REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 2, 1973, pp. 27–35

DUALITÄT BEI OPTIMIERUNGSAUFGABEN IN HALBGEORDNETEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN (II)

von
WOLFGANG W. BRECKNER
(Cluj)

In dieser Arbeit geben wir einige Anwendungen der allgemeinen, im § 3 der Arbeit [2] des Verfassers entwickelten, Dualitätstheorie. Wir zeigen, dass man aus dieser Theorie durch Spezialisierung sowohl eine Dualitätstheorie für konvexe Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen, als auch eine Dualitätstheorie für die verallgemeinerte Fenchelsche Aufgabe erhalten kann. Die benutzten Bezeichnungen sind dabei die gleichen wie in [2].*

1. Dualität bei konvexen Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen

Gegeben seien:

A_1) eine nichtleere konvexe Teilmenge U eines reellen oder komplexen Vektorraumes X,

B_1) ein halbgeordneter topologischer Vektorraum Y,

C_1) ein gerichteter halbgeordneter topologischer Vektorraum $F \neq \{\theta_F\}$ mit $K_{F^*}^+ \neq \emptyset$,

D_1) eine konvexe Abbildung $\varphi : U \to F$,

E_1) eine konkave Abbildung $\pi : U \to Y$,

F_1) ein Element y_0 aus Y.

Im Raum X bilden wir die Menge

$$Z = \{z \in U : y_0 \leqslant \pi(z)\}. \tag{1.1}$$

* Anm. d. Red.: Das Zeichen $\leqq$ aus [2] wurde aus drucktechnischen Gründen durch $\leqslant$ ersetzt.

Als konvexe Optimierungsaufgabe (genauer, konvexe Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen) bezeichnen wir dann das folgende Problem: *ist die Menge Z nicht leer, so bestimme ein $z_0 \in Z$ derart, dass es kein $z \in Z$ mit $\varphi(z) < \varphi(z_0)$ gibt.*

Diese Optimierungsaufgabe ist ein Spezialfall der im Abschnitt 3.1 der Arbeit [2] gestellten primären Optimierungsaufgabe. In der Tat, wählt man in der Formulierung der primären Optimierungsaufgabe $V = y_0 + K_Y$, $W = K_Y$, $\psi(v) = \theta_F$ für alle $v \in V$ und haben X, Y, F, U, φ, π die durch die Voraussetzungen $A_1)-E_1)$ angegebene Bedeutung, so erhält man die konvexe Optimierungsaufgabe und die durch (1.1) definierte Menge Z stellt die Menge der zulässigen Elemente dar. Weiterhin kann man leicht nachprüfen, dass in diesem Spezialfall die Voraussetzungen (i), (ii), (iii), (j) und (jj) aus [2] erfüllt sind.

Um die der konvexen Optimierungsaufgabe entsprechende duale Optimierungsaufgabe aus der Formulierung der dualen Optimierungsaufgabe aus Abschnitt 3.1 von [2] herzuleiten, bemerken wir, dass in diesem Fall $'V = K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ und

$$'\psi(y^*, f^*) = y^*(y_0) \text{ für alle } (y^*, f^*) \in {}'V$$

gilt. Daraus folgt

$$(1.2)\quad Z' = \{(y^*, f^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+ : \sup\{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\} < +\infty\}$$

und dass $f \in F$ genau dann ein Indikator eines Funktionals (y^*, f^*) aus Z' ist, wenn es der Gleichung

$$(1.3)\qquad y^*(y_0) - f^*(f) = \sup\{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\}$$

genügt. Demnach ist $\mathcal{J}$ die Menge jener $f \in F$ für die es mindestens ein $(y^*, f^*) \in Z'$ gibt, so dass die Beziehung (1.3) gilt.

Die zur konvexen Optimierungsaufgabe duale Aufgabe lautet also: *ist die durch (1.2) definierte Menge Z' nicht leer, so bestimme ein $(y_0^*, f_0^*) \in Z'$ das einen Indikator $f_0 \in F$ besitzt, für den es kein $f \in \mathcal{J}$ mit $f_0 < f$ gibt.*

Um die Ergebnisse von § 3 aus [2] für die beiden hier betrachteten Aufgaben spezialisieren zu können, bemerken wir noch, dass die Bedingungen (B_1), (B_4) und (B_5) im vorliegenden Fall folgendermassen lauten:

(S_1B_1) Haben die Mengen

$$(1.4)\quad [U, \varphi] = \{(y, g) \in Y \times F : \exists u \in U \text{ mit } y \leqslant \pi(u),\ \varphi(u) \leqslant g\},$$
$$[V, \psi + f] = \{(y, g) \in Y \times F : y_0 \leqslant y,\ g \leqslant f\}$$

höchstens Randpunkte gemeinsam, wobei f ein Element des Raumes F bezeichnet, dann gibt es ein $(y^*, f^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ mit

$$(1.5)\qquad \sup\{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\} \leqslant y^*(y_0) - f^*(f).$$

(S_1B_4) Ist $[U, \varphi] \cap [V, \psi + f] = \emptyset$, so gibt es ein $(y^*, f^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$, das der Ungleichung (1.5) genügt.

(S_1B_5) Gibt es für jedes $g \in F$, $f < g$, ein $z_g \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z_g)$ und $\varphi(z_g) \leqslant g$, dann gibt es ein $z \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z)$ und $\varphi(z) \leqslant g$ für alle $g \in F$, $f < g$.

Wenden wir nun die Theorie von § 3 aus [2] an (u. zw. Korollar 3.4.3, Korollar 3.4.5, Satz 3.6.2, Satz 3.6.1, Satz 3.4.4 und Satz 3.6.3), so erhalten wir folgende Sätze:

SATZ 1.1. *Bedingung (S_1B_1) sei für alle f aus F erfüllt. Ist $z_0 \in X$ eine Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe, so gibt es ein $(y_0^*, f_0^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ mit*

$$(1.6)\qquad y_0^*(y_0) - f_0^*(\varphi(z_0)) = \sup\{y_0^*(\pi(u)) - f_0^*(\varphi(u)) : u \in U\}.$$

SATZ 1.2. *Gilt für ein $z_0 \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z_0)$ und für ein $(y_0^*, f_0^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^{++}$ Gleichung (1.6), so ist z_0 eine Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe und (y_0^*, f_0^*) eine Lösung der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe.*

SATZ 1.3. *Die Bedingungen (S_1B_4) und (S_1B_5) seien für alle f aus F erfüllt. Ist $(y_0^*, f_0^*) \in Y^* \times F^*$ eine Lösung der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe, dann gibt es ein $z_0 \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z_0)$ das der Gleichung (1.6) genügt.*

SATZ 1.4. *Ist F ein Fundamentalraum, so gelten die folgenden Aussagen:*

1° *Ist Bedingung (S_1B_1) für alle f aus F erfüllt und $z_0 \in X$ eine Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe, so gibt es eine Lösung $(y_0^*, f_0^*) \in Y^* \times F^*$ der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe die der Gleichung (1.6) genügt.*

2° *Gibt es für ein $z_0 \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z_0)$ eine Lösung $(y_0^*, f_0^*) \in Y^* \times F^*$ der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe, so dass (1.6) gilt, dann ist z_0 eine Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe.*

3° *Sind die Bedingungen (S_1B_4) und (S_1B_5) für alle f aus F erfüllt und ist $(y_0^*, f_0^*) \in Y^* \times F^*$ eine Lösung der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe, so gibt es eine Lösung $z_0 \in X$ der konvexen Optimierungsaufgabe für die (1.6) gilt.*

4° *Ist $z_0 \in X$ eine Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe und gilt für $(y_0^*, f_0^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ Gleichung (1.6), so ist (y_0^*, f_0^*) eine Lösung der zu der konvexen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe.*

Beachtet man Hilfssatz 3.5.2 aus [2], so stellt man fest, dass man in den obigen Sätzen die Aussage, dass das Funktional $(y_0^*, f_0^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ der Gleichung (1.6) genügt, durch die folgende, zu ihr äquivalente Aussage, ersetzen kann:

Es gilt

$$L(z_0, y^*) \leqslant L(z_0, y_0^*) \leqslant L(u, y_0^*) \text{ für alle } (u, y^*) \in U \times K_{Y^*},$$

wobei L durch

$$L(u, y^*) = f_0^*(\varphi(u)) - y^*(\pi(u) - y_0) \text{ für alle } (u, y^*) \in U \times K_{Y^*}$$

erklärt ist.

In den folgenden beiden Sätzen geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, dass die Bedingungen (S_1B_1), (S_1B_4) und (S_1B_5) erfüllt werden.

SATZ 1.5. *Besitzt K_F^+ innere Punkte und gibt es ein $u_0 \in U$, so dass $\pi(u_0) - y_0$ innerer Punkt von K_Y ist, dann ist Bedingung (S_1B_1) (also auch (S_1B_4)) für alle f aus F erfüllt.*

Beweis. Weil $\pi(u_0) - y_0$ ein innerer Punkt des Kegels K_Y ist, gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von θ_Y mit $\pi(u_0) - y_0 + \mathcal{U} \subseteq K_Y$. Daraus folgt

$$y_0 \leqslant \pi(u_0) + y \text{ für alle } y \in \mathcal{U}. \tag{1.7}$$

Andererseits gibt es für einen inneren Punkt h_0 des Kegels K_F^+ eine kreisförmige Umgebung $\mathcal{V}$ von θ_F mit $h_0 + \mathcal{V} \subseteq K_F^+$. Daraus folgt

$$-h_0 + g < \theta_F \text{ für alle } g \in \mathcal{V}. \tag{1.8}$$

Aus (1.7) und (1.8) ergibt sich dann

$$(\pi(u_0), -h_0) + \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq \{(y, g) \in Y \times F : y_0 \leqslant y, g \leqslant \theta_F\},$$

d.h. $(\pi(u_0), -h_0)$ ist ein innerer Punkt von $[V, \psi]$. Nach Satz 3.4.5 aus [2] ist dann (S_1B_1) für alle f aus F erfüllt.

SATZ 1.6. *Es sei Y ein halbgeordneter lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $F \neq \{\theta_F\}$ ein gerichteter halbgeordneter lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Gibt es ein $u_0 \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(u_0)$ und ist die durch (1.4) definierte Menge $[U, \varphi]$ abgeschlossen, dann sind die Bedingungen (S_1B_4) und (S_1B_5) für alle f aus F erfüllt.*

Beweis. Es sei f ein Element aus F mit

$$[U, \varphi] \cap [V, \psi + f] = \emptyset. \tag{1.9}$$

Wir zeigen, dass es dann ein $(y^*, f^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$ mit

$$\sup \{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\} < y^*(y_0) - f^*(f) \tag{1.10}$$

gibt.

In der Tat, aus (1.9) folgt, dass (y_0, f) der Menge $[U, \varphi]$ nicht angehört. Da $[U, \varphi]$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge des lokalkonvexen topologischen Vektorraumes $Y \times F$ ist, gibt es nach einem

bekannten Trennungssatz (vgl. KÖTHE G. [9, S. 245]) ein Funktional $t^* \in (Y \times F)^*$ mit

$$\sup \{t^*(t) : t \in [U, \varphi]\} < t^*((y_0, f)). \tag{1.11}$$

Definiert man nun die Funktionale y^* und f^* durch

$$y^*(y) = t^*((y, \theta_F)) \text{ für alle } y \in Y,$$

$$f^*(g) = -t^*((\theta_Y, g)) \text{ für alle } g \in F,$$

so gilt $y^* \in Y^*$, $f^* \in F^*$ und

$$t^*(t) = y^*(y) - f^*(g) \text{ für alle } t = (y, g) \in Y \times F.$$

Ungleichung (1.11) kann man also auch folgendermassen schreiben

$$\sup \{y^*(y) - f^*(g) : (y, g) \in [U, \varphi]\} < y^*(y_0) - f^*(f). \tag{1.12}$$

Nach Hilfssatz 3.4.2 aus [2] ist dann f^* aus K_{F^*}. Um zu beweisen, dass f^* aus $K_{F^*}^+$ ist, bemerken wir, dass sich wegen $(y_0, \pi(u_0)) \in [U, \varphi]$ aus (1.12) die Ungleichung

$$y^*(y_0) - f^*(\varphi(u_0)) < y^*(y_0) - f^*(f)$$

ergibt. Daraus folgt durch Umformen $f^*(\varphi(u_0) - f) < 0$. Der Raum F ist aber gerichtet. Folglich gibt es ein $h \in K_F^+$ mit $\varphi(u_0) - f \leqslant h$, woraus $f^*(h) > 0$ folgt.

Ist y ein Element des Kegels K_Y, so gilt

$$(\pi(u_0) - ny, \varphi(u_0)) \in [U, \varphi] \text{ für alle } n \in N.$$

Wegen (1.12) ist dann

$$y^*(\pi(u_0) - ny) - f^*(\varphi(u_0)) < \alpha \text{ für alle } n \in N,$$

wobei $\alpha = y^*(y_0) - f^*(f)$ gesetzt wurde. Daraus ergibt sich durch Umformen

$$n^{-1}[y^*(\pi(u_0)) - f^*(\varphi(u_0)) - \alpha] \leqslant y^*(y) \text{ für alle } n \in N.$$

Für $n \to \infty$ hat die linke Seite dieser Ungleichung den Grenzwert Null. Demnach gilt $y^*(y) \geqslant 0$. Da $y \in K_Y$ beliebig gewählt war, ist y^* aus K_{Y^*}.

Beachtet man nun, dass $(\pi(u), \varphi(u))$ für alle $u \in U$ aus $[U, \varphi]$ ist, so ergibt sich aus (1.12) die Ungleichung (1.10). Folglich ist Bedingung (S_1B_4) erfüllt.

Im folgenden sei nun f ein Element aus F mit der Eigenschaft, dass es für jedes $g \in F$, $f < g$, ein $z_g \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z_g)$ und $\varphi(z_g) \leqslant g$ gibt. Wir beweisen, dass dann

$$[U, \varphi] \cap [V, \psi + f] \neq \emptyset \tag{1.13}$$

gilt. Dazu machen wir die Annahme es gelte (1.9). Nach dem vorhin Bewiesenen gibt es dann ein $(y^*, f^*) \in K_{Y^*} \times K_{F^*}^+$, das der Ungleichung (1.10) genügt. Setzen wir nun

$$f_n = f + 2^{1-n}(f_1 - f) \text{ für alle } n \in N,$$

wobei $f_1 \in K_F^+$ so gewählt wurde, dass $f < f_1$ gilt, dann ist

$$\lim_{n \to \infty} (y^*(y_0) - f^*(f_n)) = y^*(y_0) - f^*(f).$$

Wegen (1.10) gibt es dann ein $n_0 \in N$ mit

$$y^*(y_0) - f^*(f_{n_0}) > \beta, \tag{1.14}$$

wobei zur Abkürzung

$$\beta = \sup \{y^*(\pi(u)) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\}$$

gesetzt wurde.

Beachtet man nun andererseits, dass es wegen $f < f_{n_0}$ ein $z_{f_{n_0}} \in U$ mit

$$y_0 \leqslant \pi(z_{f_{n_0}}) \quad \text{und} \quad \varphi(z_{f_{n_0}}) \leqslant f_{n_0}$$

gibt, so folgt

$$y^*(y_0) - f^*(f_{n_0}) \leqslant y^*(\pi(z_{f_{n_0}})) - f^*(\varphi(z_{f_{n_0}})) \leqslant \beta$$

im Widerspruch zu (1.14).

Demnach gilt (1.13). Daraus folgt die Existenz eines Elementes $z \in U$ mit $y_0 \leqslant \pi(z)$ und $\varphi(z) \leqslant f$. Dann ist aber $\varphi(z) \leqslant g$ für alle $g \in F$, $f < g$. Mit anderen Worten, Bedingung (S_1B_5) ist erfüllt.

Beachtet man diese beiden Sätze, so bemerkt man, dass die Sätze 1.1—1.4 nicht nur die bisher bekannten Dualitätsaussagen für konvexe

Optimierungsaufgaben in endlichdimensionalen Vektorräumen (vgl. COLLATZ L., WETTERLING W. [5, S. 106—107], KARLIN S. [8, S. 201, 239]) verallgemeinern und ergänzen, sondern auch diejenigen für konvexe Optimierungsaufgaben in beliebigen halbgeordneten topologischen Vektorräumen (vgl. ARROW K. J., HURWICZ L., UZAWA H. [1, S. 86, 89], BRECKNER W. W., KOLUMBÁN I. [3], KRABS W. [10]).

2. Eine Verallgemeinerung der Fenchelschen Dualitätstheorie

Gegeben seien:

$A_2)$ zwei nichtleere konvexe Teilmengen U und V eines reellen topologischen Vektorraumes Y,

$B_2)$ ein gerichteter halbgeordneter topologischer Vektorraum $F \neq \{\theta_F\}$ mit $K_{F^*}^+ \neq \emptyset$,

$C_2)$ eine konvexe Abbildung $\varphi : U \to F$,

$D_2)$ eine konkave Abbildung $\psi : V \to F$.

Als verallgemeinerte Fenchelsche Aufgabe bezeichnen wir dann das folgende Problem: *ist die Menge* $U \cap V$ *nicht leer, so bestimme ein* $z_0 \in U \cap V$ *derart, dass es kein* $z \in U \cap V$ *mit*

$$\varphi(z) - \psi(z) < \varphi(z_0) - \psi(z_0)$$

gibt.

Man bemerkt sofort, dass auch diese Optimierungsaufgabe ein Spezialfall der im Abschnitt 3.1 der Arbeit [2] gestellten primären Optimierungsaufgabe ist. In der Tat, wählt man in der Formulierung der primären Optimierungsaufgabe $X = Y$, $W = \{\theta_Y\}$, $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$ und haben $Y, F, U, V, \varphi, \psi$ die durch die Voraussetzungen $A_2)-D_2)$ angegebene Bedeutung, so erhält man die verallgemeinerte Fenchelsche Aufgabe und $U \cap V$ ist die Menge der zulässigen Elemente. Weiterhin kann man leicht feststellen, dass in diesem Spezialfall die Voraussetzungen (i), (ii), (iii), (j) und (jj) aus [2] erfüllt sind.

Um die der verallgemeinerten Fenchelschen Aufgabe entsprechende duale Optimierungsaufgabe aus der Formulierung der dualen Optimierungsaufgabe aus Abschnitt 3.1 von [2] herzuleiten, bemerken wir, dass im vorliegenden Fall die Mengen U' und $'V$ durch

$$U' = \{(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+ : \sup \{y^*(u) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\} < +\infty\}, \tag{2.1}$$

$$'V = \{(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+ : \inf \{y^*(v) - f^*(\psi(v)) : v \in V\} > -\infty\} \tag{2.2}$$

definiert sind. Ein Element $f \in F$ ist genau dann ein Indikator eines Funktionals (y^*, f^*) aus $U' \cap {}'V$, wenn es der Gleichung

$$f^*(f) = {}'\psi(y^*, f^*) - \varphi'(y^*, f^*) \tag{2.3}$$

genügt, wobei

$$\varphi'(y^*, f^*) = \sup \{y^*(u) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\},$$
$$'\psi(y^*, f^*) = \inf \{y^*(v) - f^*(\psi(v)) : v \in V\}$$

gesetzt wurde. Demnach ist $\mathcal{J}$ die Menge jener $f \in F$ für die es mindestens ein $(y^*, f^*) \in U' \cap 'V$ gibt, so dass die Beziehung (2.3) gilt.

Die zur verallgemeinerten Fenchelschen Aufgabe duale Optimierungsaufgabe lautet also: *ist die Menge* $U' \cap 'V$ *nicht leer, wobei* U', $'V$ *durch* (2.1), (2.2) *definiert sind, so bestimme ein* $(y_0^*, f_0^*) \in U' \cap 'V$ *das einen Indikator* $f_0 \in F$ *besitzt, für den es kein* $f \in \mathcal{J}$ *mit* $f_0 < f$ *gibt.*

Da nun das Spezialisieren der Ergebnisse des § 3 aus [2] für die verallgemeinerte Fenchelsche Aufgabe und deren duale Optimierungsaufgabe keinerlei Schwierigkeiten bereitet, gehen wir darauf nicht näher ein. Wir bemerken nur, dass die Bedingungen (B_1), (B_4) und (B_5) im vorliegenden Fall folgendermassen lauten:

(S_2B_1) Haben die Mengen

$$[U, \varphi] = \{(u, g) \in U \times F : \varphi(u) \leqslant g\},$$
$$[V, \psi + f] = \{(v, g) \in V \times F : g \leqslant \psi(v) + f\}$$

höchstens Randpunkte gemeinsam, wobei f ein Element des Raumes F bezeichnet, dann gibt es ein $(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+$ mit

$$\text{(2.4)} \quad \sup \{y^*(u) - f^*(\varphi(u)) : u \in U\} \leqslant \inf \{y^*(v) - f^*(\psi(v)) : v \in V\} - f^*(f).$$

(S_2B_4) Ist $[U, \varphi] \cap [V, \psi + f] = \emptyset$, so gibt es ein $(y^*, f^*) \in Y^* \times K_{F^*}^+$ das der Ungleichung (2.4) genügt.

(S_2B_5) Gibt es für jedes $g \in F$, $f < g$, ein $z_g \in U \cap V$ mit $\varphi(z_g) - \psi(z_g) \leqslant g$, dann gibt es ein $z \in U \cap V$, so dass $\varphi(z) - \psi(z) \leqslant g$ für alle $g \in F$, $f < g$ gilt.

Wie im Fall der konvexen Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen lässt sich auch hier eine einfache Bedingung dafür angeben, dass Bedingung (S_2B_1) (also auch (S_2B_4)) für alle $f \in F$ erfüllt wird. Um diese zu erhalten, geben wir zunächst

Definition 2.1. *Es sei* m_0 *ein innerer Punkt einer Teilmenge* M *von* Y. *Eine Abbildung* $P : M \to F$ *heisst an der Stelle* m_0 *nach oben beschränkt, wenn es eine Umgebung* $\mathfrak{U}$ *von* θ_Y *und ein Element* $h \in F$ *gibt, so dass* $m_0 + \mathfrak{U} \subseteq M$ *und* $P(m_0 + m) \leqslant h$ *für alle* $m \in \mathfrak{U}$ *gilt.*

Es gilt dann

SATZ 2.1. *Das Innere des Kegels* K_F^+ *sei nicht leer. Gibt es ein* $m_0 \in U \cap V$, *das innerer Punkt von* U *(bzw. von* V*) ist und ist die Abbildung* φ *(bzw.* $-\psi$*) an dieser Stelle nach oben beschränkt, so ist Bedingung* (S_2B_1) *für alle* $f \in F$ *erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen an m_0 sei ein innerer Punkt von U und φ an dieser Stelle nach oben beschränkt. Nach Definition 2.1 gibt es dann eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von θ_Y und ein $h \in F$, so dass $m_0 + \mathfrak{U} \subseteq U$ und $\varphi(m_0 + m) \leqslant h$ für alle $m \in \mathfrak{U}$ gilt.

Andererseits gibt es für einen inneren Punkt h_0 des Kegels K_F^+ eine Umgebung $\mathfrak{V}$ von θ_F mit $h_0 + \mathfrak{V} \subseteq K_F^+$. Dann ist

$$(m_0, h + h_0) + \mathfrak{U} \times \mathfrak{V} \subseteq \{(u, g) \in U \times F : \varphi(u) \leqslant g\},$$

d. h. Int $([U, \varphi]) \cap (V \times F)$ ist nicht leer. Nach Satz 3.4.5 aus [2] gilt also (S_2B_1) für alle $f \in F$.

Wir bemerken, dass die verallgemeinerte Fenchelsche Aufgabe für archimedische halbgeordnete topologische Vektorräume F mit Int $(K_F^+) \neq \emptyset$ erstmals von BRECKNER W. W. und KOLUMBÁN I. [4] untersucht wurde, die in ihrer Arbeit die Ergebnisse von FENCHEL W. [7], ROCKAFELLAR R. T. [11] und DIETER U. [6] verallgemeinerten.

LITERATUR

[1] Arrow, K. J., Hurwicz, L., Uzawa, H., *Studies in linear and non-linear programming.* Stanford: Stanford University Press 1958.

[2] Breckner, W. W., *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen* (I). Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation **1**, 5–35 (1972).

[3] Breckner, W. W., Kolumbán, I., *Dualität bei Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen.* Mathematica **10** (**33**), 229–244 (1968).

[4] — , *Konvexe Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen.* Math. Scand. **25**, 227–247 (1969).

[5] Collatz, L., Wetterling, W., *Optimierungsaufgaben.* 2. Auflage. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1971.

[6] Dieter, U., *Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen. I: Dualitätstheorie.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 89–117 (1966).

[7] Fenchel, W., *Convex cones, sets and functions.* Lecture notes. Princeton University 1953.

[8] Karlin, S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics.* I. London–Paris: Pergamon Press 1959.

[9] Köthe, G., *Topologische lineare Räume.* I. 2. Auflage. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1966.

[10] Krabs, W., *Lineare Optimierung in halbgeordneten Vektorräumen.* Numer. Math. **11**, 220–231 (1968).

[11] Rockafellar, R. T., *Extension of Fenchel's duality theory for convex functions.* Duke Math. J. **33**, 81–89 (1966).

Eingegangen am 6. XII. 1972.

Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză.