 bezüglich der Menge $V \times U_1'$ ist.

Beachtet man obigen Hilfssatz, so ergeben sich aus Korollar 3.4.3 bzw. aus Korollar 3.4.5 die folgenden beiden Sätze:

SATZ 3.5.1. *Bedingung* (B_1) *sei für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Ungleichungen* (3.5.1) *gelten.*

SATZ 3.5.2. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ *für das die Beziehungen* (3.5.1) *und* (3.5.2) *gelten, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Weiterhin erhält man wegen Hilfssatz 3.5.1 aus Satz 3.4.4 den folgenden Sattelpunktsatz:

SATZ 3.5.3. *Ist* F *ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Ist Bedingung* (B_1) *für alle* f *aus* F *erfüllt und* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein Maximalfunktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Ungleichungen* (3.5.1) *gelten.*

2° *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein Maximalfunktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Beziehungen* (3.5.1) *und* (3.5.2) *gelten, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Ähnlich wie Hilfssatz 3.5.1 beweist man den

H i l f s s a t z 3.5.2. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und* (y_0^*, f_0^*) *ein zulässiges Funktional, so gelten die folgenden Aussagen:*

1° *Ist* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*), *so gilt*

(3.5.4) $$L_2(z_0, y^*) \leq L_2(z_0, y_0^*) \leq L_2(u, y_0^*)$$

für alle u *aus* U *und alle* y^* *aus*

$${}'V_2 = \{y^* \in Y^* : (y^*, f_0^*) \in {}'V\},$$

wobei L_2 *durch*

$$L_2(u, y^*) = -y^*(\pi(u)) + f_0^*(\varphi(u)) + {}'\psi(y^*, f_0^*)$$

für alle $(u, y^*) \in U \times {}'V_2$ *erklärt ist.*

2° *Gilt Beziehung* (3.5.4) *und*

(3.5.5) $$\inf\{y^*(\pi(z_0)) - {}'\psi(y^*, f_0^*): y^* \in {}'V_2\} = f_0^*(\psi(\pi(z_0))),$$

so ist $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*).

In diesem Fall besagt (3.5.4), dass (z_0, y_0^*) ein Sattelpunkt von L_2 bezüglich der Menge $U \times {}'V_2$ ist.

Beachtet man Hilfssatz 3.5.2, so ergeben sich aus Korollar 3.4.3 bzw. aus Korollar 3.4.5 die folgenden beiden Sätze:

SATZ 3.5.4. *Bedingung* (B_1) *sei für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Ungleichungen* (3.5.4) *gelten.*

SATZ 3.5.5. *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein zulässiges Funktional* (y_0^*, f_0^*) *mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ *für das die Beziehungen* (3.5.4) *und* (3.5.5) *gelten, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

Aus Satz 3.4.4 erhält man nun noch den folgenden Sattelpunktsatz:

SATZ 3.5.6. *Ist* F *ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Ist Bedingung* (B_1) *für alle* f *aus* F *erfüllt und* $z_0 \in Z$ *ein Minimalelement, so gibt es ein Maximalfunktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Ungleichungen* (3.5.4) *gelten.*

2° *Ist* z_0 *ein zulässiges Element und gibt es ein Maximalfunktional* (y_0^*, f_0^*) *für das die Beziehungen* (3.5.4) *und* (3.5.5) *gelten, so ist* z_0 *ein Minimalelement.*

3.6. Charakterisierung der Maximalfunktionale durch Minimalelemente

Um die Maximalfunktionale durch Minimalelemente charakterisieren zu können, benötigen wir weitere zusätzliche Bedingungen u. zw.:

(B_4) *Aus* $[U, \varphi] \cap [V, \psi + f] = \emptyset$ *folgt* $[U', \varphi'] \cap [{}'V, {}'(\psi + f)] \neq \emptyset$.

(B_5) *Gibt es für jedes* $g \in F, f < g$, *ein zulässiges Element* z_g *mit* $\varphi(z_g) - \psi(\pi(z_g)) \leq g$, *dann gibt es ein zulässiges Element* z *mit* $\varphi(z) - \psi(\pi(z)) \leq g$ *für alle* $g \in F, f < g$.

In beiden Bedingungen bezeichnet f ein Element des Raumes F.

SATZ 3.6.1. *Die Bedingungen* (B_4) *und* (B_5) *seien für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $(y_0^*, f_0^*) \in Z'$ *ein Maximalfunktional, so gibt es ein zulässiges Element* z_0 *mit der Eigenschaft, dass* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*) *ist.*

Beweis. Es sei f ein Maximalindikator von (y_0^*, f_0^*). Nach Satz 3.3.2 gilt dann

$$[U', \varphi'] \cap [{}'V, {}'(\psi + g)] = \emptyset \text{ für alle } g \in F, f < g.$$

Hieraus folgt

(3.6.1) $$[U, \varphi] \cap [V, \psi + g] \neq \emptyset \text{ für alle } g \in F, f < g,$$

denn wäre der Durchschnitt $[U, \varphi] \cap [V, \psi + g]$ leer für ein $g \in F, f < g$, so müsste nach Bedingung (B_4) $[U', \varphi'] \cap [{}'V, {}'(\psi + g)]$ nicht leer sein. Ist nun (y_g, f_g) aus $[U, \varphi] \cap [V, \psi + g]$, so gibt es ein Element $u_g \in U$ mit $\pi(u_g) - y_g \in W$ und

(3.6.2) $$\varphi(u_g) \leq f_g \leq \psi(y_g) + g.$$

Wegen $y_g \in V$ ist aber $\pi(u_g)$ aus V und es gilt $\psi(y_g) \leq \psi(\pi(u_g))$. Also folgt aus (3.6.2)

(3.6.3) $$\varphi(u_g) - \psi(\pi(u_g)) \leq g.$$

Demnach besagt (3.6.1), dass es für jedes $g \in F, f < g$, ein zulässiges Element u_g gibt für das die Ungleichung (3.6.3) gilt. Nach Bedingung (B_5) gibt es also ein zulässiges Element z_0 mit

$$\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) \leq g \text{ für alle } g \in F, f < g.$$

Daraus folgt

(3.6.4) $$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq f_0^*(g) \text{ für alle } g \in F, f < g.$$

Da der Raum F gerichtet und $F \neq \{\theta_F\}$ ist, gibt es ein $g_1 \in K_F^+$, so dass $f < g_1$ gilt. Mit Hilfe dieses Elements konstruieren wir die Folge

$$g_n = f + 2^{1-n}(g_1 - f) \quad \text{für } n \in N.$$

Man stellt sofort fest, dass dann $f < g_n$ für alle $n \in N$ gilt und

$$\lim_{n \to \infty} f_0^*(g_n) = f_0^*(f).$$

Infolgedessen ist wegen (3.6.4)

(3.6.5) $$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) \leq f_0^*(f).$$

Beachtet man nun einerseits, dass f ein Indikator des Funktionals (y_0^*, f_0^*) ist, und andererseits die Ungleichung

$$'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*) \leqq f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))),$$

so folgt aus (3.6.5)

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))) = {}'\psi(y_0^*, f_0^*) - \varphi'(y_0^*, f_0^*),$$

d. h. $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ist auch ein Indikator von (y_0^*, f_0^*).

Korollar 3.6.1. *Die Bedingungen* (B_4) *und* (B_5) *seien für alle* f *aus* F *erfüllt. Ist* $(y_0^*, f_0^*) \in Z'$ *ein Maximalfunktional mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$, *dann gibt es ein Minimalelement* z_0 *mit der Eigenschaft, dass* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*) *ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3.6.1 und Korollar 3.4.5.

SATZ 3.6.2. *Ist* (y_0^*, f_0^*) *ein zulässiges Funktional mit* $f_0^* \in K_{F^*}^{++}$ *und gibt es ein zulässiges Element* z_0 *mit der Eigenschaft, dass* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*) *ist, so ist* (y_0^*, f_0^*) *ein Maximalfunktional.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.2.

Korollar 3.6.1 und Satz 3.6.2 ergeben nun das Hauptergebnis dieses Abschnitts:

SATZ 3.6.3. *Ist* F *ein Fundamentalraum, so gilt:*

1° *Sind die Bedingungen* (B_4) *und* (B_5) *für alle* f *aus* F *erfüllt und ist* (y_0^*, f_0^*) *ein Maximalfunktional, dann gibt es ein Minimalelement* z_0, *so dass* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator von* (y_0^*, f_0^*) *ist.*

2° *Ist* z_0 *ein Minimalelement und* $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ *ein Indikator des zulässigen Funktionals* (y_0^*, f_0^*), *so ist* (y_0^*, f_0^*) *ein Maximalfunktional.*

Bemerkung. Aussage 1° dieses Satzes gilt nicht wenn man auf Bedingung (B_5) verzichtet. Das zeigt folgendes Beispiel:

Es sei $X = Y = F = R$, $U = V = [0, +\infty[$, $W = \{0\}$; $\varphi(u) = e^{-u}$, $\psi(u) = 0$ und $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$. Dann ist $Z = U$, jedoch gibt es in dieser Menge keine Minimalelemente. Man stellt sofort fest, dass Bedingung (B_5) für $f = 0$ nicht erfüllt ist. Bedingung (B_4) hingegen ist für alle $f \in F$ erfüllt.

Andererseits ist

$$U' = \{(y^*, f^*) \in R^2 : y^* \leqq 0, f^* > 0\},$$

$$'V = \{(y^*, f^*) \in R^2 : y^* \geqq 0, f^* > 0\}$$

und

$$\varphi'(y^*, f^*) = 0 \text{ falls } y^* = 0, f^* > 0,$$

$$'\psi(y^*, f^*) = 0 \text{ für alle } (y^*, f^*) \in {}'V.$$

Demnach ist $Z' = \{(0, f^*) : f^* \in R, f^* > 0\}$ und jedes Funktional dieser Menge hat Null als Indikator. Folglich sind alle Funktionale aus Z' Maximalfunktionale.

Zum Abschluss dieses Abschnitts bemerken wir noch, dass Bedingung (B_4) erfüllt ist falls Bedingung (B_1) erfüllt ist. Sind die Bedingungen (B_2) oder (B_3) erfüllt, so gilt also auch (B_4) für alle f aus F.

Über (B_5) haben wir

SATZ 3.6.4. *Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:*

1° F *ist ein Vektorverband,* X *ein topologischer Vektorraum.*

2° K_F *ist normal (vgl.* PERESSINI A. L. [42, S. 61]).

3° *Die Abbildung* $f \to |f|$ *ist stetig.*

4° φ, ψ, π *sind stetig.*

5° Z *ist kompakt.*

Dann ist Bedingung (B_5) *für alle* f *aus* F *erfüllt.*

Beweis. Wir beweisen zunächst folgende Aussage:

Sind $(g_\nu)_{\nu\in\Delta}$ und $(h_\nu)_{\nu\in\Delta}$ zwei konvergente verallgemeinerte Folgen aus F mit

$$g_\nu \leqq h_\nu \text{ für alle } \nu \in \Delta, \tag{3.6.6}$$

so gilt $\lim g_\nu \leqq \lim h_\nu$.

In der Tat, aus (3.6.6) folgt $\sup\{g_\nu, h_\nu\} = h_\nu$. Setzen wir nun $g = \lim g_\nu$ und $h = \lim h_\nu$, so gilt

$$|\sup\{g, h\} - h_\nu| \leqq |\sup\{g, h\} - \sup\{g, h_\nu\}| + |\sup\{g, h_\nu\} - \sup\{g_\nu, h_\nu\}| \leqq |h - h_\nu| + |g - g_\nu|. \tag{3.6.7}$$

Wegen 3° ist aber

$$\lim(|h - h_\nu| + |g - g_\nu|) = \theta_F.$$

Da K_F normal ist, folgt daher aus (3.6.7) die Gleichung

$$\sup\{g, h\} = \lim h_\nu.$$

Daraus ergibt sich $g \leqq h$.

Es sei nun f ein Element aus F mit der Eigenschaft, dass die Menge

$$Z_g = \{z \in Z : \varphi(z) - \psi(\pi(z)) \leqq g\}$$

für alle $g \in F, f < g$, nicht leer ist. Wegen Voraussetzung 4° und der vorhin bewiesenen Aussage ist Z_g abgeschlossen.

$(\lambda_n)_{n \in N}$ sei eine nicht-wachsende Folge aus dem Intervall $]0, 1[$, die gegen Null konvergiert und g_0 ein Element aus F mit $f < g_0$. Setzen wir

$$g_n = (1 - \lambda_n)f + \lambda_n g_0 \text{ für alle } n \in N,$$

so folgt $f < g_n$ für alle $n \in N$ und $g_1 \geqq g_2 \geqq \ldots \geqq g_n \geqq \ldots$. Daher ist

$$S = \{Z_{g_n} : n \in N\}$$

ein zentriertes System von abgeschlossenen Mengen. Wegen der Kompaktheit von Z gibt es dann ein zulässiges Element z mit

$$\varphi(z) - \psi(\pi(z)) \leqq g_n \text{ für alle } n \in N.$$

Beachtet man, dass

$$\lim_{n \to \infty} g_n = f$$

ist, so folgt daraus $\varphi(z) - \psi(\pi(z)) \leqq f$. Dann ist aber

$$\varphi(z) - \psi(\pi(z)) \leqq g \text{ für alle } g \in F, \ f < g.$$

Demnach ist Bedingung (B_5) erfüllt.

3.7. Das Dualitätsprinzip

Sind f und g Elemente von F, so schreiben wir $f \lessdot g$, wenn es ein zulässiges Funktional gibt, für das f und g Indikatoren sind.

Beachtet man diese Definition der binären Relation $\lessdot$, so ergeben Satz 3.2.2, Satz 3.4.3 und Satz 3.6.3 folgendes Dualitätsprinzip für die beiden im Abschnitt 3.1 gestellten Optimierungsaufgaben:

Dualitätsprinzip. *F sei ein Fundamentalraum und die Bedingungen (B_1), (B_5) seien für alle f aus F erfüllt. Dann gelten die Aussagen:*

1° *Gilt für $z_0 \in Z$ und $f \in \mathcal{J}$ die Beziehung*

$$\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0)) \lessdot f, \tag{3.7.1}$$

so ist z_0 ein Minimalelement und $\varphi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ ein Maximalindikator.

2° *Ist $z_0 \in Z$ ein Minimalelement, so gibt es ein $f \in \mathcal{J}$ für das (3.7.1) gilt.*

3° *Ist $f \in \mathcal{J}$ ein Maximalindikator, so gibt es ein $z_0 \in Z$ für das (3.7.1) gilt.*

Setzt man

$$\mathcal{Z} = \{\varphi(z) - \psi(\pi(z)) : z \in Z\}, \quad \mathcal{Z}' = \mathcal{J},$$

so bemerkt man, dass im Falle der primären Optimierungsaufgabe die minimalen Elemente von $\mathcal{Z}$ und im Falle der dualen Optimierungsaufgabe die maximalen oder mit ihnen in der Relation $\lessdot$ stehende Elemente von $\mathcal{Z}'$ gesucht werden. Interpretiert man die primäre und die duale Optimierungsaufgabe in diesem Sinn, so besagt obiges Dualitätsprinzip, dass diese beiden Optimierungsaufgaben in $(F, <)$ dual zueinander sind bezüglich der binären Relation $\lessdot$.

LITERATUR

[1] Altman, M., *Théorème général de séparation des applications. Dualité dans la programmation mathématique. Fonctions duales.* C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **269**, 198–201 (1969).

[2] — , *A general separation theorem for mappings, saddle-points, duality and conjugate functions.* Studia Math., **36**, 131–167 (1970).

[3] Arrow, K. J., Hurwicz, L., Uzawa, H., *Studies in linear and non-linear programming.* Stanford, Stanford University Press, 1958.

[4] Бенайюн, Р., Ларичев, О. И., де Монгольфе, Ж., Терни, Ж., *Линейное программирование с многими критериями. Метод ограничений.* Автоматика и Телемеханика, *8*, 108–115 (1971).

[5] Blumenthal, B. (Herausgeber), *Mathematische Methoden in der Operationsforschung.* Berlin, Verlag Die Wirtschaft, 1970.

[6] Bod, P., *Lineáris programozás több egyidejüleg adott célfüggvény aszerint.* Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., Ser. B, **8**, 541–556 (1963).

[7] Breckner, W. W., *Probleme duale de optimizare în spaţii vectoriale topologice ordonate.* Cluj, Academia R.S.R., Filiala din Cluj, Institutul de calcul, Seminarul de cea mai bună aproximaţie şi programare matematică, **24**/21 mai 1969.

[8] — , *Teoreme de caracterizare a soluţiilor anumitor probleme de optimizare.* Teză de doctorat. Cluj, Universitatea „Babeş-Bolyai", 1970.

[9] Breckner, W. W., Kolumbán, I., *Dualität bei Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen.* Mathematica (Cluj), **10** (**33**), 229–244 (1968).

[10] — , *Konvexe Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen.* Math. Scand., **25**, 227–247 (1969).

[11] Brondsted, A., *Conjugate convex functions in topological vector spaces.* Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk., **34**, *2* (1964).

[12] Chang, S. S. L., *General theory of optimal processes.* SIAM J. Control, **4**, 46–55 (1966).

[13] Chattopadhyay, R., *Linear programming with vector-valued cost function.* Honolulu, University of Hawaii, The Aloha System, Technical Report, A 70-3, 1970.

[14] — , *Well posed linear programs with vector-valued cost functions.* Honolulu, University of Hawaii, The Aloha System, Technical Report, A 70-4, 1970.

[15] — , *Well posed linear programs with vector-valued cost functions.* Part II. Honolulu, University of Hawaii, The Aloha System, Technical Report, A 70-5, 1970.

[16] Collatz, L., Wetterling, W., *Optimierungsaufgaben*. 2. Auflage. Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1971.

[17] Da Cunha, N. O., Polak, E., *Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces*. J. Math. Anal. Appl., **19**, 103—124 (1967).

[18] — , *Constrained minimization under vector-valued criteria in linear topological spaces*. Erschienen in: Balakrishnan A. V., L. W. Neustadt (Editors), *Mathematical Theory of Control*. New York — London, Academic Press, 1967, 96—108.

[19] Dieter, U., *Dualität bei konvexen Optimierungs- (Programmierungs-) Aufgaben*. Unternehmensforschung, **9**, 91—111 (1965).

[20] — , *Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen. I: Dualitätstheorie*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb., **5**, 89—117 (1966).

[21] — , *Dual extremal problems in locally convex linear spaces*. Erschienen in: *Proceedings of the Colloquium on Convexity, Copenhagen* 1965. Kobenhavn, Kobenhavns Universitets Matematiske Institut, 1967, 52—57.

[22] — , *Dual extremal problems in linear spaces with examples and applications in game theory and statistics*. Erschienen in: Ghizzetti A. (Editor), *Theory and Applications of Monotone Operators*. Gubbio, Ed. Oderisi, 1969, 1—9.

[23] Elster, K.-H., *Ergebnisse und Probleme der nichtlinearen Optimierung*. Wiss. Z. TH Ilmenau, **15**, *3*, 37—61 (1969).

[24] Elster, K.-H., Suppe, C., *Zur Entwicklung der Dualitätstheorie in der nichtlinearen Optimierung*. Wiss. Z. TH Ilmenau, **15**, *4/5*, 77—98 (1969).

[25] Fenchel, W., *Convex cones, sets and functions*. Lecture notes. Princeton University, 1953.

[26] Geoffrion, A. M., *Proper efficiency and the theory of vector maximization*. J. Math. Anal. Appl., **22**, 618—630 (1968).

[27] Ghika, A., *Opera matematică*. Bucureşti, Editura Academiei R. S. R., 1968.

[28] Гольштейн, Е. Г., *Теория двойственности в математическом программировании и её приложения*. Москва, Изд. Наука, 1971.

[29] Gould, F. J., *Nonlinear duality theorems*. Chicago, University of Chicago, Center for Math. Studies in Business and Economics, Report 6817, April 1968.

[30] Иоффе, А. Д., Тихомиров, В. М., *Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи*. Успехи Мат. Наук, **23**, *6* (*144*), 51—116 (1968).

[31] Karlin, S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*. I. London — Paris, Pergamon Press, 1959.

[32] Klinger, A., *Vector-valued performance criteria*. IEEE Trans. Automat. Control, **9**, 117—118 (1964).

[33] — , *Improper solutions of the vector maximum problem*. Operations Res., **15**, 570—572 (1967).

[34] Kolumbán, I., *Principiul dualităţii la o clasă de probleme de optimizare*. Teză de doctorat. Cluj, Universitatea „Babeş-Bolyai", 1968.

[35] — , *Dualität bei Optimierungsaufgaben*. Erschienen in: Alexits G., S. B. Stechkin (Editors), *Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions* (*Approximation Theory*). Budapest, Akadémiai Kiadó, 1972, 261—265.

[36] Köthe, G., *Topologische lineare Räume*. I. 2. Auflage. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1966.

[37] Krabs, W., *Lineare Optimierung in halbgeordneten Vektorräumen*. Numer. Math., **11**, 220—231 (1968).

[38] — , *Zur Dualitätstheorie bei linearen Optimierungsproblemen in halbgeordneten Vektorräumen*. Math. Z., **121**, 320—328 (1971).

[39] Kuhn, H. W., Tucker, A. W., *Nonlinear programming*. Erschienen in: Neyman J. (Editor), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley—Los Angeles, University of California Press, 1951, 481—492.

[40] Leonte, A., *Problema programării concave în spaţii Hilbert ordonate*. An. Univ. Bucureşti, Ser. Sti. Natur., Mat.-Mec., **17**, *2*, 147—149 (1968).

[41] Moreau, J. J., *Fonctionnelles convexes*. Collège de France, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1967.

[42] Peressini, A. L., *Ordered topological vector spaces*. New York—Evanston—London, Harper & Row Publishers, 1967.

[43] Philip, J., *Algorithms for the vector maximization problem*. Math. Programming, **2**, 207—229 (1972).

[44] Rockafellar, R. T., *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions*. Duke Math. J., **33**, 81—89 (1966).

[45] — , *Duality and stability in extremum problems involving convex functions*. Pacific J. Math., **21**, 167—187 (1967).

[46] — , *Convex analysis*. Princeton, Princeton University Press, 1970.

[47] Roy, B., *Problems and methods with multiple objective functions*. Math. Programming, **1**, 239—266 (1971).

[48] Рубинштейн, Г. Ш., *Двойственные экстремальные задачи*. Доклады Акад. Наук СССР, **152**, 288—291 (1963).

[49] — , *Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа*. Успехи Мат. Наук, **25**, *5* (*155*), 171—201 (1970).

[50] Rudeanu, S., *Programmation bivalente à plusieurs fonctions économiques*. Revue Franç. Inform. Rech. Opérat., **3**, Nr. V-2, 13—30 (1969).

[51] Stoer, J., Witzgall, C., *Convexity and optimization in finite dimensions*. I. Berlin—Heidelberg—New York, Spinger-Verlag, 1970.

[52] Тынянский, Н. Т., *Сопряженные вогнуто-выпуклые функции в линейных топологических пространствах и их седловые точки*. Мат. Сборник, **78** (**120**), 512—541 (1969).

[53] Vogel, W., *Duale Optimierungsaufgaben und Sattelpunktsätze*. Unternehmensforschung, **13**, 1—28 (1969).

[54] Weiss, E.-A., *Konjugierte Funktionen*. Arch. der Math., **20**, 538—545 (1969).

[55] Yamasaki, M., *Duality theorems in mathematical programmings and their applications*. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, **32**, 331—356 (1968).

[56] — , *Some generalizations of duality theorems in mathematical programming problems*. Math. J. Okayama Univ., **14**, 69—81 (1969).

Eingegangen am 5. VI. 1972.

Universitatea „Babeş-Bolyai" — Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.