REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 2, 1973, pp. 69—88

AMÉLIORATIONS CONCERNANT LA PROGRAMMATION TEMPORELLE DE LA FABRICATION EN SÉRIE

par

L. NÉMETI

(Cluj)

1. Introduction

Dans cet ouvrage, on présentera quelques considérations constituant certaines améliorations des résultats obtenus par l'auteur dans les ouvrages [9], [10] (voir aussi [8]).

Une première notion à analyser sera celle de la période de la fabrication. Nous entendons par fabrication en série une fabrication périodique où des ensembles de diverses tâches technologiques, tâches de fabrication, vont être réalisés. Les ensembles sont identiques entre eux, ils forment une suite (temporelle). La distance temporelle entre les commencements (ou bien entre les achèvements) de deux ensembles de tâches consécutifs de la suite donne justement la durée de la période. Soit donné (élaboré) un programme de fabrication d'un des ensembles de tâches mentionnées ci-dessus. Celui-ci peut être representé le mieux par un diagramme Gantt (v. fig. 1). L'élaboration d'un tel programme est un problème de programmation temporelle de la fabrication (dit aussi l'ordonnancement des tâches, le problème de l'atelier).

Sur la figure, on a réservé à chaque machine à façonner un axe (axe du temps) et les tâches à réaliser sont indiquées par des segments (épaissis sur l'axe correspondant).

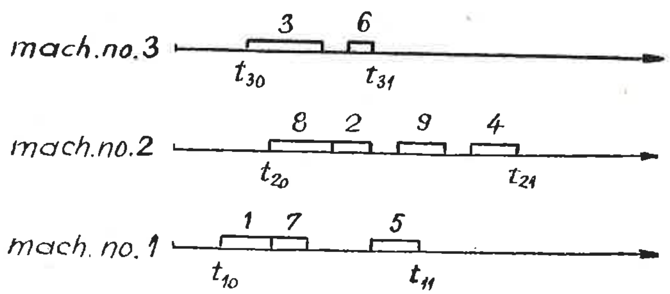

Fig. 1

Dans ce programme, chaque machine possède un intervalle temporel de fonctionnement ; les longueurs (durées) de ces intervalles sont :

pour la machine no 1 : $d_1 = t_{11} - t_{10}$
pour la machine no 2 : $d_2 = t_{21} - t_{20}$
pour la machine no 3 : $d_3 = t_{31} - t_{30}$

On désignera par

$d = \max\,(d_1, d_2, d_3)$ ou plus généralement

(1.1) $$d = \max_k d_k$$

où d_k désigne la durée de l'intervalle de fonctionnement de la machine n° k et la valeur de d indique la durée de la période de fabrication, puisqu'après le déroulement de cette durée (calculée du moment de départ de chaque machine, c'est-à-dire de t_{10} respectivement de t_{20} resp. de t_{30} etc.), le processus de fabrication peut être recommencé en réalisant l'ensemble de tâches suivant.

Une autre notion, c'est le cycle de fabrication. Sa durée est

$$\delta = \max\,(t_{11}, t_{21}, t_{31}) - \min\,(t_{10}, t_{20}, t_{30})$$

c'est-à-dire la durée de l'intervalle temporel pendant lequel la réalisation d'un ensemble de tâche a lieu.

On a

(1.2) $$\delta \geqslant d.$$

Si la durée de la période diminue, cela veut dire que la production en un intervalle fixé (par ex. en un an) croît et les réalisations valoriques

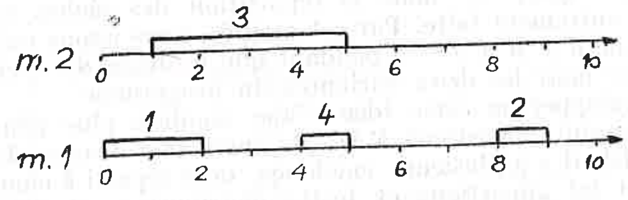

Fig. 2

de l'entreprise (par ex. les revenus nets) croissent aussi. Si la durée du cycle de fabrication diminue, cela veut dire que les fonds pour les produits „en cours" sont immobilisés pour une durée plus courte, les frais afférents à cette immobilisation (intérêts) diminuent aussi, ce qui équivaut du point de vue économique à une croissance des revenus. En conclusion, on demandera que les deux durées soient minimales.

À propos de ces remarques, on devra reviser la définition de la durée de la période donnée par la formule (1.1). En effet, il y a des cas où l'on peut réduire cette durée au dessous de la valeur indiquée par cette formule.

Considérons le programme de fabrication représenté dans la figure 2. La machine n° 1 fonctionne dans les intervalles [0,2[, [4,5[et [8,9[et la machine n° 2 dans [1,5[. Supposons que les pauses dans le fonctionnement de la machine n° 1 sont conditionnées par des causes technologiques. Par exemple, la tâche n° 4 ne peut pas être commencée avant le moment $t = 4$, car la tâche précédente (qui est réalisée sur une autre machine qui n'est pas indiquée dans le diagramme afin de ne pas compliquer la représentation) vient d'être terminée seulement à ce moment. Conformément à la définition (1.1), la durée de la période serait $d = 9$. Mais cette période peut être raccourcie de la manière suivante (voir fig. 3).

On peut placer la tâche n° 2 dans l'intervalle vide [2,4[bien entendu pas pour l'ensemble de tâches n° 1, dont la réalisation est représentée dans la figure 2, mais pour l'ensemble précédent, celui avec le n° 0. Dans la figure 3, on a représenté deux périodes consécutives ; on y voit la réalisation intégrale de l'ensemble de tâches n° 1 et des parties des ensembles n° 0 et n° 2, la durée de la période étant cette fois égale à 5 (au lieu de 9) unités de temps. Comme on peut le constater, les cycles de fabrication ne sont plus disjoints mais ils se recouvrent partiellement. En fait, le programme de la figure n° 3 est en essence identique au pro-

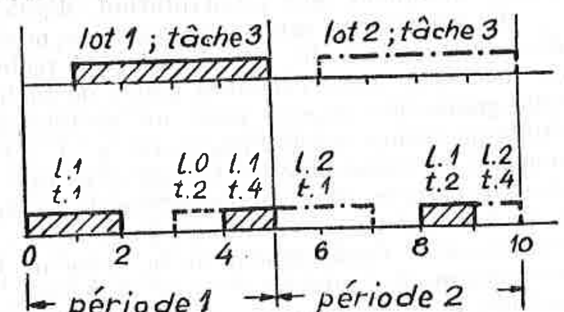

Fig. 3

gramme de la figure 2, mais la répartition des tâches sur les divers ensembles est autrement faite. Par cet artifice, nous avons réduit la durée de la période de $d = 9$ à $d = 5$ pendant que la durée du cycle $\delta = 9$ est restée la même pour les deux variantes du programme.

Nous développerons cette idée d'une manière plus générale (l'idée du schéma qui suit appartient à M. B. Sussmann, maître de recherches à SEMA, Paris). Il y a plusieurs machines, on a réparti à chaque machine des tâches qui lui appartiennent (cette distribution est déterminée par le procédé technologique adopté). Pour chaque tâche, on en connaît la durée d'exécution. Il y a des paires de tâches (les deux tâches appartiennent en général à des machines différentes) pour lesquelles on donne une relation de succession technologique : la deuxième tâche ne peut être commencée qu'après l'achèvement de la première. On peut déterminer pour chaque machine la durée minimale nécessaire pour la réalisation de toutes les tâches qui y sont réparties. Cette durée T_k (pour la machine n° k) est égale à la somme des durées d'exécution des tâches réparties à la machine n° k. La durée minimale de la période est alors évidemment

(1.3)
$$d = \max_k T_k$$

ce qui remplace la formule (1.1).

On peut construire un programme qui réalise cette durée d (1.3) de la manière suivante :

Dans le diagramme Gantt, l'axe des temps pour chaque machine sera divisé en des périodes de durée d (l'origine arbitraire de ces périodes sera la même pour toutes les machines, voir fig. n° 4). Dans une période quelconque (par ex. dans celle n° 1), on fixera, dans un ordre arbitraire, toutes les tâches — chacune sur la machine à laquelle elle appartient. La seule restriction est que les intervalles d'exécution des tâches appartenant à la même machine, soient disjoints. Les longueurs des segments représentant les tâches seront proportionnelles aux durées correspondantes.

Sur la figure, c'est la machine n° 1 qui est la plus chargée, c'est elle qui détermine la durée d de la période. Les nombres sur les segments des tâches indiquent leur numérotation, d'ailleurs arbitraire.

Ce programme sera transposé, sans modifications, aux autres périodes. Nous avons déjà dit, que le procédé technologique établit des relations de succession entre certaines paires de tâches. Soit par exemple (1,6) une telle paire. On tracera alors un vecteur de succession de l'extrémité à droite (achèvement) de l'intervalle n° 1 à l'extrémité à gauche (commencement) de l'intervalle n° 6. Soit (6,8) une autre paire de cette sorte. Ici, dans la période n° 1, la réalisation de la tâche no 8 commence avant que la tâche no 6 ne soit terminée. Pour cette raison, le vecteur de succession sera tracé de l'achèvement de la tâche n° 6 de la période n° 1 au commencement de la tâche n° 8 *de la période* n° 2 ; l'intervalle n° 8 de la période n° 1 appartiendra à l'ensemble de tâches qui précède l'ensemble n° 1, étudié.

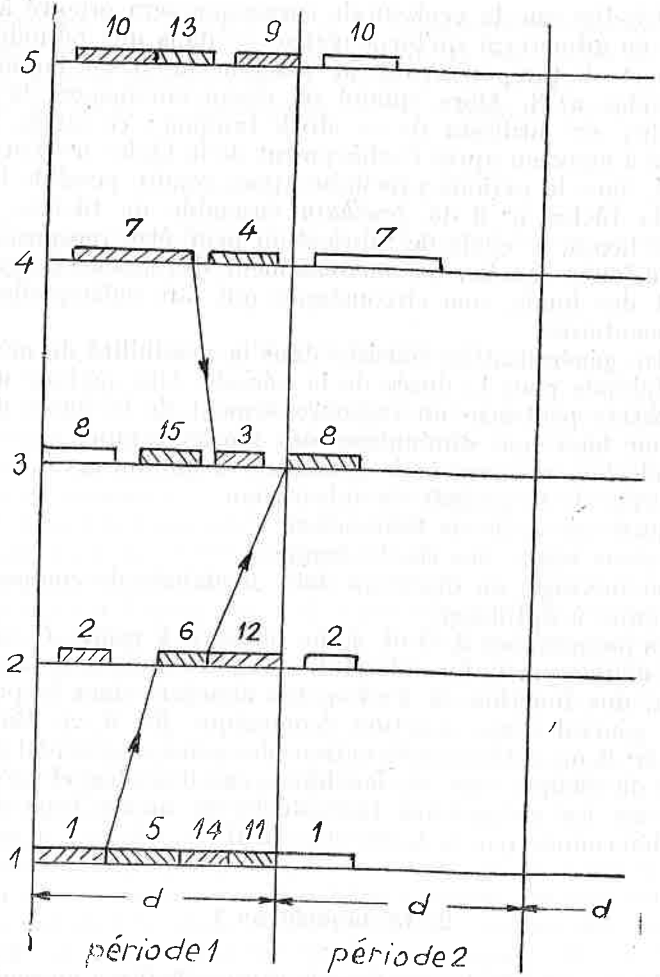

Fig. 4

En procédant de cette manière pour toutes les paires de tâches liées par des relations technologiques de succession, on établira le programme de fabrication, avec une durée minimale de la période de fabrication d. Le cycle de fabrication dure de la période n° 1 jusqu'à la dernière période n chez laquelle on constate encore l'existence de vecteurs de succession entre deux tâches appartenant à l'ensemble n° 1 de tâches. Cette durée δ dépend de l'ordre choisi des tâches sur les diverses machines. On cherche précisément l'ordre optimal des tâches qui minimise la durée δ du cycle de fabrication.

Cette méthode est susceptible de diverses généralisations. D'abord, une paire de tâches comme (6,8) peut être programmée dans la même période, c'est-à-dire que le vecteur de succession sera orienté à gauche et non à droite en admettant qu'on a réalisé — dans une période de préparation — un stock tampon avant la machine n° 3 sur laquelle on doit réaliser la tâche n° 8. Alors, quand on devra commencer la réalisation de cette tâche, on utilisera de ce stock tampon ; ce stock, consommé, sera complété à nouveau après l'achèvement de la tâche n° 6 et il attendra d'être utilisé, dans la période prochaine, pour rendre possible le commencement de la tâche n° 8 du *prochain* ensemble de tâches.

De cette façon, le cycle de fabrication peut être raccourci, lui aussi, mais on aura, en revanche, un accroissement des stocks tampon lesquels immobilisent des fonds, une circonstance qui fait naître, elle aussi, des frais supplémentaires.

Une autre généralisation consiste dans la possibilité de ne pas choisir la valeur minimale pour la durée de la période. Une période un peu plus longue permettra peut-être un raccourcissement de la durée du cycle de fabrication ou bien une diminution des stocks tampon.

En conclusion, on aura trois grandeurs à minimiser :

d : la durée de la période de fabrication

δ : la durée du cycle de fabrication

σ : la valeur totale des stocks tampon.

Dans cet ouvrage, on discutera deux modalités de composer la fonction économique à optimiser.

Dans les paragraphes 2, 3 et 4, on choisira à priori $d = d_{\min}$ où $d_{\min}$ est la durée définie par la formule (1.3) et on demandera de minimiser une combinaison, une fonction de δ et σ. On abordera dans le paragraphe 5 le cas plus général d'une fonction économique $f(d, \delta, \sigma)$. Enfin dans le paragraphe n° 6, on étudiera la situation plus générale quand il y a plusieurs exemplaires du chaque type de machines, cas dans lequel la distribution des tâches sur les exemplaires individuels du même type de machines n'est plus déterminée par la technologie utilisée.

2. Le modèle n° 1

Ce modèle représente la situation dans laquelle il y a un seul exemplaire de chaque type de machines et dans laquelle on donne une priorité absolue à la réduction de la durée de la période de fabrication par rapport à la diminution des frais liés à l'immobilisation des fonds circulants (des „en cours").

On fixe donc la durée de la période égale à la quantité d donnée par la formule (1.3). Les tâches à réaliser (on peut appeler *opération* l'action de réaliser une tâche) sont numérotées, d'ailleurs arbitrairement, de 1 à n. Ces nombres forment l'ensemble

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

représentant l'ensemble des opérations.

Désignons par $H = \{i, j)\} \subset N \times N$ l'ensemble des paires (ordonnées) de tâches entre lesquelles il y a une relation de succession technologique ; la relation $(i, j) \in H$ affirme que la tâche j est successeur technologique immédiat de la tâche i. L'ensemble H est antisymmétrique en ce sens qu'on a

$$(i, j) \in H \Rightarrow (j, i) \notin H. \tag{2.2}$$

Désignons par $J = \{(i, j)\} \subset N \times N$ l'ensemble des paires de tâches qui vont être réalisées sur la même machine. L'ensemble J est symmétrique en ce sens qu'on a

$$(i, j) \in J \Leftrightarrow (j, i) \in J. \tag{2.3}$$

Afin de simplifier nos considérations, nous choisirons la durée d fixée par (1.3) comme unité de temps. Le moment du commencement de l'opération i sera désigné par x_i. Si l'opération i commence au moment x_i, alors il y a aussi une opération i (appartenant bienentendu à un autre ensemble de tâches, différent de l'ensemble étudié) dont le moment de commencement est $x_i + k$, où k est un entier quelconque. Afin de fixer le lieu précis des tâches, on numérotera les ensembles successifs de tâches et on précisera que x_i appartient à l'opération i de *l'ensemble* n° 1 de tâches.

La partie entière de x_i : $n_i = [x_i]$ précise la *période* dans laquelle l'opération i commence ; la partie fractionnaire de x_i : $\xi_i = \{x_i\}$ précise la place du moment de commencement de l'opération i, dans l'intérieur de la période.

On se donne le temps d'exécution t_i de l'opération i, t_i étant un nombre positif plus petit que l'unité (avec l'échelle de temps choisie). On suppose qu'une opération une fois commencée, elle ne sera plus interrompue jusqu'à son achèvement complet.

On suppose encore qu'une machine exécute en un moment donné une opération au plus et qu'une opération sera exécutée sur une seule machine.

On fera encore une simplification. On fera abstraction du temps de réglage (temps de préparation) des machines nécessaire en vue du commencement d'une opération et aussi du temps de manipulation (contrôle, transport etc.) après l'achèvement de l'opération (voir [8], [9], [11]). Ces simplifications sont d'ailleurs insignifiantes.

D'autres inconnues sont :

$$s_i, \quad i \in N'$$

qui indiquent la grandeur du stock tampon préparé à l'avance pour assurer l'exécution ininterrompue de l'opération i. L'unité de mesure est ici la quantité des produits (par ex. le lot de pièces à façonner) soumis à l'exécution de l'opération respective. $N' \subset N$ est le sous-ensemble des tâches qui possèdent des précédents technologiques :

$$N' = \{j \mid (i, j) \in H\}. \tag{2.4}$$

Les grandeurs s_i sont par définition positives:

(2.5) $$s_i \geqslant 0, \qquad i \in N'.$$

On désigne encore par

(2.6) $$\delta = n_0 + \xi_0$$

(n_0: entier, $0 \leqslant \xi_0 < 2$). Cette formule doit être interprétée comme suit: δ est la distance temporelle du moment initial de la première opération de l'ensemble n° 1 de tâches ($t_0 = 0$) jusqu'au moment (t_u) de l'achèvement de la dernière opération ($\delta = t_u - t_0 = t_u$). Cette dernière opération commence dans la période n° n_0. Toutes les opérations de l'ensemble n° 1 des tâches qui commencent dans cette période n_0 forment la classe des *dernières opérations* de l'ensemble considéré.

En ce qui concerne la grandeur s_i du stock tampon, on introduira une restriction qui d'une part simplifiera beaucoup les calculs et qui d'autre part approximera mieux la situation réelle.

Jusqu'ici les grandeurs s_i n'étaient soumises qu'aux conditions (2.5). Mais il est évident que des valeurs $s_i > 1$ n'ont aucune justification technico-économique. De même, un stock tampon $0 < s_i < 1$ est inefficace. En effet, si on a $s_i < 1$, alors ce stock n'assurera pas nécessairement le déroulement ininterrompu de l'opération i, car il pourrait arriver que le stock s'épuise et l'opération k $((k, i) \in H)$ ne soit pas encore terminée. On n'admettra donc pour s que les valeurs 0 ou 1.

Après ces considérations préliminaires, nous passons à la construction du modèle mathématique de notre problème. Les inconnues en sont:

$$n_i, \ \xi_i, \quad i \in N$$

$$s_i, \quad i \in N'$$

de même que

$$n_0 \text{ et } \xi_0$$

et elles doivent minimiser la fonction économique

(2.7) $$z = n_0 + \xi_0 + \sum_{i \in N'} \alpha_i s_i$$

avec les coefficients positifs α_i donnés. La justification de cette forme résultera du paragraphe 4.

Les inconnues sont soumises aux restrictions suivantes:

(2.8a)	$n_i \geqslant 0$, entier,	$i \in N$
(2.8b)	$0 \leqslant \xi_i < 1,$	$i \in N$
(2.8c)	$s_i \geqslant 0,$	$i \in N'$
(2.8d)	$n_0 - n_i \geqslant 0,$	$i \in N$
(2.8e)	$\xi_0 - \xi_i \geqslant t_i,$	$i \in N^0,$
(2.8f)	$\xi_0 - \xi_i \geqslant t_i - 1,$	$i \in N^1.$

On a désigné ici par

(2.9) $$\begin{cases} N^0 = \{i \mid n_i = n_0\} \subset N \\ N^1 = \{i \mid n_i = n_0 - 1\} \subset N \end{cases}$$

les classes des dernières opérations.[2]

En dehors de ces restrictions, on doit encore formuler deux conditions essentielles. La première s'appelle la restriction de la continuité et elle exprime les conditions dans lesquelles le déroulement ininterrompu des opérations est assuré. On doit avoir donc une relation entre les inconnues n, ξ, s d'une paire d'opérations $(i, j) \in H$.

Le modèle doit contenir quatre situations typiques (voir fig. 5):

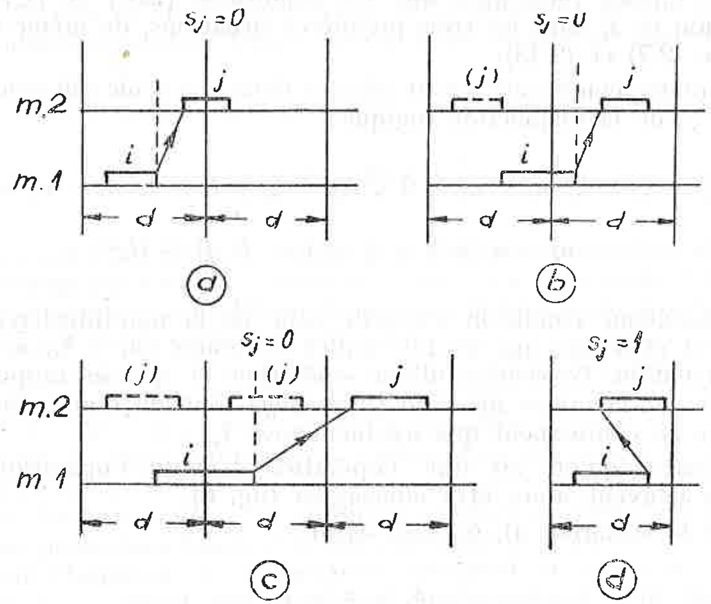

Fig. 5

[2] Ces ensembles ne sont pas donnés en préalable; ils sont déterminés par la solution du problème.

La situation a) est caractérisée par les conditions

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_j - \xi_i \geqslant t\\ n_j - n_i \geqslant 0\,;\end{array}\right. \tag{2.10}$$

la situation b) par

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_j - \xi_i \geqslant t_i - 1\\ n_j - n_i \geqslant 1\,;\end{array}\right. \tag{2.11}$$

la situation c) par

$$n_j - n_i \geqslant 2\,; \tag{2.12}$$

enfin la situation d) par

$$s_j \geqslant 1. \tag{2.13}$$

Nous faisons remarquer que les conditions (2.8c) et (2.7) assurent l'annulation de s_j dans les trois premières situations, de même que $s_j = 1$ résulte de (2.7) et (2.13).

Ces quatre conditions seront réunies dans une seule qui contient aussi la signe $\vee$ de la disjonction logique:

$$\xi_j - \xi_i \geqslant t_i,\ n_j - n_i \geqslant 0 \vee \xi_j - \xi_i \geqslant t_i - 1,\ n_j - n_i \geqslant 1 \vee$$
$$n_j - n_i \geqslant 2 \vee s_j \geqslant 1, \quad (i, j) \in H.^{3)} \tag{2.14}$$

La deuxième condition s'appelle celle de la non-interférence ou du chargement et assure que les intervalles de temps $[n_i + \xi_i,\ n_i + \xi_i + t_i[$ qui représentent l'exécution d'une opération et qui se rapportent aux opérations sur la même machine ($(i, j) \in J$) sont disjoints. En fait, ces conditions ne contiennent que les inconnues ξ_i.

Supposons qu'on ait fixé l'opération i avant l'opération j. Deux situations peuvent alors être envisagées (fig. 6).

Dans la situation a), on doit avoir

$$\xi_j \geqslant \xi_i + t_i. \tag{2.15}$$

[3] La virgule qui intervient à l'interieur d'un terme de la disjonction, signifie comme d'habitude la conjonction logique.

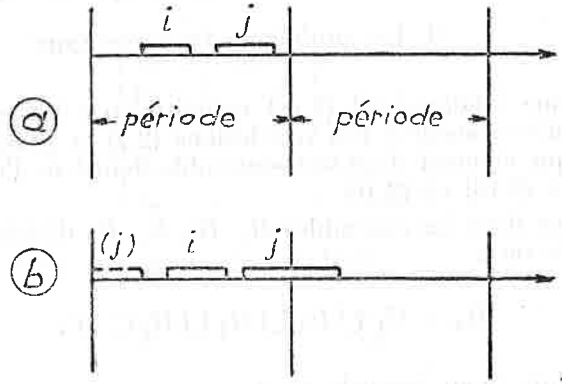

Fig. 6

Dans la situation b), aux conditions (2.15) s'ajoute la restriction

$$\xi_j + t_j - 1 \leqslant \xi_i, \tag{2.16}$$

condition vérifiée d'ailleurs aussi dans la situation a). En tenant compte de la possibilité d'inverser l'ordre de i et j, les conditions cherchées seront

$$\xi_j - \xi_i \geqslant t_i,\ \xi_i - \xi_j \geqslant t_j - 1 \vee \xi_i - \xi_j \geqslant t_j,\ \xi_j - \xi_i \geqslant t_i - 1,$$
$$[i, j] \in J.^{4} \tag{2.17}$$

Les formules (2.7) (2.8), (2.14) (2.17) constituent conjointement le modèle n° 1 de l'ordonnancement des opérations dans le cas de la production en série; ce modèle constitue un problème de programmation linéaire avec des conditions logiques (disjonctions).

Pour la résolution d'un problème d'un tel type on utilise le procédé bien connu Branch and Bound (respectivement S.E.P. resp. l'algorithme de RADÓ [3], [5], [15], [16]). Il serait superflu, à notre avis, de décrire ici cette méthode, nous mentionnons seulement qu'elle revient à la résolution d'une suite de problèmes de programmations „ordinaires" dénommés problèmes fondamentaux du problème considéré. Dans le paragraphe suivant, on présentera l'énoncé de ces problèmes fondamentaux, les méthodes de leur résolution et on montrera comment de nouveaux problèmes fondamentaux résultent des problèmes fondamentaux déjà résolus.

[4] Dans cette formule, les paires $[i, j]$ sont non-ordonnées, c'est-à-dire que les paires (i, j) et (j, i) se confondent.

3. Les problèmes fondamentaux

Un problème fondamental Q est constitué par les conditions ,,ordinaires'' du modèle considéré (les restrictions (2.7) et (2.8)) et par un des termes de chaque élément d'un sous-ensemble donné de l'ensemble $H \cup J$ des disjonctions (2.13) et (2.16).

On se donne donc les ensembles H_1, H_2, H_3, H_4 disjoints deux à deux et pour lesquels on a

$$H_0 = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \subset H; \tag{3.1}$$

J_1 et J_2, disjoints, pour lesquels on a

$$J_0 = J_1 \cup J_2 \subset J. \tag{3.2}$$

On construit avec ces ensembles les ensembles suivants:

$$\begin{cases} H' = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \\ J' = H_1 \cup H_2 \cup J_0 \cup \bar{J}_0 \\ N_0 = \{J \mid (i, j) \in H_4\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ici, l'ensemble $\bar{A}$ des paires de nombres est défini par la relation

$$(i, j) \in A \Leftrightarrow (j, i) \in \bar{A}. \tag{3.4}$$

On désigne encore par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2, \end{cases} \quad (i, j) \in \begin{cases} H_1 \\ H_2 \\ H_3. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème Q prend alors l'aspect suivant:

$$\begin{cases} \xi_j - \xi_i \geqslant t_i, & (i, j) \in H_1 \cup J_1 \cup \bar{J}_2 \\ \xi_j - \xi_i \geqslant t_i - 1, & (i, j) \in H_2 \cup J_2 \cup \bar{J}_1 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$n_j - n_i \geqslant a_{ij}, \qquad (i, j) \in H' \tag{3.7}$$

auxquels on ajoute les restrictions

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} n_i \geqslant 0 \text{ entier} \\ 0 \leqslant \xi_i < 1 \\ n_0 - n_i \geqslant 0 \end{matrix}\right\} i \in N \\ \xi_0 - \xi_i \geqslant t_i, \quad i \in N^0 \\ \xi_0 - \xi_i \geqslant t_i - 1, \quad i \in N^1 \end{cases} \tag{3.8}$$

et on demande que la valeur de la fonction

$$y = n_0 + \xi_0 + \sum_{i \in N_0} \alpha_i \tag{3.9}$$

devienne minimale.

Nous faison d'abord la remarque que les restrictions de Q se divisent en deux parties: la première ne contient que les inconnues n_i, la seconde seulement les ξ_i.

Nous avons par conséquent

$$\left.\begin{cases} n_i \geqslant 0 \text{ entier} \\ n_0 - n_i \geqslant 0 \end{cases}\right\} i \in N \tag{3.10}$$

$$n_j - n_i \geqslant a_{ij}, \quad (i, j) \in H' \tag{3.11}$$

en demandant que n_0 soit minimal (le problème Q_n): et

$$\begin{cases} 0 \leqslant \xi_i < 1, & i \in N \\ \xi_0 - \xi_i \geqslant t_i, & i \in N^0 \\ \xi_0 - \xi_i \geqslant t_i - 1, & i \in N^1 \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\xi_j - \xi_i \geqslant b_{ij}, \quad (i, j) \in J' \tag{3.13}$$

en demandant que ξ_0 soit minimal (le problème Q_ξ). On a utilisé ici la notation

$$b_{ij} = \begin{cases} t_i, \\ t_i - 1, \end{cases} \quad (i, j) \in \begin{cases} H_1 \cup J_1 \cup \bar{J}_2 \\ H_2 \cup J_2 \cup \bar{J}_1. \end{cases}$$

En vue de la résolution du problème Q_n, on attache aux relations (3.11) un graphe $G(N, H')$ orienté, en attribuant à un arc $(i, j) \in H'$ la longueur a_{ij}. Le problème Q_n est un problème de potentiel (voir par ex. [1], [2] ou [17]) dont on cherche la solution minimale universelle. À cause de la longueur 0, 1 ou 2 des arcs, cette solution vérifie automatiquement la première condition (3.10) et on obtient

$$n_0 = \max_{i \in N} n_i. \tag{3.14}$$

La solution obtenue détermine aussi les ensembles N^0 et N^1.

Si le problème Q_n est compatible, alors les circuits éventuellement existants ne contiennent que des arcs de longueur 0 et c'est pourquoi toutes les valeurs n_i appartenant aux sommets d'un circuit (et plus généralement d'une composante fortement connexe) seront égales entre elles. Si l'on forme donc le graphe réduit $G^*(N^*, H^*)$ correspondant aux composantes fortement connexes de G, alors ce graphe sera sans circuits et la solution minimale universelle du problème Q_n peut être obtenue rapidement.

Passons au problème Q_ξ. On attache aux conditions (3.13) un graphe orienté $\Gamma(N, J')$ dont les arcs auront la longueur b_{ij}. Ces conditions constituent elles aussi un problème de potentiel qui est compatible si est seulement si le graphe Γ ne possède aucun circuit de longueur strictement positive. Si cette condition est satisfaite, alors en y ajoutant la restriction $\xi_i \geqslant 0$, $i \in N$, on en peut déterminer la solution minimale universelle. Les méthodes de résolution afférentes sont itératives et bien connues. Si et seulement si la solution obtenue vérifie aussi les conditions $\xi_i < 1$, le problème Q_ξ est compatible et on a

$$\xi_0 = \max\,[\max_{i \in N^0} (\xi_i + t_i),\ \max_{i \in N^1} (\xi_i + t_i)]. \tag{3.15}$$

Pour la comparaison des solutions des divers problèmes fondamentaux, on utilisera la fonction y dans (3.9).

On déduit d'un problème fondamental résolu plusieurs problèmes fondamentaux nouveaux Q_1', Q_2' (ev. encore Q_3', Q_4') comme suit.

À l'occasion de la formation du problème fondamental Q, on a utilisé une partie $H_0 \subset H$ des disjonctions (2.14) et une partie $J_0 \subset J$ des disjonctions (2.17). La solution obtenue vérifiera aussi une partie de $H - H_0$ (qui peut être d'ailleurs vide) et de $J - J_0$. On désignera les ensembles des disjonctions non vérifiées par la solution par $K \subset H - H_0$ resp. $L \subset \subset J - J_0$. On choisira de l'ensemble $K \cup L$ un des éléments (une disjonction (2.14) ou (2.17)) et on ajoutera un à un les termes de cette disjonction choisie aux conditions du problème Q. Si cette disjonction est du type (2.17) c'est-à-dire à deux termes, on obtiendra deux problèmes fondamentaux nouveaux Q_1' et Q_2'. Si la disjonction choisie est du type (2.14), on en obtiendra quatre: Q_1', Q_2', Q_3' et Q_4'. Nous soulignons que dans ce dernier cas, la solution de Q_4' est identique à la solution de Q, mais l'ensemble N_0 utilisé pour le calcul de la valeur de la fonction y (3.9) s'augmentera d'un élément nouveau.

4. Simplifications et particularisations; le modèle no 2

Dans ce qui suit, on montrera quelques particularisations du modèle présenté dans le paragraphe 2. Ces modèles particularisés peuvent être résolus plus facilement, mais leurs solutions donnent des valeurs supérieures pour y à la valeur minimale de y qu'on obtiendrait par la solution du modèle du paragraphe 2. Il s'agit donc de solutions approximatives.

A) On obtient une première approximation par la condition supplémentaire

$$s_i = 0, \qquad i \in N' \tag{4.1}$$

c'est-à-dire que nous renonçons à priori aux stocks tampon. Par cette mesure, le quatrième terme des disjonctions (2.13) sera éliminé ce qui réduit le nombre des problèmes fondamentaux.

La fonction utilisée pour la comparaison des solutions sera

$$y_A = n_0 + \xi_0. \tag{4.2}$$

B) On obtient une autre simplification plus grande par la restriction

$$n_0 = n_i^1 = 0, \qquad i \in N. \tag{4.3}$$

Les restrictions (2.14) sont remplacées cette fois par

$$\xi_j - \xi_i \geqslant t_i \vee s_i = 1, \qquad (i, j) \in H \tag{4.4}$$

ce qui d'une part réduit sensiblement le nombre des problèmes fondamentaux à résoudre, mais aussi les inconnues n_i y manquent. Un problème fondamental aura la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_i \geqslant 0 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ i \in N$} \\ \xi_i \leqslant 1 - t_i & \\ \xi_j - \xi_i \geqslant b_{ij}, & (i, j) \in J' \end{array}\right. \tag{4.5}$$

et on en demande la solution minimale universelle. Si elle existe, on obtient

$$\xi_0 = \max_{i \in N} (\xi_i + t_i) \tag{4.6}$$

et la grandeur de comparaison sera

$$z_B = \xi_0 + \sum_{i \in N_0} \alpha_i. \tag{4.7}$$

On remarque qu'au cas B), les ensembles H_2 et H_3 (voir (3.1)) sont vides.

Dans la plupart des cas, la méthode B) donnera des résultats meilleurs que l'approximation A). En effet, avec la méthode B), on raccourcit la durée du cycle de fabrication en augmentant les stocks tampon. Mais les frais indirects pour une période sont proportionnels à la valeur totale du lot de produits tandis que la valeur du stock tampon pour une opération n'est qu'une fraction de cette valeur totale.

Nous présenterons maintenant une généralisation du modèle du paragraphe 2, le modèle no 2. Dans ce modèle, nous ne fixerons plus la durée de la période égale à la durée minimale possible, car il se pourrait qu'avec une durée un peu plus longue de la période, les économies obtenues par la diminution des ,,en cours'' contrebalancent la perte de revenu causée par la prolongation de la durée de la période. On aura donc comme paramètres du problème les quantités d, δ et $\sigma = \Sigma\, \alpha_i$.

Les restrictions du problème souffrent de légères modifications. On écrira pour les moments de commencement

$$x_i = d(n_i + \xi_i) \tag{4.8}$$

et au lieu de la formule (2.6) :

$$\delta = d(n_0 + \xi_0). \tag{4.9}$$

Dans les conditions (2.8), (2.14) et (2.17), la quantité t_i sera remplacée partout par t_i/d.

Une analyse économique plus approfondie donne (maximiser le revenu net total annuel) la forme suivante pour la fonction économique :

$$w = \frac{A}{d} - (n_0 + \xi_0 + d + \sum_{i \in N_0} \alpha_i) : \max ! \tag{4.10}$$

La formule (2.7) en résulte immédiatement avec $d = 1$.

Les problèmes fondamentaux, résultés de ce système de restrictions ne sont plus des problèmes de potentiel, ils ne sont plus même linéaires. Afin de les résoudre, on pourra les considérer comme des problèmes de programmation (de potentiel) paramétrique, avec le paramètre d. Alors on devra résoudre une suite de tels problèmes avec différentes valeurs pour d en approximant la solution optimale avec la précision souhaitée.

Sous ce rapport il est utile d'en savoir plus sur l'allure de la fonction $w_{\max}(d)$. Une telle remarque est la suivante. On a

$$\lim_{d \to \infty} w_{\max} = -\infty. \tag{4.11}$$

En vue de la détermination de la valeur d_{opt} qui maximise la fonction $w_{\max}(d)$, la méthode présentée dans [14] peut être utile.

5. Plusieurs machines du même type

La méthode d'approximation qui va être proposée représente une généralisation du modèle n° 1. L'idée fondamentale consiste en cela que les tâches qui vont être réalisées sur un type donné de machines — répartition déterminée par le processus technologique — seront distribuées d'avance sur les exemplaires du type en question, avant la construction proprement dite du programme. Cette distribution constitue donc le premier pas de l'établissement du programme. La répartition se fait de la manière suivante :

Sur un type donné de machines dont il y a μ exemplaires, on doit réaliser ν tâches dont les temps d'exécution forment l'ensemble $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\nu\}$. On cherche une partition de T en μ sous-ensembles

$$T = \bigcup_{k=1}^{\mu} T_k \tag{5.1}$$

laquelle *minimise* la grandeur

$$S^* = \max_{k=\overline{1,\mu}} S_k \tag{5.2}$$

où on a désigné par

$$S_k = \sum_{t_i \in T_k} t_i. \tag{5.3}$$

En vue de la réalisation de cette partition, nous proposons une méthode approximative.

On se donne la suite de nombres $T = (t_1, t_2, \ldots, t_\nu)$ ordonnée non-croissante. On peut supposer que les nombres t_i sont des nombres naturels. Désignons par

$$S = \sum_{i=1}^{\nu} t_i \tag{5.4}$$

et

$$M = \frac{S}{\mu}. \tag{5.5}$$

Afin de construire les sous-ensembles $T_k \subset T$ on séparera d'abord les éléments t_i avec

$$t_i \geqslant M.$$

Chacun de ces éléments constitue à lui seul un ensemble T_k. On désigne dans ce qui suit par $[x]'$ le plus petit nombre entier qui n'est pas plus petit que x. On détermine le nombre

$$P = \max\,([t_1]',\ [M]'). \tag{5.6}$$

Un sous-ensemble T_k sera formé du plus grand nombre $t_i \in T$ encore non-utilisé pour la construction des ensembles T_k ; on y ajoute le nombre $t_j \in T$ le plus grand suivant (de même encore non utilisé) pour lequel a lieu :

$$t_i + t_j \leqslant P.$$

On continue ce procédé, en respectant toujours la condition

$$S_k \leqslant P. \tag{5.7}$$

On passe ensuite à la détermination du sous-ensemble T_{k+1} Si l'on a construit tous les μ sous-ensembles T_k avec $S_k \leqslant P$ et s'il y a encore des éléments t_i non-répartis, on utilise alors un procédé complémentaire. À savoir, le plus grand des éléments restés non-distribués sera réparti à l'ensemble T_k avec le plus petit S_k. On continue ce procédé jusqu'à ce que tous les t_i soient distribués.

Voici deux exemples illustratifs

Exemple 1. $T = (10, 10, 10, 8, 8, 8, 7, 6, 6, 4, 3, 1, 1)$ $\nu = 13$ $S = 82$ $\mu = 6$ $M = 13{,}67$ $P = 14$

$$\begin{array}{ll} T_1 = \{10,\ 4\} & S_1 = 14 \\ T_2 = \{10,\ 3,\ 1\} & S_2 = 14 \\ T_3 = \{10,\ 1\} & S_3 = 11 \\ T_4 = \{8,\ 6\} & S_4 = 14 \\ T_5 = \{8,\ 6\} & S_5 = 14 \\ T_6 = \{8\} & S_6 = 8 \end{array}$$

L'élément 7 est resté non-réparti. Le procédé complémentaire ajoute cet élément à T_6 et on obtient $T_6' = \{8,\ 7\}$, $S_6' = 15 = S^*$. Distribution optimale.

Exemple 2. $T = (11, 10, 9, 7, 5, 4, 3, 2)$ $\nu = 8$ $S = 51$ $\mu = 3$ $M = P = 17$

$$\begin{array}{ll} T_1 = \{11,\ 5\} & S_1 = 16 \\ T_2 = \{10,\ 7\} & S_2 = 17 \\ T_3 = \{9,\ 4,\ 3\} & S_3 = 16\,;\ T_3' = \{9,\ 4,\ 3,\ 2\}\quad S_3' = 18. \end{array}$$

Cette distribution n'est pas optimale. Une telle solution est par exemple

$$\begin{array}{l} T_1 = \{11,\ 4,\ 2\} \\ T_2 = \{10,\ 7\} \qquad S_1 = S_2 = S_3 = S^* = 17. \\ T_3 = \{9,\ 5,\ 3\} \end{array}$$

Remarque. Pour l'ordonnancement des opérations au cas de la fabrication des unicats ou de petites séries (fabrication non périodique), il y a d'autres modèles et méthodes de résolution basées dans la plupart des cas de même sur des techniques Branch and Bound. Ces problèmes ne sont pas très difficiles dans le cas où chaque machine est d'un autre type ([6], [18]), mais il deviennent très complexes, s'il y a plusieurs exemplaires de chaque type ([4], [7], [8], [13]).

La méthode de la distribution préalable des tâches sur les exemplaires du type réduit le problème de l'atelier ici aussi au cas plus simple où il n'y a qu'un seul exemplaire de chaque type. On a ici une méthode approximative qui peut être utile.

En conclusion il faut dire que les modèles présentés conduisent à un volume trop grand de calculs dans la plupart des cas pratiques. Par conséquent ils doivent être considérés comme des réserves scientifiques pour les ordinateurs futurs, beaucoup plus puissants que les calculateurs actuels. Il est possible d'ailleurs d'en déduire des méthodes d'approximation bien appliquables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, C., *Théorie des graphes et ses applications.* Paris, 1958.

[2] Berge, C., Ghouila-Houri, A., *Programmes, jeux et réseaux de transport.* Paris, 1962.

[3] Bertier, P., Roy, B., *Une procédure de résolution pour une classe de problèmes pouvant avoir un caractère combinatoire.* Bull. du Centre Intern. de calcul, Rome, **4**, 1, 19–28 (1965).

[4] Descamps, R., Chevignon, P., *Algorithmes d'optimisation pour une classe générale de problèmes d'ordonnancement avec limitation des ressources.* Metra V, 4, 603–618 (1966).

[5] Ignall, E., Schrage, L., *Application of the Branch and Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems.* JORSA **13**, 3, 400–412 (1965).

[6] Németi, L., *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen.* Mathematica (Cluj), **6**, 1, 87–99 (1964).

[7] — *Über das Reihenfolgeproblem in der Fertigung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **13**, 835–840 (1968).

[8] — *Sur la programmation temporelle de la fabrication.* Metra, VII, 327–338 (1968).

[9] — *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigung mit Pufferbeständen.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **13**, 1009–1016 (1968).

[10] — *Sur le problème de l'ordonnancement dans la fabrication en série.* Rev. Fr. Inf. Rech. Op. **2**, 47–60 (1968).

[11] — *Über die Durchführungsdauer eines Arbeitsganges in der Ablaufplanung*. Bull. Meth. Soc. Sc. Math. R.S. Roum. **12**, 3, 81–86 (1968).
[12] — *On the Scheduling Problem in the Case of Several Machines of the Same Type*. Mathematica (Cluj), **13**, 2, 251–261 (1971).
[13] Németi, L., Radó, F., *Sur la programmation temporelle de la fabrication*. Mathematica (Cluj), **8**, 1, 109–111, (1966).
[14] Radó, F., *Le calcul approximatif des extrèmes d'une fonction*. Mathematica (Cluj) **3**, 1, 171–177 (1961).
[15] — *Programare liniară cu condiţii logice*. Comun. Acad. R.P.R. **13**, 1039–1042 (1963).
[16] — *Un algorithme pour résoudre certains problèmes de programmation mathématique*. Mathematica (Cluj), **6**, 1, 105–116 (1964).
[17] Roy, B., *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement*. Metra, Série spéciale n° 1, 1962.
[18] Roy, B., Sussmann, B., *Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives*. SEMA, Direction scientifique, Rapport de recherche no. 9, 1964.

Reçu le 15. XII. 1972.

Institutul de calcul din Cluj
al Academici Republicii Socialiste România