REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 3, Nº 1, 1974, 37—46

ÜBER EIN ABSTRAKTES MAXIMUMPRINZIP

von

IOSIF KOLUMBÁN

(Cluj)

In [6] wurde ein abstracktes Maximumprinzip abgeleitet, das im wesentlichen · eine Multiplikatorenregel mit unendlich vielen Gleichungsnebenbedingungen ist. Dabei wurden die Ableitungen der vorkommenden Funktionen als lineare Abbildungen vorausgesetzt. In dieser Arbeit wird ein analoges Maximumprinzip bewiesen, wobei die Ableitungen der Zielfunktion und der in den Ungleichungsnebenbedingungen vorkommenden Funktionen als stetige konvexe Abbildungen angenommen werden. Die gewonnenen Ergebnisse werden für ein Steuerungsproblem angewandt.

1. Das Optimierungsproblem

f sei eine Abbildung des reellen Banachraumes X in den Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen, g sei eine Abbildung von X in den reellen Banachraum Y, h sei eine Abbildung von X in den reellen lokal-konvexen Raum Z. C sei eine konvexe Teilmenge von Z mit nichtleerem topologischen Inneren $\mathring{C}$ und B sei eine gegebene Teilmenge von X. Jedes $x \in B$ mit $g(x) = \theta_Y$ und $h(x) \in C$ heisst ein zulässiges Element. A sei die Menge aller zulässigen Elemente. Es wird angenommen, dass A nicht leer ist. Die Aufgabe besteht nun darin, ein $x_0 \in A$ so zu bestimmen, das die Ungleichung $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in A$ gilt. Ein Element x_0 mit dieser Eigenschaft heisst eine Optimallösung.

2. Differenzierbarkeitsbedingungen und die konvexe Approximation

$\mathcal{C}(X, Y)$ sei der reelle lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen $L : X \to Y$ mit der üblichen Norm versehen (vgl. [5]).

Definition. *Die Abbildung g heisse stetig Gâteaux-differenzierbar in $x_0 \in X$, falls g für jedes x aus einer Umgebung U von x_0 eine stetige Gâteaux-Ableitung $g'(x)$ besitzt und die Abbildung $g' : U \to \mathcal{C}(X, Y)$, die jedem $x \in U$ die stetige lineare Abbildung $g'(x)$ zuordnet, stetig in x_0 ist.*

Eine positiv-homogene Abbildung $h'(x_0) : X \to Z$ heisse Hadamard-Ableitung von h in $x_0 \in X$, falls gilt

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} [h(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) - h(x_0)] = h'(x_0)(x)$$

für alle $x \in X$ und alle Abbildungen $r : [0, 1] \to X$ mit

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X \quad (\text{vgl. [8] und [6]}).$$

Es wird für beide Ableitungen die gleiche Schreibweise gewählt, da aus dem jeweiligen Zusammenhang ersichtlich ist, welche von beiden gemeint ist.

Definition. *Es sei* $D := \bigcup_{\lambda \geq 0} \{\lambda(u - h(x_0)) | u \in C\}$.

Gilt

$$h'(x_0)[(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2] - (1 - \alpha)h'(x_0)(x_1) - \alpha h'(x_0)(x_2) \in D$$

für alle $\alpha \in [0, 1]$ und für alle $x_1, x_2 \in X$, so heisst $h'(x_0)$ C-konkav.

Definition. *Eine konvexe Teilmenge $x_0 + K$ von X heisse konvexe Approximation an B in x_0, falls $\theta_X \in K$ und $\mathring{K} \neq \emptyset$ ist und falls jedes $x \in K$ folgende Eigenschaften besitzt: Gibt es eine Abbildung $r : [0, 1] \to X$ mit $\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X$, so existiert ein positives δ mit $x_0 + \alpha x + r(\alpha) \in B$ für alle $\alpha \in [0, \min(1, \delta)]$; ausserdem gilt $\lambda x \in K$ für alle $\lambda > 0$.*

Die Menge K ist natürlich ein konvexer Kegel.

3. Der Satz von Ljusternik

Ist g stetig in einer Umgebung von $x_0 \in X$, stetig Gâteaux-differenzierbar in x_0 und gilt die Gleichheit $g'(x_0)(X) = Y$, so existiert eine Abbildung $r : [0, 1] \to X$, für jedes Element $x \in X$ mit $g'(x_0)(x) = \theta_Y$, so dass

$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X$ *und* $g(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) = \theta_Y$ *für alle* $\alpha \in [0, 1]$ *gilt.* (vgl. [7], [6] *und* [4]).

Aus diesem Satz folgt sofort der

SATZ 1. (vgl. [6]). *Es sei $x_0 \in A$ und $x_0 + K$ sei eine konvexe Approximation an B in x_0. g sei stetig in einer Umgebung von x_0 und stetig Gâteaux-differenzierbar in x_0. Die Gâteaux-Ableitung $g'(x_0)$ von g in x_0 bilde X auf Y ab. f und h mögen Hadamard-Ableitungen $f'(x_0)$* bzw. $h'(x_0)$ in x_0 *besitzen.*

Gibt es dann ein Element $x \in K$ mit

$$f'(x_0)(x) < 0, \quad g'(x_0)(x) = \theta_Y \textit{ und } h(x_0) + h'(x_0)(x) \in \mathring{C},$$

so existiert ein $\tau > 0$ und eine Abbildung $r : [0, \tau] \to X$ mit

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X, \quad x_0 + \alpha x + r(\alpha) \in B,$$

$$f(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) < f(x_0), \; g(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) = \theta \textit{ und } h(x_0 + \alpha x + v(\alpha)) \in \mathring{C}$$

für alle $\alpha \in [0, \tau]$.

Beweis. Nach dem Satz von Ljusternik gibt es eine Abbilgund $r : [0, 1] \to X$ *mit* $\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X$ und $g(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) = \theta_Y$ für alle $\alpha \in [0, 1]$. Wegen $x \in K$ gibt es ein positives $\delta \leqslant 1$ mit $x_0 + \alpha x + r(\alpha) \in B$ für alle $\alpha \in [0, \delta]$. Aus der Definition der Hadamard-Ableitung folgt, dass ein pozitives $\tau \leqslant \delta$ mit $f(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) < f(x_0)$ und $h(x_0) + \frac{1}{\alpha} [h(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) - h(x_0)] \in \mathring{C}$ für alle $\alpha \in [0, \tau]$ existiert. Da C konvex und $h(x_0)$ ein Element von C ist, folgt $h(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) = (1 - \alpha)h(x_0) + \alpha\{h(x_0) + \frac{1}{\alpha} [h(x_0 + \alpha x + r(\alpha)) - h(x_0)]\} \in \mathring{C}$.

Korollar. *Sind die Forderungen des Satzes 1 erfüllt und ist überdies x_0 eine Minimallösung, so ist das System*

$$f'(x_0)(x) < 0, \quad g'(x_0)(x) = \theta_Y, \quad h(x_0) + h'(x_0)(x) \in \mathring{C}, \quad x \in K$$

nicht lösbar.

4. Das Maximumprinzip

SATZ 2. *Es sei $x_0 \in A$ und $x_0 + K$ sei eine konvexe Approximation an B in x_0. g sei stetig in einer Umgebung von x_0 und stetig Gâteaux-differenzierbar in x_0. Die Gâteaux-Ableitung $g'(x_0)$ von g in x_0 bilde X auf*

Y *ab.* f *und* h *mögen Hadamard-Ableitungen* $f'(x_0)$ bzw. $h'(x_0)$ *in* x_0 *besitzen. Die Abbildungen* $-f'(x_0)$ *und* $h'(x_0)$ *seien auf* X *stetig und konkav bzw.* C*-konkav. Ist dann* x_0 *eine Minimallösung, so gibt es eine reelle Zahl* $\mu \geqslant 0$ *und lineare stetige Funktionale* y^* *auf* Y *und* z^* *auf* Z*, die im Falle* $\mu = 0$ *nicht beide identisch* 0 *sind, mit*

$$\mu \cdot f'(x_0)(x) + y^*(g'(x_0)(x)) + z^*(h'(x_0)(x)) \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad x \in K$$

und

$$z^*(z) \leqslant z^*(h(x_0)) \qquad \text{für alle } z \in C.$$

Beweis. Es sei

$$A := \{(r, g'(x_0)(x), z) \in \mathbf{R} \times Y \times Z \mid x \in K, \ r \geqslant f'(x_0)(x), \ h'(x_0)(x) - z \in D\}$$

und

$$B := \{(\rho, \theta_Y, \xi) \in \mathbf{R} \times Y \times Z \mid \rho < 0, \ \ \xi \in \{\lambda(u - h(x_0)) \mid \lambda > 0, \ u \in \mathring{C}\}\}.$$

Die Mengen A und B sind konvexe Kegel und aus Stetigkeitsgründen gilt $\mathring{A} \neq \emptyset$. Wäre $A \cap B \neq \emptyset$, so gäbe es ein $x \in K$ mit $f'(x_0)(x) < 0$, $g'(x_0)(x) = \theta_Y$ und $h(x_0) + h'(x_0)(x) \in \mathring{C}$. Das widerspricht aber dem Korollar des Satzes 1. Es gilt also $A \cap B = \emptyset$. Nach [5] gibt es eine reelle Zahl μ und lineare stetige Funktionale y^* auf Y und z^* auf Z, die im Falle $\mu = 0$ nicht beide identisch 0 sind, mit

$$\mu r + y^*(g'(x_0)(x)) + z^*(z) \geqslant 0 \geqslant \mu\rho + z^*(\xi)$$

für alle $(r, g'(x_0)(x), z) \in A$ und für alle $(\rho, 0, \xi) \in B$. Daraus folgt $\mu \geqslant 0$ und $z^*(z) \leqslant z^*(h(x_0))$ für alle $x \in C$. Setzt man für ein x aus K $r := f'(x_0)(x)$ und $z := h'(x_0)(x)$, so ergeben sich die gewünschten Ungleichungen.

Bemerkung. In dem Fall, wenn Y und Z endlichdimensionale Räume sind, wurde in [9] ein ähnlicher Satz gegeben.

5. Ein Sonderfall

SATZ 3. *Seien* S *und* T *kompakte Hausdorffsche topologische Räume und die Abbildungen* $F: X \times S \to \mathbf{R}$ *und* $H: X \times T \to \mathbf{R}$ *seien stetig. Es sei* $f(x) := \max_{s \in S} F(x, s)$, $h(x) := \max_{t \in T} H(x, t)$ *für alle* $x \in X$ *und* $C := \{z \in \mathbf{R} \mid z \leqslant 0\}$. *Die Abbildung* g *sei wie oben definiert.* $x_0 \in A$ *sei eine Minimallösung und* g *sei stetig in einer Umgebung* U *von* x_0 *und stetig*

Gâteaux-differenzierbar in x_0. *Für jedes* $s \in S$ *und* $t \in T$ *seien die Funktionale* $F(\cdot, s): X \to \mathbf{R}$ *und* $H(\cdot, t): X \to \mathbf{R}$ *auf* U *Fréchet-differenzierbar und die Ableitungen* F'_x *und* H'_x *seien auf* $U \times S$ bzw. *auf* $U \times T$ *stetig.* $x_0 + K$ *sei eine konvexe Approximation an* B *in* x_0 und $g'(x_0)$ *bilde* X *auf* Y *ab.*

Dann gibt es ein lineares stetiges Funktional y^* *auf* Y *und nicht-negative reguläre Borel-Massen* μ *auf* S *und* ν *auf* T*, die im Falle* $y^* = 0^*$ *nicht beide identisch* 0 *sind, mit*

$$\int_S F'_x(x_0, s)(x)\, d\mu(s) + \int_T H'_x(x_0, t)(x)\, d\nu(t) + y^*(g'(x_0)(x)) \geqslant 0$$

für alle $x \in K$ *und* $\displaystyle\int_{T(x_0)} H(x_0, t)\, d\nu(t) = 0.$

μ *und* ν *sind auf* $S(x_0)$ *bzw. auf* $T(x_0)$ *konzentriert, wobei*

$$S(x_0) := \{s \in S \mid F(x_0, s) = f(x_0)\} \text{ und}$$
$$T(x_0) := \{t \in T \mid H(x_0, t) = h(x_0)\}$$

ist.

Gibt es ein $x_1 \in K$ *mit* $H'_x(x_0, t)(x_1) < 0$ *für alle* $t \in T(x_0)$ *und* $g'(x_0)(x_1) = \theta_Y$, *so kann* μ *mit* $\displaystyle\int_{S(x_0)} d\mu(s) = 1$ *gewählt werden.*

Beweis. Es sei $x \in X$ und $r: [0, 1] \to X$ mit $\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} r(\alpha) = \theta_X$. Für jedes $\alpha \in [0, 1]$ existiert ein $\theta_\alpha \in [0, 1]$ mit

$$\frac{1}{\alpha}[F(x_0 + \alpha x + r(\alpha), s) - F(x_0, s)] = F'_x(x_0 + \theta_\alpha(\alpha x + r(\alpha)), s)(x + r(\alpha)).$$

(α_i) sei eine Folge aus $[0, 1]$ mit $\lim_{i \to \infty} \alpha_i = 0$ und wir setzen $x_i := x_0 + \theta_{\alpha_i}(\alpha_i x + r(\alpha_i))$. Wegen der Stetigkeit von F'_x existiert dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein i_0 mit $|F'_x(x_i, s)(x + r(\alpha_i)) - F'_x(x_0, s)(x + r(\alpha_i))| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i > i_0$ und für alle $s \in S$. i_0 kann so gewählt werden, dass $|F'(x_0, s)(r(\alpha_i))| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i > i_0$ und für alle $s \in S$ gilt. Damit gilt auch die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{\alpha_i}[F(x_0 + \alpha_i x + r(\alpha_i), s) - F(x_0, s)] - F'_x(x_0, s)(x)\right| < \varepsilon$$

für alle $i > i_0$ und für alle $s \in S$.

Nach [4; Satz 9] folgert man

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\alpha_i} [f(x_0 + \alpha_i x + r(\alpha_i)) - f(x_0)] = \max_{s\in S(x_0)} F'_x(x_0, s)(x).$$

Da die Folge (α_i) mit $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ beliebig gewählt wurde, existiert die Hadamard-Ableitung $f'(x_0)$, die auf X stetig und sublinear ist. Das gleiche kann man auch über $h'(x_0)$ behaupten. Es gelten also

$$f'(x_0)(x) = \max_{s\in S(x_0)} F'_x(x_0, s)(x).$$

und

$$h'(x_0)(x) = \max_{t\in T(x_0)} H'_x(x_0, t)(x), \qquad x \in X.$$

Nach Satz 2 existieren nichtnegative reelle Zahlen μ_0, ν_0 und ein lineares stetiges Funktional y^* auf Y, die nicht alle 0 sind, mit

$$\mu_0 f'(x_0)(x) + \nu_0 h'(x_0)(x) + y^*(g'(x_0)(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in K \text{ und } \nu_0 h(x_0) = 0.$$

Es lässt sich zeigen (vgl. [9; Lemma 4.2]), dass auf X lineare stetige Funktionale x_0^* und x_1^* mit den folgenden Eigenschaften existieren:

$$\mu_0 x_0^*(x) + \nu_0 x_1^*(x) + y^*(g'(x_0)(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in K,$$
$$x_0^*(x) \leqslant f'(x_0)(x) \text{ und } x_1^*(x) \leqslant h'(x_0)(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Nach [9; Satz 3.5] existieren dann die Massen μ und ν, die der Behauptung des Satzes entsprechen.

Gibt es ein $x_1 \in K$ mit $H'_x(x_0, t)(x_1) < 0$ für alle $t \in T(x_0)$ und $g'(x_0)(x_1) = \theta_Y$, so muss μ_0 positiv sein; d.h. man kann $\mu_0 = 1$ wählen.

6. Anwendung auf ein Steuerungsproblem

Es ist eine Trajektorie x und eine Steuerung u zu bestimmen, die der Differentialg eichung

$$\frac{d}{dt} x(t) = \varphi(x(t), u(t), t), \qquad t \in [0, T]$$

genügen, Nebenbedingungen der Art

$$J(x(0), x(T)) = 0,$$
$$u(t) \in U \text{ fast überall in } [0, T)]$$

erfüllen und die Kostfunktion

$$f(x, u) = \max_{\lambda\in\Lambda} \int_0^T \psi(x(t), u(t), t, \lambda)\, dt$$

minimieren.

Dabei sei $x: [0, T] \to \mathbf{R}^n$ eine stetige Funktion und $u: [0, T] \to \mathbf{R}^m$ eine messbare wesentlich beschränkte Funktion. $U \subseteq \mathbf{R}^m$ ist eine konvexe Menge mit $\mathring{U} \neq \emptyset$, $\Lambda \subseteq \mathbf{R}^p$ ist eine kompakte Menge und die Funktionen $\varphi: R^{n+m+1} \to \mathbf{R}^n$, $\psi: \mathbf{R}^{n+m+1+p} \to \mathbf{R}$ und $J: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^q$ sind stetig und besitzen stetige Ableitungen bezüglich x und u. Steuerungsprobleme dieser Art wurden z.B. in [10] und [3] studiert.

Es sei $X = C[0, T]^n \times L_\infty[0, T]^m$, $Y = C[0, T]^n \times \mathbf{R}^{2n}$ und $B = C[0, T]^n \times U[0, T]$, wobei $U[0, T] = \{u \in L_\infty[0, T]^m \mid u(t) \in U$ fast überall in $[0, T]\}$ ist. Nehmen wir an, dass (x_0, u_0) eine Lösung des Steuerungsproblems ist. Nach Satz 3 gibt es ein lineares stetiges Funktional y^* auf Y und eine nicht negative reguläre Borel-Masse μ auf Λ, die nicht beide identisch 0 sind, so dass

$$(1) \quad \int_\Lambda \left\{ \int_0^T [\psi'_x(\tau, \lambda)\, x(\tau) + \psi'_u(\tau, \lambda)\, u(\tau)]\, d\tau \right\} d\mu(\lambda) - x^*(x(\cdot) - x(0) -$$
$$- \int_0^{\cdot} [\varphi'_x(\tau)\, x(\tau) + \varphi'_u(\tau)\, u(\tau)]\, d\tau) - \langle J_1 x(0) + J'_2 x(T), c\rangle \geqslant 0$$

für alle $u \in L_\infty[0, T]$ mit $u_0(t) + u(t) \in U$ fast überall und für alle $x \in C[0, T]$ gilt. Wir haben den Satz 3 für

$$K = \bigcup_{\alpha\geqq 0} \{\alpha(u - u_0) | u(t) \in U \text{ fast überall}\}$$

angewandt. Dabei sind die Ableitungen $\psi'_x(\tau, \lambda)$ und $\psi'_u(\tau, \lambda)$ an der Stelle $(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau, \lambda)$ und die Ableitungen $\varphi'_x(\tau)$ und $\varphi'_u(\tau)$ an der Stelle $(x_0(\tau), u_0(\tau), \tau)$ zu verstehen. Die Jacobi-Matrizen nach der ersten bzw. zweiten Veränderlichen J'_1 und J'_2 werden in $(x_0(0), x_0(T))$ berechnet. Das Funktional y^* haben wir unter der Form (x^*, c') mit $x^* \in (C[0, T])^*$ und $c \in \mathbf{R}^{2n}$ geschrieben. μ wird auf

$$\Lambda(x_0, u_0) = \left\{ \lambda \in \Lambda \,\middle|\, \int_0^T \psi(x_0(t), u_0(t), t, \lambda)\, dt = f(x_0, u_0) \right\}$$

konzentriert. Durch $\cdot$ anstelle des Arguments werden dabei Funktionen von ihren Werten unterschieden.

Setzen wir $u = 0$, so ergibt sich

$$\int_\Lambda \int_0^T \psi_x'(\tau, \lambda)\, x(\tau)\, d\tau\, d\mu(\lambda) - \langle J_1' x(0) + J_2' x(T), c\rangle = \tag{2}$$

$$= x^* \left(x(\cdot) - x(0) - \int_0^{\cdot} \varphi_x'(\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right).$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man ähnlich wie in [11] und [6] eine Darstellung für x^*. Es gilt

$$x^*(v) = -\langle J_1' v(0) + J_2' v(T), c\rangle + \int_0^T \rho(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

mit

$$x(\cdot) = v(\cdot) + \Phi(\cdot) \int_0^{\cdot} \Phi^{-1}(\tau)\, \varphi_x'(\tau)\, v(\tau)\, d\tau$$

und

$$\rho(\tau) = \int_\Lambda \left[\psi_x'(\tau, \lambda) + \Phi^{-1}(\tau)\, \varphi_x'(\tau) \int_\tau^T \psi_x'(s, \lambda)\, \Phi(s)\, ds \right] d\mu(\lambda) -$$

$$- \langle J_2' \Phi(\tau)\, \Phi^{-1}(\tau)\, \varphi_x'(\tau), c\rangle$$

für alle $\tau \in [0, T]$. Dabei ist Φ das in 0 zur Einheismatrix normierte Fundamentalsystem des linearen Differenzialgleichungssystems

$$\frac{d}{dt} x(t) = \varphi_x'(t)\, x(t), \qquad t \in [0, T].$$

Es sei $p(\tau) = J_2'^* \cdot c - \int_\tau^T \rho(s)^*\, ds$, $\tau \in [0, T]$. Dann folgt aus (2) durch partielle Integration

$$\int_0^T \left(\rho(\tau) + p(\tau)^*\, \varphi_x'(\tau) - \int_\Lambda \psi_x'(\tau, \lambda)\, d\mu(\lambda) \right) v(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left[(J_1'^* + J_2'^*)\, c - \int_0^T \rho^*(\tau)\, d\tau \right] v(0) = 0.$$

Da v beliebig aus $C[0, T]^n$ ist, folgt

$$\frac{d}{dt} p(t) = -\varphi_x'^*(t) \cdot p(t) + \int_\Lambda \psi_x'(t, \lambda)^*\, d\mu(\lambda) \tag{4}$$

für fast alle $t \in [0, T]$; ausserdem erfüllt p die Bedingungen

$$p(0) = -J_1'^* \cdot c \quad \text{und} \quad p(T) = J_2'^* \cdot c. \tag{5}$$

(1) impliziert noch die Ungleichung

$$x^* \left(-\int_0^T \varphi_u'(\tau) u(\tau) d\tau \right) \leqslant \int_\Lambda \left[\int_0^T \psi_u(\tau, \lambda) d\tau \right] d\mu(\lambda)$$

für alle $u \in L_\infty[0, T]^m$ mit $u_0(t) + u(t) \in U$ fast überall in $[0, T]$. Wegen (3) folgt dann

$$\int_0^T \left[p(\tau)^* \varphi_u'(\tau) - \int_\Lambda \psi_u'(\tau, \lambda) d\mu(\lambda) \right] \cdot [u(\tau) - u_0(\tau)] d\tau \leqslant 0$$

für alle $u \in L_\infty[0, T]^m$ mit $u(t) \in U$ fast überall in $[0, T]$. Hieraus erhalten wir das folgende lokale Pontryaginsche Maximumprinzip genauso wie in [2] (vgl. auch [6]):

SATZ 4. *Unter den oben gemachten Voraussetzungen gibt es ein* $c \in \mathbf{R}^{2n}$ *und eine absolut stetige Abbildung* $p \in C[0, T]^n$, *die im Falle* $c = 0$ *nicht identisch verschwindet, die adjungierte Differentialgleichung* (4) *fast überall in* $[0, T]$ *löst, die Randbedingungen* (5) *erfüllt und für die die Ungleichung*

$$\max_{u \in U} H(x_0(t), u, p(t)) \leqslant H(x_0(t), u_0(t), p(t))$$

mit

$$H(x_0(t), u, p(t)) := \left[p(t)^* \varphi_u'(t) - \int_\Lambda \psi_u'(t, \lambda) d\mu(\lambda) \right] \cdot u$$

fast überall in $[0, T]$ *gilt.*

Bemerkung. In [3] wird das folgende Steuerungsproblem studiert: Es ist eine Trajektorie x und eine Steuerung u zu bestimmen, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} x(t) = \bar{\varphi}(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T]$$

genügen, Nebenbedingungen der Art

$$J(x(t_0), x(T)) = 0,$$

$$u(t) \in U \text{ fast überall in } [t_0, T]$$

erfüllen und die Kostfunktion

$$f(x, u) = \max_{\lambda \in \Lambda} \int_{t_0}^{T} \bar{\psi}(x(\tau), u(\tau), \lambda) dt$$

zum Minimum nachen. Dabei ist $U \subseteq \mathbf{R}^m$ beliebig.

Mit Hilfe einer Zeittransformation von Dubovitskii und Milyutin [1] lässt dieses Problem sich auf den Fall zurückführen, wenn $t_0 = 0$, $T = 1$, $m = 1$, $\varphi(x, u) = u\bar{\varphi}(x, \tilde{u}_0)$, $\psi(x, u, \lambda) = u\bar{\psi}(x, \tilde{u}_0, \lambda)$ mit gegebenem $\tilde{u}_0$ und $U = \{u \in \mathbf{R} \mid u \geqslant 0\}$ ist. Sind die Funktionen $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ und J stetig und besitzen sie dezüglich x stetige Ableitungen, so folgt das in [3] erhaltene globale Maximumprinzip aus dem Satz 4.

LITERATUR

[1] Dubovitskii, A. Ya., and A.A. Milyutin, *Extremum Problems in the Presence of Restrictions*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics **5**, 3, 1—80 (1965).

[2] Girsanov, I.V., *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems*, Lecture Notes in Economiecs and Mathematical Systems 67, Berlin — Heidelberg — New York, **1972**, Springer — Verlag.

[3] Gurin, L.G. and E.M. Stoljarova, *The Maximum Principle in a Minimax Problem*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics **13**, 5, 1175—1185 (1973).

[4] Hoffmann, K.H. und I. Kolumbán, *Verallgemeinerte Differenzierbarkeitsbegriffe und ihre Anwendung in der Optimierungstheorie*, Computing **12**, 17—41 (1973).

[5] Köthe, G., *Topologische lineare Räume I*. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1966.

[6] Lempio, F., *Tangentiamannigfaltigkeiten und infinite Optimierung*, Habilitationsshrift, Universität Hamburg, 1972.

[7] Ljusternik, L.A., und W.I. Sobolew., *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, Akademie-Verlag, 1968.

[8] Nashed, M.Z., *Differentiability and Related Properties of Nonlinear Operators*, Some Aspects of the Role of Differentials in Nonlinear Funktional Analysis, in: L.B. Rall (ed.): Nonlinear Funktional Analysis and Applications, New York — London, Academie Press, 103—309, 1971.

[9] Pshenichnyi, B.N., *Necessary Conditions for an Extremum*, New York, 1971, Marcel Dekker. Inc..

[10] I. Warga, *Minimax problems in the calculus of variations*. Michigan Math. J. **12**, 3, 289—311 (1965).

[11] Werner, J., *Lagrangesche Variationsprobleme*, Vortrag anlässlich des Symposiums über infinite Optimierung und optimale Steuerungen am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Hamburg, 1972.

Eingegangen am 12. XII. 1973.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj,
Facultatea de Matematică-Mecanică,
Catedra de Analiză