REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, Tome 2, 1973, pp. 105–112

SUR UN OPÉRATEUR QUI CONSERVE L'ALLURE D'UNE FONCTION

par

DUMITRU RIPEANU

(Cluj)

§ 1. Dans cette note on indique un moyen de construire une fonction à deux variables $p(x, s)$ qui conserve l'allure de chaque fonction à une variable $f(x)$, au sens que si $f^{(\sigma)}(x) \geqq 0$ $(\sigma = \overline{0, n}$; $x \in [a, b])$, alors $\varphi^{(\sigma)}(x) \geqq 0$ $(\sigma = \overline{0, n}$; $x \in [a, b])$ où $\varphi(x) = \int_a^b p(x, s) f(s) ds$ (on entendra par la notation $x \in [a, b]$ que x parcourt tout l'intervalle $[a, b]$, et par la notation $x, s \in [a, b]$ que x et s parcourent indépendemment l'un de l'autre tout l'intervalle $[a, b]$).

Le moyen en question est indiqué dans le théorème 1. On fait également une application du théorème à un cas particulier et on obtient ainsi une forme particulière de la fonction (théorèmes 2 et 3).

On désignera par $C^{(n, n)}[a, b]$ la classe des fonctions à deux variables $F(x, s)$ qui jouissent de la propriété que $F^{(\sigma)}_{x\sigma}(x, s)$ et $F^{(\sigma)}_{s\sigma}(x, s)$ sont des fonctions continues par rapport à x et à s $(x, s \in [a, b]$; $\sigma = \overline{0, n})$ et on se servira de la définition suivante :

D é f i n i t i o n. *On dira qu'une fonction* $p(x, s) \in C^{(n, n)}[a, b]$ *jouit de propriété* $P^{(n)}[a, b]$ *si les relations* $f^{(\sigma)}(x) \geqq 0(\sigma = \overline{0, n}$; $x \in [a, b])$, *impliquent les relations* $\varphi^{(\sigma)}(x) \geqq 0(\sigma = \overline{0, n}$; $x \in [a, b])$ *pour la fonction*

$$\varphi(x) = \int_a^b p(x, s) f(s) ds \tag{1}$$

pour toute fonction $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$.

§ 2. Avec ces notations on présentera le

THÉORÈME 1. *On obtient une fonction $p(x, s)$ à la propriété $P^{(n)}[a, b]$ de la manière suivante :*

$$p(x, s) = \int_C^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{ds^n} [(s-a)^n (s-b)^n A(u, s)]du +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{n-1} x^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha} [(s-a)^\alpha (s-b)^\alpha C_\alpha(s)]$$

où C est une constante arbitraire, $A(x, s)$ est une fonction quelconque de $C^{(n,\, n)}[a, b]$, non négative pour $x, s \in [a, b]$ et $C_\alpha(s)$ $(\alpha = \overline{0, n-1})$ sont des fonctions de $C^{(n-1)}[a, b]$, choisies de la manière suivante : on écrit

$$\psi_{n-l}(x, s) =$$

$$= \int_C^x \frac{(x-u)^{l-1}}{(l-1)!(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}} \frac{d^l}{ds^l} [(s-a)^n (s-b)^n A(u, s)]du +$$

$$+ \sum_{\alpha=n-l}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+l+1)}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}} \frac{d^{\alpha-n+l}}{ds^{\alpha-n+l}} [(s-a)^\alpha (s-b)^\alpha C_\alpha(s)]\, x^{\alpha-n+l}$$

$$(l = \overline{1, n-1})$$

et on choisit $C_{n-1}(s)$ de telle manière que $\psi_{n-1}(x, s) \geq 0$ $(x, s \in [a, b])$, ensuite on choisit $C_{n-2}(s)$ de telle manière que-avec $C_{n-1}(s)$ déterminée de la sorte — on ait $\psi_{n-2}(x, s) \geq 0$ $(x, s \in [a, b])$ et on continue le procédé jusqu'au choix de $C_1(s)$ de telle manière que — avec $C_\alpha(s)(\alpha = \overline{2, n-1})$ déterminées de la sorte-on ait $\psi_1(x, s) \geq 0 (x, s \in [a, b])$. On choisit enfin $C_0(s)$ de telle manière que-avec $C_\alpha(s)(\alpha = \overline{1, n-1})$ déterminées de la sorte-on ait $p(x, s) \geq 0$ $(x, s \in [a, b])$.

Démonstration. On fixera un nombre h de la suite $1, 2, \ldots, n$ auquel cas on déduit de (1)

$$\varphi^{(h)}(x) = \int_a^b f(s)\, p^{(h)}_{x^h}(x, s)\, ds \tag{2}$$

et on considérera une fonction $\Phi_h(x, s) \in C^{(n,n)}[a, b]$ pour laquelle

(3) $$1^\circ\ \frac{\partial^h}{\partial s^h}\Phi_h(x, s) = p^{(h)}_{x^h}(x, s) \left(= \frac{\partial^h}{\partial x^h} p(x, s)\right).$$

$$2^\circ\ \frac{\partial^\alpha}{\partial s^\alpha}\Phi_h(x, s)\Big|_{s=a} = \frac{\partial^\alpha}{\partial s^\alpha}\Phi_h(x, s)\Big|_{s=b} = 0 \quad (\alpha = \overline{0, h-1})$$

$$3^\circ\ \mathrm{sg}\, \Phi_h(x, s) = sg(-1)^h \text{ pour } x, s \in [a, b].$$

Dans ce cas, la formule d'intégration par parties généralisée et (2) donnent

(4) $$\varphi^{(h)}(x) = \int_a^b f(s) \frac{\partial^h}{\partial s^h}\Phi_h(x, s)ds = \sum_{\alpha=0}^{h-1} (-1)^{h-1-\alpha} f^{(h-1-\alpha)}(s) \frac{\partial^\alpha}{\partial s^\alpha}\Phi_h(x, s)\Big|_{s=a}^{s=b} +$$

$$+ (-1)^h \int_a^b f^{(h)}(s)\, \Phi_h(x, s)ds = (-1)^h \int_\alpha^a f^{(h)}(s)\, \Phi_h(x, s)ds \geq 0.$$

Une telle fonction $\Phi_h(x, s)$ est, par exemple, la fonction

$$\Phi_h(x, s) = (s-a)^h (s-b)^h A_h(x, s)$$

où $A_h(x, s)$ est une fonction quelconque de $C^{(n,n)}[a, b]$, nonnégative pour $x, s \in [a, b]$. Dans ce cas, la relation 1° de (3) donne

(5) $$p(x, s) =$$

$$= \int_{C(s)}^{\alpha} \frac{(x-u)^{h-1}}{(h-1)!} \frac{d^h}{ds^h} [(s-a)^h (s-b)^h A_h(u, s)]du + \sum_{\alpha=0}^{h-1} B_\alpha(s) x^\alpha$$

où $C(s)$, $B_\alpha(s)(\alpha = \overline{0, h-1})$ sont des fonctions arbitraires de s, de la classe $C^{(n)}[a, b]$.

On fera en (5) $h = n$ et on obtiendra un $p(x, s) = \bar{p}(x, s)$ pour lequel la relation (4) a lieu pour $h = n$ (parceque (5) donne

$$p^{(n)}_{x^n}(x, s) = \frac{d^n}{ds^n} [(s-a)^n (s-b)^n A_n(x, s)],$$

de sorte que une intégration par parties donne

$$\varphi^{(n)}(x) = \int_a^b f(s) p^{(n)}_{x^n}(x, s)ds = (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(s)(s-a)^n (s-b)^n A_n(x, s)ds \geq 0)$$

et dans lequel on déterminera successivement les fonctions $B_\alpha(s)$ de telle manière que les relations (3) (et par conséquent aussi la relation (4)) soient satisfaites pour $h = n-1, n-2, \ldots, 1$ et enfin que la relation (4) ait lieu aussi pour $h = 0$.

A cet effet on déduira de (5)

$$(6)\qquad p_{x^{n-l}}^{(n-l)}(x, s) = \int_{C(s)}^{x} \frac{(x-u)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{d^n}{ds^n}[(s-a)^n(s-b)^n A_n(u, s)]\,du +$$

$$+ \sum_{\alpha=n-l}^{n-1} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+l+1)\, B_\alpha(s)x^{\alpha-n+l}$$

avec

$$(7)\qquad B_\alpha(s) = \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}[(s-a)^\alpha(s-b)^\alpha C_\alpha(s)]$$

où $C_\alpha(s)(\alpha = \overline{n-l,\ n-1})$ sont des fonctions arbitraires de $C^{(n-1)}[a, b]$ et on prendra $C(s) = C =$ Const., auquel cas

$$(8)\qquad \Phi_{n-l}(x, s) = \int_{C}^{x} \frac{(x-u)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{d^l}{ds^l}[(s-a)^n(s-b)^n A_n(u, s)]du +$$

$$+ \sum_{\alpha=n-l}^{n-1} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+l+1)\frac{d^{\alpha-n+l}}{ds^{\alpha-n+l}}[(s-a)^\alpha(s-b)^\alpha C_\alpha(s)]x^{\alpha-n+l}.$$

En ce cas, pour un l fixé de la suite $1, 2, \dots, n-1$, les relations 1° et 2° de (3) (avec $1 \leq h = n - l \leq n - 1$) sont satisfaites. Pour assurer la satisfaction de la condition 3° de (3), il suffit d'écrire $\Phi_{n-l}(x, s)$ de (8) sous la forme

$$(9)\qquad \Phi_{n-l}(x, s) = (s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}\psi_{n-l}(x, s)$$

avec

$$\psi_{n-l}(x, s) = \frac{\Phi_{n-l}(x, s)}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}} = \int_{C}^{x} \frac{(x-u)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{1}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}}\cdot$$

$$(10)\qquad \cdot\frac{d^l}{ds^l}[(s-a)^n(s-b)^n A_n(u, s)]\,du + (n-l)!\,C_{n-l}(s) +$$

$$+ \sum_{\alpha=n-l+1}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+l+1)}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}}\frac{d^{\alpha-n+l}}{ds^{\alpha-n+l}}[(s-a)^\alpha(s-b)^\alpha C_\alpha(s)]x^{\alpha-n+l}$$

(il va de soi que si $l = 1$, la somme Σ manque). On choisira donc $C_{n-1}(s)$ de telle manière que l'on ait $\psi_{n-1}(x, s) \geq 0$ pour $x, s \in [a, b]$. On fera ensuite en (10) $l = 2$ et on choisira $C_{n-2}(s)$ de telle manière que-avec $C_{n-1}(s)$

déterminée ci-dessus-on ait dans les mêmes conditions $\psi_{n-2}(x, s) \geq 0$. En continuant le procédé on choisit (pour $l = n - 1$ en (1)) $C_1(s)$ de telle manière que l'on ait $\psi_1(x, s) \geq 0$, auquel cas (9) donne la relation 3° de (3) pour $h = n - 1, n - 2, \dots, 1$. Cette relation est satisfaite pour $h = n$, ainsi qu'on l'a fait remarquer à la suite de la relation (5), et pour qu'elle soit satisfaite aussi pour $h = 0$, il suffit-ainsi qu'il résulte de (2) — de prendre en (5) (avec $h = n$), $B_0(s)$ de telle manière que la fonction $p(x, s)$ dans laquelle $B_\alpha(s)(\alpha = \overline{1,\ n-1})$ sont données par (7) avec $C_\alpha(s)(\alpha = \overline{1,\ n-1})$ choisies comme il a été indiqué ci-dessus-soit nonnégative pour $x, s \in [a, b]$. Les relations (3) (et par conséquent aussi (4)) ont donc lieu pour $h = n, n-1, \dots, 0$, ce qui démontre le théorème.

§ 3. On appliquera ce théorème à un cas particulier, notamment au cas où en (5) (avec $h = n$), on a $A_n(u, s) = 1$, $B_0(s) \equiv C_0 =$ Const., et en (7) on a $C_\alpha(s) \equiv C_\alpha =$ Const. $(\alpha = \overline{1,\ n-1})$ et $C = 0$.

En ce cas, on présentera le

THÉORÈME 2. *La fonction*

$$p(x, s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} C_\alpha x^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}[(s-a)^\alpha(s-b)^\alpha] + \frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[(s-a)^n(s-b)^n]$$

dans laquelle les constantes C_α $(\alpha = \overline{0,\ n-1})$ sont données par les relations

$$C_{n-l} = \frac{1}{(n-l)!}\left(\frac{1}{l!}m_{n-l,l} + \sum_{\sigma=1}^{l-1}\frac{(n-l+\sigma)!}{\sigma!}m_{n-l,\sigma}C_{n-l+\sigma}\right)$$

et

$$l = \overline{1,\ n}$$

$$m_{q,\sigma} = -\min_{x,s\in[a,b]}\frac{x^\sigma}{(s-a)^q(s-b)^q}\frac{d^\sigma}{ds^\sigma}[(s-a)^{q+\sigma}(s-b)^{q+\sigma}]$$

$$(0 \leq q \leq n-1;\quad 1 \leq \sigma \leq n-q)$$

jouit de la propriété $P_{[a,\,b]}^{(n)}$.

Démonstration. Dans notre cas le théorème 1 donne

$$(11)\qquad p(x, s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} C_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}[(s-a)^\alpha(s-b)^\alpha]x^\alpha + \frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{ds^n}[(s-a)^n(s-b)^n]$$

$$(12)\qquad \psi_{n-l}(x, s) = (n-l)!\,C_{n-l} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{l-1}\frac{(n-l+\sigma)(n-l+\sigma-1)\dots(\sigma+1)}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}}C_{n-l+\sigma}x^\sigma\frac{d^\sigma}{ds^\sigma}[(s-a)^{n-l+\sigma}(s-b)^{n-l+\sigma}] +$$

$$+ \frac{x^l}{l!(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}}\frac{d^l}{ds^l}[(s-a)^n(s-b)^n].\quad (l = \overline{1,\ n-1}).$$

Il reste, pour obtenir en (11) une solution du problème, à déterminer les constantes C_α $(\alpha = \overline{0,\ n-1})$ de telle manière que — ainsi qu'il est spécifié dans le théorème 1 — on ait en (12)

$$\psi_{n-l}\,(x,\ s) \geqq 0\ (l = \overline{1,\ n-1}) \text{ et en (11) } p(x,\ s) \geqq 0.$$

On pourrait éventuellement tâcher de déterminer les valeurs minimales des constantes C_α $(\alpha = \overline{0,\ n-1})$ qui satisfont à ces inégalités. Dans cette note ce point ne sera pas abordé. On indiquera un système de valeurs (probablement non les moindres) de ces constantes qui satisfont à ces conditions. A cet effet on écrira

$$m_{q,\sigma} = \max_{x,\ s \in [a,\ b]} \frac{-x^\sigma}{(s-a)^q (s-b)^q} \frac{d^\sigma}{ds^\sigma} [(s-a)^{q+\sigma} (s-b)^{q+\sigma}] \tag{13}$$

$$(0 \leqq q \leqq n-1\ ;\ 1 \leqq \sigma \leqq n-q)$$

et on remarquera que conformément au théorème de Rolle $\frac{d^\sigma}{ds^\sigma}[(s-a)^{q+\sigma} \cdot (s-b)^{q+\sigma}]$ possède dans $(a,\ b)$ au moins σ racines d'ordre impair de multiplicité.

Par conséquent

$$m_{q,\sigma} > 0 \quad (0 \leqq q \leqq n-1\ ;\ 1 \leqq \sigma \leqq n-q). \tag{14}$$

On déterminera les constantes $C_{n-l}(l = \overline{1,\ n})$ par la relation

$$C_{n-l} = \frac{1}{(n-l)\,!} \left(\sum_{\sigma=1}^{l-1} \frac{(n-l+\sigma)\,!}{\sigma !} C_{n-l+\sigma}\, m_{n-l,\sigma} + \frac{1}{l\,!}\, m_{n-l,l} \right)^{*)}. \tag{15}$$

En ce cas, on a en (12) $\psi_{n-l}\,(x,\ s) \geqq 0 (l = \overline{1,\ n-1})$, et en (11) $p(x,\ s) \geqq 0$ pour $x,\ s \in [a.\ b]$. La démonstration de cette affirmation est immédiate. Il suffit de remarquer d'une part que (14) et (15) donnent $C_{n-l} > 0$ $(l = \overline{1,\ n-1})$, et dans ce cas (12) donne à l'aide de la relation $\min\limits_{x,\ s \in [a,\ b]} F(x,\ s) = -\max\limits_{x,s \in [a,\ b]} [-F(x,\ s)]$ avec

$$F(x,\ s) = \frac{x^\sigma}{(s-a)^{n-l}(s-b)^{n-l}} \frac{d^\sigma}{ds^\sigma} [(s-a)^{n-l+\sigma}\, (s-b)^{n-l+\sigma}]$$

$$\psi_{n-l}\,(x,\ s) \geqq (n-l)\,!\, C_{n-l} - \sum_{\sigma=1}^{l-1} \frac{(n-l+\sigma)\,!}{\sigma\,!} C_{n-l+\sigma}\, m_{n-l,\sigma} - $$

$$- \frac{1}{l\,!}\, m_{n-l,l} = 0 \quad (l = \overline{1,\ n-1}) \quad .$$

* il est bien entendu qu'au cas $l = 1$, la somme Σ manque

et d'autre part que la relation (14) a évidemment lieu aussi pour $q = 0$ $(1 \leqq \sigma \leqq n)$, auquel cas (11) donne

$$p(x,s) \geqq C_0 - \sum_{\sigma=1}^{n-1} C_\sigma\, m_{0,\sigma} \quad - \frac{1}{n\,!}\, m_{0,n} = 0$$

conformément à (15) (avec $l = n$), ce qui démontre le théorème.

En appliquant la règle de Cramer au système d'équations linéaires (15) aux inconnues $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1}$ on obtient le

THÉORÈME 3. *Le coefficient $C_{n-l}(l = \overline{1,\ n})$ du théorème 2 a l'expression*

$$C_{n-l} = (-1)^{n-l} \frac{D_{n-l}}{(n-l)\,!} \quad (l = \overline{1,\ n}) \tag{16}$$

où D_{n-l} est la valeur du déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(2,\ 1)}{1\,!} & -1 & 0 \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(3,\ 2)}{2\,!} & \frac{(3,\ 1)}{1\,!} & -1 \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ldots & & & & & \\
\frac{(l,\ l-1)}{(l-1)\,!} & \frac{(l,\ l-2)}{(l-2)\,!} & \frac{(l,\ l-3)}{(l-3)\,!} \ldots & \frac{(l,\ l-p)}{(l-p)\,!} & \ldots & \frac{(l,\ 1)}{1\,!} & -1\ 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ldots & & & & & \\
\left\{ \begin{array}{l} \frac{(n-1,\ n-2)}{(n-2)\,!}\ \frac{(n-1,\ n-3)}{(n-3)\,!}\ \frac{(n-1,\ n-4)}{(n-4)\,!} \ldots \frac{(n-1,\ n-p-1)}{(n-p-1)\,!} \ldots \\ \ldots \frac{(n-1,\ n-l)}{(n-l)1\,!}\ \frac{(n-1,\ n-l-1)}{(n-l-1)\,!}\ \frac{(n-1,\ n-l-2)}{(n-l-2)\,!} \ldots \frac{(n-1,\ 1)}{1\,!}\ -1\ 0 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} \frac{(n,\ n,\ -1)}{(n-1)\,!}\ \frac{(n,\ n,\ -2)}{(n-2)\,!}\ \frac{(n,\ n-3)}{(n-3)\,!} \ldots \frac{(n,\ n-p)}{(n-p)\,!} \ldots \\ \ldots \frac{(n,\ n-l+1)}{(n-l+1)\,!}\ \frac{(n,\ n,\ -l)}{(n-l)\,!}\ \frac{(n,\ n-l-1)}{(n-l-1)\,!} \ldots \frac{(n,\ 2)}{2\,!}\ \frac{(n,l)}{1\,!}\ -1^{*)} \end{array} \right.
\end{array} \right| \tag{17}$$

* chaque accolade représente une seule ligne du déterminant

la colonne de rang l par la colonne

$$
\begin{pmatrix}
\frac{(1,\ 1)}{1\,!} \\
-\frac{(2,\ 2)}{2\,!} \\
\frac{(3,\ 3)}{3\,!} \\
\vdots \\
-\frac{(n,\ n)}{n\,!}
\end{pmatrix} \tag{18}
$$

et où on a écrit en (13) pour la commodité

$$(l,\ \sigma) = m_{n-l,\sigma}\ (1 \leq l \leq n\ ;\ 1 \leq \sigma \leq n). \tag{19}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Popoviciu, T., Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynomes d'interpolation. Mathematica (Cluj), **3**, (**26**), 2, 311–329 (1961).

Reçu le 20.IV.1971.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

LES ADRESSES DES AUTEURS

— Martin Balázs, Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj, Str. Kogălniceanu, nr. 1.
— Ștefan N. Berți, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.
— Wolfgang W. Breckner, Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj, Str. Kogălniceanu, nr. 1.
— Gavrilă Goldner, Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj, Str. Kogălniceanu, nr. 1.
— Mihai Jalobeanu, Institutul de izotopi stabili, Cluj, Str. Donath, nr. 59.
— Horst Kramer, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.
— Luciana Lupaș, Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj, Str. Kogălniceanu, nr. 1.
— Alexandru B. Németh, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.
— Ladislau Németi, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.
— Andrei Ney, Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj, Str. Kogălniceanu, nr. 1.
— Ion Păvăloiu, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.
— Dumitru Ripeanu, Institutul de calcul, Cluj, Str. Republicii, nr. 37.

Lei 20.—