REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, TOME 2, 1973, pp. 89–98

REPRÉSENTATIONS ANALYTIQUES POUR QUELQUES FONCTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

par

ANDREI NEY

(Cluj)

Le présent travail est une application immédiate de la théorie constructive des séries et des suites, que j'ai esquissée dans [3] et [4], et de la nouvelle méthode pour l'étude des intégrales impropres, que j'ai exposée dans [5].

§ 1. Représentation analytique de la probabilité définie sur un champ aux évènements élémentaires dénombrables, quelconque

Soit $(E_n)_{n\in N}$ un ensemble dénombrable d'évènements élémentaires (incompatibles deux à deux) et dont la réunion $E = \bigcup\limits_{1}^{\infty} E_n$ est l'évènement certain. (On dira aussi : système complet d'évènements élémentaires.) On réserve le symbole E_0 pour l'évènement impossible. L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$, de toutes les parties de E, à laquelle on attache l'évènement impossible E_0, forme un champ infini d'évènements. On fait correspondre à E_0 le nombre $p_0 = 0$ et à E_n un nombre réel positif p_n $(n \in N)$, de telle façon que l'on ait $\sum\limits_{1}^{\infty} p_n = 1$; les p_n seront les probabilités des évènements élémentaires. Regardant la probabilité $P(A)$ d'un évènement $A = \bigcup_{i \in I} E_i$ (où I est un ensemble d'indices tout au plus dénombrable) on aura $P(A) = P(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} p_i$. Dans ces conditions, la loi de probabilité complètement additive sur le champ d'évènements considéré est déterminée (voir par exemple [2] p. 55).

On donnera, dans ce qui suit, *une représentation analytique valable pour toutes les familles dénombrables de nombres réels et positifs, $\{(p_n)\}$, pour lesquels on aura $\sum_1^{\infty} p_n = 1$, donc à l'aide desquels on peut définir n'importe quelle loi de probabilité sur un champ aux évènements élémentaires dénombrables.*

THÉORÈME 1. *Soit $(E_n)_{n \in N}$ un système complet d'évènements élémentaires. Pour que la fonction P donnée par $P(E_n) = p_n$ $(n \in N)$ définisse une probabilité sur le champ d'évènements infini engendré par $(E_n)_{n \in N}$, il faut et il suffit que la suite $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ait la représentation*

$$(1) \qquad p_n = \frac{d_n}{\prod_0^n (1 + d_\nu)} \; ; \; d_0 = 0, \; 0 < d_n \in R \; (n \in N) \; \text{ et } \sum_1^{\infty} d_n = +\infty,$$

$p_0 = 0$ étant la probabilité de l'évènement impossible E_0. On a aussi

$$P\left(\bigcup_k^{k+l} E_\nu\right) = \frac{1}{\prod_0^{k-1} (1 + d_\nu)} - \frac{1}{\prod_0^{k+l} (1 + d_\nu)} \qquad (k, l \in N).$$

Démonstration. Dans [3] et [4] on donne la forme de représentation du terme général, c_n, d'une série convergente à termes positifs — d'ailleurs quelconque — ainsi que celle de sa somme :

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1}{\prod_1^n (1 + d_\nu)} d_n \quad (n \in N) \quad \text{et} \quad s = \left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1,$$

où $0 < d_n \in R$ $(n \in N)$ et $\sum_1^{\infty} d_n = +\infty$. Si on pose $\left(\frac{1}{d_1} + 1\right) c_1 = 1$, alors on obtient une série à termes positifs et à somme 1, donc justement de la

forme (1). Inversement, si on donne la suite (p_n) de termes strictement positifs, pour laquelle $\sum_1^{\infty} p_n = 1$, on en peut construire (uniquement) la suite (d_n) à l'aide de laquelle p_n peut être représentée selon (1). En effet, de (1) on tire, pour $n = 1$, $\frac{1}{d_1} = \frac{1}{p_1} - 1$ et pour $n \in N$ on en obtient la formule de récurrence $\frac{1}{d_{n+1}} = \frac{1}{d_n} \frac{p_n}{p_{n+1}} - 1$. L'expression de $P\left(\bigcup_k^{k+l} E_\nu\right)$ résulte de la formule

$$s_n = 1 - \frac{1}{\prod_0^n (1 + d_\nu)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

de la somme partielle d'une série à termes positifs et à somme unitaire obtenue de [3].

Observation 1. Afin de pousser plus loin la validité de (1) on peut permettre pour un ensemble I d'indices, tout au plus dénombrable, qu'on ait $d_i = 0$ $(i \in I)$, $(d_i)_{i \in I} \subset (d_n)_{n \in N}$, en respectant toujours la condition $\sum_1^{\infty} d_n = +\infty$. Ainsi on considère aussi des évènements $(E_i)_{i \in I}$ „presque-impossibles" ([1] p. 51). La représentation (1) reste encore valable — voir [4] —.

Observation 2. En s'inspirant de la forme de représentation (1), on peut donner ***une représentation pour la probabilité définie sur un champ fini d'évènements*** **engendré par un système fini et complet d'évènements élémentaires $(E_k)_{k=1}^n$ (*n* nombre naturel arbitraire, mais fixé), notamment :**

$$(2) \qquad P(E_n) = p_k = \frac{d_k}{\prod_1^k (1 + d_\nu)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \text{ et } P(E_n) = p_n = \frac{1}{\prod_1^n (1 + d_\nu)},$$

où $d_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et on réserve pour l'évènement impossible la notation E_0, avec $P(E_0) = p_0 = 0$. Il est facile à vérifier, par induction, que $\sum_1^n p_k = 1$ $(n \in N)$. Si on donne les nombres positifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ avec $\sum_1^n p_k = 1$, on en peut uniquement déduire $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pour que (2) ait lieu ; en effet $\frac{1}{d_1} = \frac{1}{p_1} - 1$ et $\frac{1}{d_k} = \frac{1}{d_{k-1}} \frac{p_{k-1}}{p_k} - 1$ pour $k = 2, 3, \ldots, n - 1$, enfin $d_n = \frac{1}{d_{n-1}} \frac{p_{n-1}}{p_n} - 1$ [1].

Observation 3. Pour l'étude de l'allure de la suite $(p_n)_{n \in N}$ en fonction de la suite $(d_n)_{n \in N}$ on peut se servir de quelques théorèmes donnés dans [6] et de l'observation 8 de [4].

Observation 4. On obtient facilement *la représentation analytique de l'entropie du champ de probabilité considéré,* notamment

$$H = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{\prod_{1}^{n} (1 + d_\nu)} \left[\ln d_n - \sum_{1}^{n} \ln (1 + d_\nu). \right]$$

§ 2. La représentation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire dans le cas discontinu (cas „discret")

a) *Le cas de la variable aléatoire dite „simple"*. Dans [2] on nomme variable aléatoire „*simple*", une variable aléatoire susceptible de prendre seulement un nombre fini de valeurs finies. On peut ranger ces valeurs dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (n nombre naturel fixé) ; la valeur x_k sera prise avec la probabilité p_k pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Alors, on a pour *la fonction F de répartition*

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k \text{ avec } p_k \text{ donnée par (2) } (x \in R). \tag{3}$$

b) *Le cas de la variable aléatoire à valeurs formant un ensemble dénombrable.* Soit $(x_n)_{n \in N}$ la suite des seules valeurs (ces valeurs ne sont pas nécessairement rangeables dans l'ordre croissant) susceptibles d'être prises par

---

[1] Dans un tout autre ordre d'idées, on remarque, que la représentation (2) permet *la décomposition rationnelle et positive de l'unité,* en considérant les d_k entiers et positifs,

$$1 = \frac{d_1}{1 + d_1} + \frac{d_2}{(1 + d_1)(1 + d_2)} + \ldots + \frac{d_n}{(1 + d_1) \ldots (1 + d_n)} + \frac{1}{(1 + d_1) \ldots (1 + d_n)}$$

et ceci permet l'étude de la décomposition de l'unité aussi en une somme de fractions positives à numérateurs unitaires et à dénominateurs entiers : $1 = \sum_{1}^{n+1} \frac{1}{x_k}$ $(n \in N)$.

la variable aléatoire, avec les probabilités correspondantes $(p_n)_{n \in N}$. Alors — conformément à (1) — on aura pour *la fonction de répartition*

$$F(x) = \sum_{x_{i_k} < x} p_{i_k} \quad (x \in R) \text{ avec } p_{i_k} = \frac{d_{i_k}}{\prod_{1}^{i_k} (1 + d_\nu)} \tag{4}$$

(i_k) étant la suite partielle, finie ou infinie, des indices pour lesquels $x_{i_k} < x$ et — bien entendu — $\sum_{x_{i_k} < +\infty} d_{i_k} = \sum_{1}^{\infty} d_n = +\infty$.

§ 3. La représentation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire et celle de sa densité de probabilité, dans le cas où cette dernière est continue. La représentation dans un cas mixte

On énonce tout d'abord, pour une fonction strictement positive $f \in C]-\infty, +\infty[$, et après pour une fonction non-négative $f \in C]-\infty, +\infty[$ *une condition nécessaire et suffisante, pour qu'elle puisse être la densité de probabilité d'une variable aléatoire.* On donne une représentation analytique pour f, ainsi que pour la fonction de répartition F, qui lui correspond.

THÉORÈME 2. 1° *Si un couple (f, φ) de fonctions strictement positives et appartenant à la classe $C]-\infty, +\infty[$ satisfait l'équation différentielle suivante avec ses conditions à la limite :*

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = -f(x) \quad (x \in R) ; \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0, \tag{5}$$

alors f est une densité de probabilité attachée à une certaine variable aléatoire, et f est représentée par

$$f(x) = \varphi(x) e^{-\int_{-\infty}^{x} \varphi(u) du} \quad (x \in R), \tag{6}$$

la fonction φ satisfaisant aux conditions

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi(u) du < +\infty \quad et \quad \int_{x}^{+\infty} \varphi(u) du = +\infty. \tag{7}$$

La fonction φ — la couplée de f — est représentée à son tour à l'aide de f, par

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} f(u) du} \quad (x \in R). \tag{8}$$

2° *Une densité de probabilité, f, strictement positive (d'ailleurs quelconque) de la classe* $C]-\infty, +\infty[$ *satisfait à l'équation différentielle* (5) *avec la couplée* $\varphi \in C]-\infty, +\infty[$, *qui est soumise aussi aux conditions* (7). *La fonction f a nécessairement la représentation* (6).

3° *La représentation analytique de la fonction de répartition F, attachée à la densité de probabilité f (strictement positive et continue sur R) est*

(9) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 1 - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 - e^{-\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du} \quad (x \in R).$$

Démonstration. Relativement au point 1° de l'énoncé. La continuité de f entraîne — vu (5) — celle de la fonction dérivée $\left(\frac{f}{\varphi}\right)'$, donc aussi l'existence de son intégrale Riemann (on mentionne, qu'on ne suppose pas l'existence de f' et de φ', mais seulement celle de $\left(\frac{f}{\varphi}\right)'$). On aura

$$\int_\xi^x \left(\frac{f(u)}{\varphi(u)}\right)' du = -\int_\xi^x f(u)du \quad \xi, x \in R,$$

d'où

(10) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\int_\xi^x f(u)du.$$

Le membre gauche de (10) a pour limite $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1$ si $\xi \to -\infty$, (voir la première condition à la limite, de (5)), donc le membre droit de (10) a aussi une limite finie et

(11) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1 = -\int_{-\infty}^x f(u)du.$$

En appliquant à (11) la deuxième condition à la limite, de (5), résultera

(12) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1,$$

donc f est une densité de probabilité sur R. De (11) on obtient la fonction φ,

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^x f(u)du} \quad (x \in R)$$

(la positivité stricte de φ sur R en résulte avec évidence). On arrive par cette voie à (8). Pour vérifier les conditions (7) regardant φ, on intègre (8) comme suit :

(13) $$\int_\xi^x \varphi(u)du = \int_\xi^x \frac{f(u)du}{1-\int_{-\infty}^u f(v)dv} \quad (\xi, x \in R);$$

on y applique la substitution $t = \int_{-\infty}^u f(v)dv$, d'où $dt = f(u)du$ et pour les limites ξ respectivement x on obtient $t_\xi = \int_{-\infty}^\xi f(v)dv$ respectivement $t_x = \int_{-\infty}^x f(v)dv$. Ainsi l'égalité (13) devient

$$\int_\xi^x \varphi(u)du = \int_{t_\xi}^{t_x} \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_{t_\xi}^{t_x},$$

c'est-à-dire

(14) $$\int_\xi^x \varphi(u)du = -\ln(1-t_x) + \ln(1-t_\xi).$$

On fait ensuite $\xi \to -\infty$ et il en résulte $t_\xi \to 0$, — ainsi le membre droit de (14) a une limite finie, donc

(15) $$\int_{-\infty}^x \varphi(u)du = -\ln\left(1 - \int_{-\infty}^x f(u)du\right).$$

Pour $x \to +\infty$, tenant compte de (12), on obtient de (14)

$$\int_\xi^{+\infty}\varphi(u)du = +\infty$$

et ainsi le point 1° de l'énoncé est complètement domontré.

Relativement au point 2° *de l'énoncé.* Du fait que f est une densité de probabilité strictement positive de la classe $C]-\infty, +\infty[$, résulte l'existence de la valeur positive et moindre que l'unité: $\int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad (x \in R)$.

La couplée φ de f est définie par

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du} \qquad (x \in R) \tag{16}$$

— ce qui est identique à (8) — et on procède à la vérification de l'équation différentielle (5) avec ses conditions à la limite, comme suit: de (16) on tire

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \tag{17}$$

puis, le second membre de (17) ayant une dérivée finie, on arrive à

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = -f(x).$$

D'autre part, faisant $x \to -\infty$ respectivement $x \to +\infty$, l'égalité (17) nous conduit à la première respectivement à la deuxième relation à la limite, mises en évidence dans (5). La fonction φ donnée par (16) satisfait aussi à (7) — en voir la démonstration plus haut. Pour vérifier la formule de représentation (6), on faira les calculs suivants à l'aide de la fonction φ donnée par (16):

$$\varphi(x) e^{-\int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du} = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du}\, e^{-\int_{-\infty}^{x} \frac{f(u)du}{1 - \int_{-\infty}^{u} f(v)dv}} =$$

$$= \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du}\, e^{\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{du} \ln\left(1 - \int_{-\infty}^{u} f(v)\,dv\right)} = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du}\, e^{\ln\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)du\right)} = f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Relativement au point 3° *de l'énoncé.* Les égalités (9) s'obtiennent immédiatement de (11), à l'aide de (6).

THÉORÈME 3. *Si φ est une fonction non-négative de la classe $C]-\infty, +\infty[$ et satisfaisant aussi à (7), alors la fonction $f \in C]-\infty, +\infty[$ définie à l'aide de φ, par l'intermédiaire de (6), est une densité de probabilité continue et non-négative sur R, attachée à une certaine variable aléatoire. De même, pour chaque densité de probabilité non-négative, $f \in C]-\infty, +\infty[$, il existe une couplée de même non-négative, $\varphi \in C]-\infty, +\infty[$, et donnée par (8), satisfaisant aussi à (7). Les couples (f, φ) ci-dessus, ne satisfont plus l'équation différentielle (5) au points où φ et f s'annulent. Regardant la fonction de répartition attachée à f par l'intermédiaire de φ, on aura*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 1 - e^{-\int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du} \qquad (x \in R). \tag{18}$$

Démonstration. La démonstration des deux propositions ci-dessus se fait par simple vérification: en intégrant f — donnée par (6) — sur $]-\infty, +\infty[$, respectivement en vérifiant (6) en y substituant φ donnée par (8), — exactement comme on l'a vu vers la fin de la démonstration du théorème 2; La représentation de F se vérifie par dérivation et par simple confrontation avec la définition de la fonction de répartition.

Observation 5. On fait des remarques analogues à celles rencontrées dans le cadre de l'observation 3.

Observation 6. Soit le cas, où une variable aléatoire *prend certaines valeurs* — disons le: *dénombrables* — $(x_n)_{n\in N}$, *avec des probabilités correspondantes strictement positives* $(p_n)_{n\in N}$, pour lesquelles on a $\sum_{1}^{\infty} p = 1-\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. La fonction de répartition de la même variable aléatoire ait *aussi une composante continue*, ça veut dire qu'il existe aussi une fonction non-négative et dans nos considérations $f \in C]-\infty, +\infty[$, pour laquelle $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lambda$. Alors, on voit facilement que la représentation de f s'obtient à partir de (6), par une légère modification, notamment

$$f(x) = \varphi(x)\, e^{-\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du} \qquad (x \in R) \tag{19}$$

où φ est aussi non-négative, $\varphi \in C]-\infty, +\infty[$ et satisfaisant à (7). Tenant compte des représentations (1) et (19), envisageant aussi (4) et (18), on obtient

$$(20)\quad F(x) = \lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(u)du}\right] + (1-\lambda)\sum_{x_{i_k} < x} \frac{d_{i_k}}{\prod\limits_{1}^{i_k}(1+d_\nu)} \quad (x \in R),$$

sachant que (i_k) est la suite partielle — finie ou infinie — des indices pour lesquels $x_{i_k} < x$. (Le premier terme du membre droit de l'égalité (20) aura pour limite λ et le deuxième terme aura pour limite $1-\lambda$ si $x \to +\infty$.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fortet, R., *Calcul des probabilités.* C.N.R.S. Paris, 1950.

[2] Onicescu, O., Mihoc, G., Ionescu-Tulcea, C. T., *Calculul probabilităților și aplicații.* Ed. Academiei RPR. București 1956

[3] Ney, A., *Éléments de la théorie constructive des séries de quaternions.* Mathematica (Cluj), **12** (35), 1, 127–147 (1970).

[4] Ney, A., *Un nou studiu structural în mulțimea șirurilor numerice* Revista de analiză numerică și teoria aproximației. Vol. I, fasc. 1, 65–81, (1972).

[5] Ney, A., *Nouvelles méthodes pour l'étude des intégrales impropres.* Mathematica (Cluj), **8** (31), 2, 335–344 (1966).

[6] Ney A., *Contribution à l'étude de la rapidité de convergences des séries à termes positifs.* Mathematica (Cluj) **4** (27), 1, 77–105 (1962).

Reçu le 8. V 1971.

Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj
Facultatea de Matematică-Mecanică
Catedra de Analiză