REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, Tome 2, 1973, pp. 99–104

SUR LA CONVERGENCE D'UNE CLASSE DE MÉTHODES ITÉRATIVES DE J.F. TRAUB

par

I. PĂVĂLOIU

(Cluj)

1. Considérons l'équation opérationnelle

$$(1) \qquad P(x) = \theta,$$

où P est un opérateur défini sur l'espace de Banach X à valeurs dans l'espace linéaire normé Y.

Au cas où $P(x)$ est une fonction réelle de la variable réelle x, J. F. TRAUB [4] étudie l'ordre de la fonction iterative suivante attachée à l'équation (1) :

$$(2) \qquad \psi(x) = \Phi(x) - \frac{P(\Phi(x))}{P'(x)}.$$

Dans le travail [3], nous avons élargi la fonction itérative (2) pour des équations plus générales de forme (1) et nous avons facilement étudié son ordre en employant une notion d'ordre d'un opérateur itératif, notion, plus générale que celle employée [4].

Dans la note ci — présente on étudiera la convergence du procédé itératif qui découle de l'opérateur itératif suivant étudié par nous dans [3]

$$(3) \qquad R(x) = Q(x) - [P'(x)]^{-1}P(Q(x)),$$

où $P'(x)$ est la dérivée de Fréchet de l'opérateur P et Q est un opérateur itératif arbitraire attaché à l'équation (1). On considérera ensuite un cas particulier de l'opérateur (3) par la particularisation de l'opérateur Q.

2. L'opérateur itératif (3) nous conduit évidemment à la méthode itérative suivante :

$$x_{n+1} = Q(x_n) - [P'(x_n)]^{-1}P(Q(x_n)), \quad x_0 \in X, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

où pour la clarté des énoncés et des démonstrations qui suivront on supposera que l'opérateur Q a la forme

$$Q(x) = x + \varphi(x). \tag{5}$$

Soit $x_0 \in X$ et δ un nombre réel et positif. On désigne par $S(x_0, \delta)$ l'ensemble $\{x \in X\,;\ ||x - x_0|| \leq \delta\}$.

On suppose que dans la sphère $S(x_0, \delta)$ définie antérieurement sont remplies les conditions suivantes.

1.i) L'opérateur $P(x)$ admet des dérivées au sens de Fréchet jusqu'à l'ordre k inclusivement et $\sup\limits_{x \in S(x_0, \delta)} ||P^{(k)}_{(x)}|| \leq M_k < +\infty$, où $k \geq 2$ est un nombre naturel. On désigne par, $M_2 = \sup\limits_{x \in S(x_0, \delta)} ||P''(x)||$.

2.i) $\left\|\sum\limits_{s=0}^{k-1} \frac{P^{(s)}(x)}{s!}\, \varphi^s(x)\right\| \leq \alpha\, ||P(x)||^k$ pour tout $x \in S(x_0, \delta)$ où α est un nombre réel non-négatif.

3.i) $||\varphi(x)|| \leq \beta ||P(x)||$ pour tout $x \in S(x_0, \delta)$, où β est un nombre réel positif.

4.i) L'opérateur $P'(x)$ admet une inverse bornée pour tout $x \in S(x_0, \delta)$ c'est-à-dire il y a une constante réelle et positive B pour laquelle $||[P'(x)]^{-1}|| \leq B$.

5.i) La différence divisée généralisée [1], $[x, y\,;\, Q]$ de l'opérateur Q est bornée en norme pour tout $x, y \in S(x_0, \delta)$ c'est-à-dire il y a une constante réelle et non-négative λ pour laquelle $||[x, y\,;\, Q]|| \leq \lambda$.

6.i) $\varepsilon_0 = \rho_0^{\frac{1}{k}}\, ||P(x_0)|| < 1$ où

$$\rho_0 = M_2 B\left(\frac{M_k \beta^k}{k!} + \alpha\right)\left[\frac{1}{2} B\left(\frac{M_k \beta^k}{k!} + \alpha\right) h_0^{k-1} + \beta\right] \text{ et } h_0 = ||P(x_0)||$$

7.i) Soit $r = \lambda \rho_0^{-\frac{1}{k}} \mu_0 \frac{\varepsilon_0^{k+1}}{1 - \varepsilon_0^{k+1}} + \beta h_0 + \lambda \mu_0 h_0$ et

$$r' = \mu_0 \left[\frac{\rho_0^{-\frac{1}{k}}\, \varepsilon_0^{k+1}}{1 - \varepsilon_0^{k-1}} + h_0\right] \quad \text{où} \quad \mu_0 = \beta + B\left(\frac{M_k \beta^k}{k!} + \alpha\right) h_0^{k-1}$$

on suppose que $\max\{r, r'\} \leq \delta$.

THÉORÈME 1. *Si les hypothèses 1.i) — 7.i) sont remplies alors en ce qui concerne la classe des méthodes itératives (4) on a les propriétés suivantes :*

1.c) *l'équation* (1) *a au moins une solution* $\bar{x} \in S(x_0, \delta)$,

2.c) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$,

3.c) $||P(x_{n+1})|| \leq \delta_0\, ||P(x_n)||^{k+1}$

4.c) $||x_{n+1} - \bar{x}|| \leq \mu_0 \rho_0^{-\frac{1}{k}} \frac{\varepsilon_0^{(k+1)^{n+1}}}{1 - \varepsilon_0^{k+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots,$

Démonstration. Pour faciliter l'écriture on écrira $k + 1 = p$. D'abord on montrera que $Q(x_0) \in S(x_0, \delta)$. En effet de (5) on déduit

$$||Q(x_0) - x_0|| = ||\varphi(x_0)|| \leq \beta ||P(x_0)|| \leq r' \leq \delta,$$

c'est-à-dire $Q(x_0) \in S(x_0, \delta)$. En tenant compte de ceci et des hypothèses 1.i), 2.i) et 3.i) on déduit la délimitation suivante :

$$||P(Q(x_0))|| \leq \left(\frac{M_k \beta^k}{k!} + \alpha\right) ||P(x_0)||^k \tag{6}$$

De l'inégalité précédente et de (4), en tenant compte des hypothèses 3.i) et 4.i) on déduit

$$||x_1 - x_0|| \leq \mu_0 ||P(x_0)|| \leq \delta.$$

c'est-à-dire $x_1 \in S(x_0, \delta)$. En se basant sur le fait que $x_1 \in S(x_0, \delta)$ et sur les inégalités précédentes on déduira facilement l'inégalité suivante :

$$||P(x_1)|| \leq \rho_0 ||P(x_0)||^p \tag{7}$$

où ρ_0 est la constante qui intervient dans l'hypothèse 6.i).

De l'inégalité (7) et de 6.i) on déduit

$$||P(x_1)|| \leq \rho_0 ||P(x_0)||^{p-1} ||P(x_0)|| = (\rho_0^{\frac{1}{p-1}} ||P(x_0)||)^{p-1} ||P(x_0)||$$

c'est-à-dire

$$||P(x_1)|| \leq ||P(x_0)|| \tag{8}$$

De l'inégalité précédente il résulte que pour les considérations ultérieures les constantes ρ_0 et μ_0 peuvent rester nonchangées pendant toute la démonstration. On emploiera le principe de l'induction.

On supposera qu'ont lieu les propriétés suivantes : $Q(x_i) \in S(x_0, \delta)$,

$$x_{i+1} \in S(x_0, \delta),\ i = 1, 2, \ldots, n - 1\,;\ ||P(x_i)|| \leq \rho_0\, P(x_{i-1})||^p,$$

$$||P(x_i)\,|| < ||P(x_{i-1})\,||,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dans ces hypothèses on montrera que :

$$Q(x_n) \in S(x_0, \delta),\ x_{n+1} \in S(x_0, \delta),\ ||P(x_{n+1})|| \leqq \rho_0 ||P(x_n)||^p,$$
$$||P(x_{n+1})|| < ||P(x_n)||.$$

En effet on a

$$||Q(x_n) - x_0|| \leqq \lambda(||x_n - x_{n-1}|| + \ldots + ||x_1 - x_0||) + ||Q(x_0) - x_0|| \leqq$$
$$\leqq \lambda \rho_0^{-\frac{1}{k}} \mu_0 \frac{\varepsilon_0^{k+1}}{1 - \varepsilon_0^{k+1}} + (\lambda\mu_0 + \beta) ||P(x_0)|| \leqq \delta.$$

C'est-à-dire $Q(x_n) \in S$. Par analogie on a

$$||x_{n+1} - x_0|| \leqq ||x_{n+1} - x_n|| + \ldots + ||x_1 - x_0|| \leqq \mu_0 \left[\rho_0^{-\frac{1}{k}} \frac{\varepsilon^{k+1}}{1 - \varepsilon^{k+1}} + \right.$$
$$\left. + ||P(x_0|| \right] \leqq \delta$$

ce qui nous montre que $x_{n+1} \in S(x_0, \delta)$. En procédant de la même manière que dans le cas des inégalités (7) et en tenant compte du fait que $||P(x_n)|| < <||P(x_{n-1})||$ on déduit l'inégalité

$$||P(x_{n+1})|| \leqq \rho_0 ||P(x_n)||^p. \tag{9}$$

C'est-à-dire l'inégalité 3.c). En vertu du principe de l'induction et de ce qu'on vient de prouver, il résulte que les propriétés énoncées sont vraies pour tout nombre naturel n.

De ces considérations il résulte tout de suite les inégalités suivantes

$$||x_i - x_{i-1}|| \leqq \rho_0^{-\frac{1}{k}} \mu_0 \varepsilon_0^{p^{i-1}} \tag{10}$$

Pour prouver la convergence de la suite on montrera qu'elle satisfait à la condition de Cauchy. En effet de (10), on déduit

$$||x_{n+s} - x_n|| \leqq \mu_0 \rho_0^{-\frac{1}{k}} \frac{\varepsilon_0^{p^n}}{1 - \varepsilon_0^p},\ \text{pour, } n = 0, 1, \ldots,\quad s = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Si on passe à la limite dans l'inégalité (11) pour $s \to \infty$ on a l'inégalité $||\bar{x} - x_n|| \leqq \mu_0 \rho_0^{-\frac{1}{k}} \frac{\varepsilon_0^{p^n}}{1 - \varepsilon_0^p}$, ce qui nous prouve l'inégalité (4.c). Le fait que la suite est convergente résulte de (11) et du fait que l'espace $\mathbf{X}$ est complet. Ainsi la théorème est démontré.

R e m a r q u e. Dans l'ouvrage [2] on a introduit une notion de caractérisation de l'ordre de convergence d'un procédé itératif (Définition 2). Au sens de cette définition, de (6.i) et 3.c) il résulte que le procédé itératif étudié par nous a l'ordre de convergence $k + 1$.

3. En ce qui suit on utilisera le théorème 1 pour caractériser la convergence du procédé itératif suivant :

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n) - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)), \tag{12}$$
$$x_0 \in X,\ n = 0, 1, \ldots$$

Ce procédé est obtenu de (4) pour $Q(x) = x - [P'(x)]^{-1} P(x)$. On observe dans ce cas, que $\varphi(x) = - [P'(x)]^{-1} P(x)$.

On montre en ce qui suit que certaines hypothèses du théorème 1 sont satisfaites par la méthode (12), et le reste sera modifié par nous, selon les exigences des particularités de la méthode itérative (12).

Désignons par δ' le rayon de la sphére S qu'on a considérée dans le théorème 1.

On observe tout de suite que l'hypothèse 2.i) est satisfaite dans ce cas pour $\alpha = 0$, et l'hypothèse 3.i) est satisfaite pour $\beta = B$.

Dans la sphère définie précédemment supposons que sont remplies les conditions suivantes relatives à la méthode itérative (12).

1.i') la propriété 1.i) a lieu pour $k = 2$ et $x \in S(x_0, \delta')$
2.i') la propriété 4.i) a lieu pour tout $x \in S(x_0, \delta')$
3.i') la propriété 5.i) a lieu pour tout $x \in S(x_0, \delta')$
4.i') $\varepsilon_0 = \sqrt{\rho_0} ||P(x_0)|| < 1$, où $\rho_0 = \frac{M_2^2 B^3}{8} [M_2 B^3 h_0 + 4B]$ et $h_0 = ||P(x_0)||$
5.i') Dans l'hypothèse 7.i) du théorème 1 on suppose que

$$r' = \frac{\lambda}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_0^3} + (\lambda\mu_0 + \beta) ||P(x_0)|| \text{ et } r = \mu_0 \left[\frac{\varepsilon_0^3}{\sqrt{\rho_0}\,(1 - \varepsilon_0^3)} + ||P(x_0)|| \right] \text{où}$$
$$\mu_0 = \frac{B}{2} (2 + M_2 B^2 h_0)$$

On suppose que $\max \{r, r'\} \leqq \delta'$.

On peut alors énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Si les hypothèses* 1i') — 5i') *sont remplies, alors relativement à la méthode itérative* (12) *on a les propriétés suivantes :*

1.c') *L'équation* (1) *a au moins une solution* $\bar{x} \in S(x_0, \delta')$
2.c') $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$
3.c') $||P(x_{n+1})|| \leqq \rho_0 ||P(x_n)||^2$, *pour* $n = 0, 1, \ldots,$
4.c') $||x_n - \bar{x}|| \leqq \frac{\mu_0 \varepsilon_0^{3^n}}{\sqrt{\rho_0}(1 - \varepsilon_0^3)}$, *pour* $n = 0, 1, \ldots,$

Evidemment d'après ce qu'on a vu le théorème 1 a un caractère général puisqu' il concerne la convergence d'une classe large de méthodes itératives. De 3.i') et 3.c') il résulte que la méthode (12) a l'ordre de convergence 3. Cette méthode a donc le même ordre que la méthode bien connue de Tchébycheff mais par contre la méthode (12) a une forme plus simple et dans certains cas on peut supposer qu'elle est d'un emploi plus facile, puisqu' elle ne demande pas le calcul de la deuxième dérivée de l'opérateur P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Păvăloiu, I., *Interpolation dans des espaces linéaires normés et applications*, Mathematica (Cluj), **12** (**35**), *1*, **149–158** (**1970**).

[2] Păvăloiu, I., *Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence*, Mathematica, Cluj, **12** (**35**), **2**, **309–324** (**1970**).

[3] Păvăloiu, I., *Asupra operatorilor iterativi*, Studii şi cercetări matematice, **10**, **23**, **1537–1544** (**1971**).

[4] Traub, J. F., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs N. J., 1964.

Reçu le 7. IX. 1972.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România