REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, Tome 3, N° 1, 1974, pp. 63–71

NOTE SUR UN GENRE D'EXTENSIONS DU THÉORÈME DE CONTRACTION DE BANACH

par

ANDREI NEY

(Cluj)

En 1962 a paru une note de E. RAKOTCH [8], dont le but essentiel est d'étendre le bien connu théorème de contraction de BANACH [1], dans un espace métrique complet (E, ρ) *remplaçant le facteur numérique de contraction* α $(0 < \alpha < 1)$, *dans*

$$\rho(Ax', Ax'') \leqslant \alpha\, \rho(x',x'') \qquad (x',x'' \in E,\ x' \neq x'') \tag{1}$$

par un facteur fonctionnel, noté $\alpha(\rho(x',x''))$, *dépendant de la distance des points* $x', x'' \in E$, *et prenant ses valeurs dans l'intervalle* $[0,1[$ *en décroissant si* ρ *décroît* (l'opérateur A applique E dans E, comme on le sait bien).

En 1965 a paru un article de A. NEY [6], dans lequel *nous remplaçons dans l'inégalité* (1) *de Banach, le facteur numérique* α *par un facteur fonctionnel* noté $\alpha(x', x'')$, *dépendant directement des points* $x', x'' \in E$, *étant soumis au commencement à la seule condition d'être non-négatif et supérieurement borné, puis qu'il prenne ses valeurs dans l'intervalle* $[0,1[$. On remarque, que $\alpha(x',x'')$ représente toujours une borne supérieure du *„taux d'écart des images"* : $\frac{\rho(Ax', Ax'')}{\rho(x', x'')}$ (c'est-à-dire la différence divisée de A sur les noeuds x',x'' distincts). Nous reproduisons notre

THÉORÈME 1. *Soit* A *un opérateur qui applique l'espace métrique complet* (E, ρ), *dans lui-même, pour chaque couple d'éléments* $x', x'' \in E$ $(x' \neq x'')$, *étant valable l'inégalité*

$$\rho(Ax', Ax'') \leqslant \alpha(x', x'')\, \rho(x', x''), \tag{2}$$

où α *est une fonctionnelle appliquant* $E^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in E\}$ *dans* $[0, a[$, $a \in R_+$. *Si pour la suite* $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\,;\ n = 0,1,\ldots\}$ *correspondant à la suite* $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *obtenue à l'aide de la récurrence*

$$x_{n+1} = A x_n \quad (n = 0, 1, \ldots; \ x_0 \in E) \tag{3}$$

a lieu — pour chanque n *— l'inégalité*

$$c_n - c_{n+1}\,\alpha(x_n, x_{n+1}) \geqslant \mu\,\alpha(x_n, x_{n+1}), \tag{4}$$

où (c_n) *est une suite de nombres strictement positifs et* μ *est une constante strictement positive, alors existe* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in E$ *et* x^* *est un point fixe de* A. *(Si pour un certain* $n = n_0$ *on avait* $\alpha(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$, *alors le point fixe serait* $x^* = x_{n_0+1}$*). Si en particulier* $a = 1$, *donc* $0 \leqslant \alpha(x', x'') < 1$ *— (c'est le cas de la „contraction faible") — et (4) ayant toujours lieu, alors le point fixe est unique et il est indépendant de l'élément initial* x_0. *L'approximation de* x^* *par* x_n *est donnée par*

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{\rho(x_0, x_1)}{\mu}\left(c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\alpha(x_{k-1}, x_k) - b\right), \tag{5}$$

où

$$b = \lim_{n\to\infty} c_n \prod_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1}, x_k). \tag{5'}$$

Quelques ans plus tard, ont été publiés des travaux de même genre, qui partent dans leurs démonstrations en essence de la même idée que [6]. Citons-les : 1967 — N. GHEORGHIU [2], 1968 — ŞT. NICZKY [7], 1969 — G. GOLDNER [3]. Nous considérons utile de donner du relief à cette modeste idée, de telle façon qu'elle nous servisse sussi pour pousser plus loin le théorème de contraction, jusqu'à des *conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un point fixe*. Des applications immédiates seront aussi présentées.

Rappelons, que dans la démonstration universellement connue du théorème de Banach on part de l'inégalité généralisée du triangle

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \quad (n, m \in N, \ m > n), \tag{6}$$

puis, du fait que le terme général de la série $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$ est majoré par le terme général de la série géométrique convergente $\Sigma\alpha^k \rho(x_0, x_1)$, résulte que la suite (x_m) est une suite Cauchy.

Dans le cas envisagé par (2) il peut arriver que la série $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$ — si elle est convergente — converge si lentement, que sa convergence ne peut pas être mise en évidence par la comparaison avec une série géométrique (dont le quotient α satisfait $0 < \alpha < 1$). Dans ce cas *il faut étudier directement la série* $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$, *pour en établir la nature*. Dans les conditions de l'inégalité (2) la série en cause a la forme analytique développée

$$\rho(x_0, x_1)\sum_{(n)}\prod_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1}, x_k)\,; \text{ et on note } u_n = \prod_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1}, x_k). \tag{7}$$

La condition (4) n'est pas autre chose, que l'application cu critérium de convergence de Kummer à la série à termes positifs Σu_n. La „série des produits finis" telle que (7), est essentielle dans les extensions du théorème de Banach et elle est mise en oeuvre par les auteurs cités, [2], [7], [3], sous une forme adaptée pour leurs besoins. (Remarquons encore, qu'une représentation analytique du teme général d'une série à temes positifs et convergente, quelconque, moyennant le produit fini, est donnée déja dans [5]).

A p p l i c a t i o n 1. Nous metterons dans une nouvelle lumière le rôle du célèbre rapport de d'Alembert, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour une série numérique, réelle ou complexe, à termes non-nuls. Considérons la suite (s_n) des sommes partielles d'une telle série Σu_n. On conçoit *l'opérateur séquentiel* $\mathcal{S}$, qui fait correspondre au terme s_n, le terme suivant, s_{n+1}, donc $s_{n+1} = \mathcal{S} s_n$ $(n \in N)$. L'égalité triviale

$$|s_{n+1} - s_n| = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \cdot |s_n - s_{n-1}| \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

peut être transcrite dans l'espace métrique $\mathbb{C}$, à l'aide de l'opérateur séquentiel ci-dessus introduit

$$\rho(\mathcal{S} s_n, \mathcal{S} s_{n-1}) = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \rho(s_n, s_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

et le rôle de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$[1)] apparaît tout de suite, comme un *„taux d'écart des immages"*. Dans le cas des séries numériques à termes non-nuls, pour lesquelles $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$, l'opérateur séquentiel $\mathcal{S}$ est une contraction, et existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$, donc Σu_n converge. On mentionne, que l'alternative

1) Bien entendu, ici $\alpha(s_n, s_{n-1}) = \left|\frac{\mathcal{S} s_n - s_n}{s_n - s_{n-1}}\right| = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

de convergence du critérium de d'Alembert est un cas particulier du théorème classique de Banach, qui lui-même est obtenu comme un cas particulier de notre théorème 1, en faisant dans (4) $c_n = 1$ $(n \in N)$; en effet, dans ce cas il résulte de (4) l'inégalité

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{1+\mu} = \alpha < 1 \quad (n \in N).$$

A p p l i c a t i o n 2. Dans [6] nous avons donné un exemple où la suite $\{\alpha(x_n, x_{n+1})\,;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ *peut surpasser l'unité*, mais, dans les conditions bien précisées dans [4], cette suite a deux points d'accumulation, l'un α' $(0 < \alpha' < 1)$ et l'autre α'' $(1 < \alpha'' < +\infty)$, tellement que $\alpha'\alpha'' < 1$. Alors, l'opérateur A aura — en concordance avec le théorème 1 — un point fixe.

A p p l i c a t i o n 3. Soit la relation de récurrence

$$z_{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}\, z_{n+1} - \frac{n}{n+2}\, z_n \quad (n \in N) \tag{9}$$

donnée dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Quelle est la nature d'une suite engendrée par (9), étant donnés les éléments initiaux $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, mais $z_2 \neq z_1$? On voit facilement, que (9) peut être mise sous la forme

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{n}{n+2}(z_{n+1} - z_n), \text{ d'où } |z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{n}{n+2}|z_{n+1} - z_n|$$

et d'ici, avec une autre notation — moyennant l'opérateur séquentiel $\mathcal{S}$, rencontré dans l'exemple 1 — on obtient

$$\rho(\mathcal{S}z_{n+1}, \mathcal{S}z_n) = \frac{n}{n+2}\rho(z_{n+1}, z_n).$$

Dans ce cas particulier de la contraction faible relativisée à une trajectoire, le rôle de $\alpha(z_n, z_{n+1})$ est joué par une fonction dépendant directement de n, c'est-à-dire $\alpha(z_n, z_{n+1}) = \dfrac{n}{n+2} < 1$ $(n \in N)$, et l'inégalité non-stricte, (4), est satisfaite comme égalité, avec $c_n = n$ et $\mu = 1$, indépendemment de z_1 et de $z_2 \neq z_1$, donc chaque trajectoire $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n \ldots}$ nous conduit au même point fixe, c'est-à-dire (9) engendre seulement des suites (z_n) convergentes dans $\mathbb{C}$.

O b s e r v a t i o n 1. *De l'inégalité,* (6) *on peut tirer la conclusion, que la suite* (x_n) *est une suite Cauchy, si la série* $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$ converge ; mais du seul fait, que la série $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$ diverge, on ne peut rien dire à l'égard du caractère de (x_n) d'être ou non une suite Cauchy. Pour que

la convergence de la série $\Sigma\rho(x_k, x_{k+1})$ soit étroitement liée au caractère de (x_n) d'être une suite Cauchy, — il est suffisant qu'on se trouve dans un tel espace métrique ou bien sur une telle trajectoire d'un espace métrique, que la distance jouisse de la propriété de „*sous-additivité modérée*", c'est-à-dire : qu'*il existe une constante* K_0, *tel que*

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant K_0\, \rho(x_n, x_m) \quad (n,m \in N,\ \forall m > n) \tag{10}$$

(l'idée en est, que „la ligne poligonale $\overline{x_n x_{n+1} \ldots x_m}$" ne soit beaucoup plus longue que la „segment $\overline{x_n x_m}$"). Dans ce contexte sera possible d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un point fixe. On envisage, tout d'abord, un tel espace.

U n c ô n e à n o r m e m o d é r é m e n t s o u s-a d d i t i v e. Soit $\mathfrak{U}^{(\nu)}$ *un espace unitaire* ν*-dimmensionnel, dont* $(e_k)_{k=1}^{\nu}$ *est une base orthonormale* ; alors un élément quelconque, $x \in \mathfrak{U}^{(\nu)}$, aura comme représentation unique $x = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k e_k$ où $\lambda_k \in R$. Soit $\mathfrak{K}$ *le cône des éléments ayant pour représentation*

$$x = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k e_k\,;\ \lambda_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{11}$$

Bien entendu $||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k^2} < \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k$. Définissons aussi les „*cosinus-directeurs*" α_k $(k = 1, \ldots, \nu)$, par

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k^2}} \quad (k = 1, \ldots, \nu)\,;\ \text{évidemment} \sum_{1}^{\nu} \alpha_k^2 = 1. \tag{12}$$

On aura

$$\sum_{k=1}^{\nu} ||\lambda_k e_k|| = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sqrt{\sum_{1}^{\nu} \lambda_k^2} = \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k\right) \cdot ||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k\right) \cdot \left\|\sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k e_k\right\|. \tag{13}$$

On pose la question : quelle est la valeur maxima que $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ peut atteindre ? Dans ce but on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \mu) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k + \mu\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2 - 1\right), \quad \text{avec } \alpha_k > 0 \ (k = 1, \ldots, \nu),$$

d'où le système classique pour annuler les dérivées partielles :

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi'_{\alpha_k} = 1 + 2\mu\alpha_k = 0 & (k = 1, \ldots, \nu) \\ \Phi'_\mu = \sum_1^\nu \alpha_k^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

On en tire : $\alpha_k = -\frac{1}{2\mu}$, $\mu = -\frac{1}{2\alpha_k}$, d'où $\mu < 0$; puis $\sum_1^\nu \alpha_k^2 = \sum_1^\nu \frac{1}{4\mu^2} = 1$,

d'où $\frac{\nu}{4\mu^2} = 1$ et ainsi $\mu = -\frac{\sqrt{\nu}}{2}$ et $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, donc $\max \sum_{k=1}^\nu \alpha_k = \frac{\nu}{\sqrt{\nu}} = \sqrt{\nu}$.

Ce résultat introduit dans (13), donne

$$(15)\qquad \sum_{k=1}^\nu ||\lambda_k e_k|| \leqslant \sqrt{\nu}\left\|\sum_{k=1}^\nu \lambda_k e_k\right\|,$$

ce qui exprime la *relation d'ordre entre la norme d'un élément x du cone* $\mathcal{K}$ *et la somme des normes de ses composantes*. On considère n éléments quelconques de $\mathcal{K}$, n nombre naturel arbitraire :

$$\{x^{(i)} \in \mathcal{K},\ i = 1, \ldots, n\},\ \text{pour lesquels}\ x^{(i)} = \sum_{k=1}^\nu \lambda_k^{(i)} e_k\ (\lambda_k^{(i)} > 0)$$

et leur somme est $x = \sum_{i=1}^n x^{(i)}$. On aura

$$(16)\qquad x = \sum_{i=1}^n x^{(i)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^\nu \lambda_k^{(i)} e_k = \sum_{k=1}^\nu \left[\sum_{i=1}^n \lambda_k^{(i)}\right] e_k = \sum_{k=1}^\nu \Lambda_k e_k,$$

où on a noté $\Lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(i)}$ (Λ_k étant la composante d'ordre k de x, dans $\mathcal{U}^{(\nu)}$, et on aura bien entendu $\Lambda_k > 0$ $(k = 1, \ldots, \nu)$. Conformément à (15),

$$\sum_{k=1}^\nu ||\Lambda_k e_k|| \leqslant \sqrt{\nu}\left\|\sum_{k=1}^\nu \Lambda_k e_k\right\|,$$

et en continuant — toujours par minoration — on obtient

$$\sqrt{\nu}\left\|\sum_{k=1}^\nu \Lambda_k e_k\right\| \geqslant \sum_{k=1}^\nu ||\Lambda_k e_k|| = \sum_{k=1}^\nu \Lambda_k = \sum_{k=1}^\nu \sum_{i=1}^n \lambda_k^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^\nu \lambda_k^{(i)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^\nu ||\lambda_k^{(i)} e_k|| \geqslant \sum_{i=1}^n \left\|\sum_{k=1}^\nu \lambda_k^{(i)} e_k\right\| = \sum_{i=1}^n ||x^{(i)}||,$$

d'où — vu aussi (16) —

$$(17)\qquad \sum_{i=k}^n ||x^{(i)}|| \leqslant \sqrt{\nu}\left\|\sum_{k=1}^\nu \Lambda_k e_k\right\| = \sqrt{\nu}\left\|\sum_{i=1}^n x^{(i)}\right\|.$$

Ainsi, on peut dire, que *la somme des normes d'un nombre fini et quelconque, n, d'éléments du cone* $\mathcal{K}$, *ne dépasse pas la norme de cette somme multipliée par* $\sqrt{\nu}$; ça veut dire que *dans* $\mathcal{K}$ *la norme est modérément sous-additive*. Comme conséquence, on peut énoncer le

THORÈME 2. *Si A applique l'éspace unitaire ν-dimmensionnel* $U^{(\nu)}$ *(complet) dans lui-même, A satisfaisant à l'inégalité* (2), *alors l'inégalité* (4) *est suffisante pour que A ait un point fixe dans* $U^{(\nu)}$. *Si la suite engendrée par* (3) *est telle, que pour ses termes : soit toutes les différences de la forme* $x_k - x_{k+1}$, *soit celles de la forme* $x_{k+1} - x_k$ *(pour* $k = 0, 1, \ldots$) *fassent part du cône* $\mathcal{K}$ (et ainsi la distance $\rho(x_k, x_{k+1}) = ||x_k - x_{k+1}||$, se soummet à la sous-additivité modérée car dans $\mathcal{K}$ la norme s'y soummet) *alors l'inégalité* (4) *est aussi nécessaire*[2] *pour qu'on aboutisse à un point fixe* $x^* \in U^{(\nu)}$, *par la trajectoire* (x_n).

Application 4. Soit (x_n) une suite de nombres réels ; pour qu'elle soit (non-strictement) convexe respectivement concave il faut et il suffit qu'elle satisfasse à

$$(18)\qquad \begin{cases} a) & x_{n+1} \leqslant \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)\, x_{n+2} \quad (n \in N) \\ & \text{respectivement à} \\ b) & x_{n+1} \geqslant \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) x_{n+2} \quad (n \in N), \end{cases}$$

où (λ_n) est une suite prenant ses valeurs dans $]0,1[$, d'ailleurs complètement arbitraire. Dans ces conditions, les relations de récurrence

$$(19)\qquad \begin{cases} a) & x_{n+2} \geqslant \frac{1}{1-\lambda_n} x_{n+1} - \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} x_n \quad (n \in N) \\ & \text{respectivement} \\ b) & x_{n+2} \leqslant \frac{1}{1-\lambda_n} x_{n+1} - \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} x_n \quad (n \in N), \end{cases}$$

[2] On rappelle que le critérium de Kummer exprime une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une série à termes positifs, [5].

engendrent des suites (x_n) convexes respectivement concaves, suivant qu'on est dans le cas (19-a) respectivement (19-b), dès que l'on a donné *deux termes initiaux distincts* $x_1, x_2 \in R$; on mentionne que x_n et x_{n+1} $(n \in N)$ étant connus, on peut choisir x_{n+2} en respectant tout-de-même l'inégalité en cause. Dans le cas de la convexité, (a), nous intéresseront les suites lesquelles satisferont à partir d'un indice n_0 l'inégalité $x_n \geqslant x_{n+1}$, tandis que dans le cas de la concavité, (b), les suites pour lesquelles aura lieu $x_n \leqslant \leqslant x_{n+1}$ si $n > n_0$. Dans ces deux cas, les formules (19) deviendront — après une légère transformation —

$$(20) \quad \begin{cases} a) \quad x_{n+1} - x_{n+2} \leqslant \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n+1}) \text{ et } x_n \geqslant x_{n+1} \; (n > n_0) \\ \text{respectivement} \\ b) \quad x_{n+2} - x_{n+1} \leqslant \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_{n+1} - x_n) \text{ et } x_n \leqslant x_{n+1} \; (n > n_0). \end{cases}$$

Une fois ces suites étant engendrées, on conçoit l'opérateur séquentiel $\mathcal{S}$ tel que $x_{n+1} = \mathcal{S}\, x_n \; (n > n_0)$; avec la distance habituelle dans R^1, le système (20) prend la forme, aussi dans le cas de (20-a) que dans celui de (20-b)

$$(21) \qquad \rho(\mathcal{S}\, x_n, \; \mathcal{S}\, x_{n+1}) \leqslant \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\, \rho\,(x_n, x_{n+1}) \qquad (n > n_0).$$

Les suites (x_n) étant monotones, la distance est strictement additive sur la trajectoire $\overline{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots}$ (donc elle est bien modérément sous-additive). Alors :

une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite convexe et monotonément décroissante à partir d'un indice n_0, engendrée par (19-a), — *respectivement, pour qu'une suite concave et monotonément croissante à partir d'un indice n_0, engendrée par* (19-b) *soit convergente, est — conformément à* (4) —

$$(22) \qquad c_n - c_{n+1}\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \geqslant \mu\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \qquad (n < n_0).$$

Puisque, le critérium de Kummer a aussi une *forme égalité* (avec la constante $\mu = 1$) voir [5] et aussi note[2]), la condition nécessaire et suffisante peut être mise sous la forme équivalente à (22), notamment

$$(23) \qquad c'_n \frac{1-\lambda_n}{\lambda_n} - c'_{n+1} = 1, \qquad c'_n > 0 \qquad (n > n_0).$$

De (23) on peut obtenir

$$(24) \qquad \lambda_n = \frac{c'_n}{1 + c'_n + c'_{n+1}}, \qquad c'_n > 0 \qquad (n > n_0) ;$$

cette formule (24) *est une représentation analytique de la suite* (λ_n) figurant dans (19), *pour que ces récursions engendrent des suites* (x_n), *convergentes dans les conditions de convexité* (concavité) *et de monotonie, précisées plus haut.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Banach, S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales.* Fundamenta Math. **3**, 133–181 (1922).

[2] Gheorghiu, N., *Teorema contracțiilor în spații uniforme.* Studii și Cerc. Mat. Acad. R.S. Romania, **19**, 119–122 (1967).

[3] Goldner, G., *On successive approximation for set valued mappings.* Proc. Conf. Constructive Theory of Functions. Budapest, 189–193 (1969).

[4] Ney, A., *Extinderea domeniului de aplicabilitate al criteriului de convergență al lui d'Alembert.* Gaz. Mat. Fiz. București. Seria A. **12**, 709–712 (1958).

[5] — *Contributions à l'étude de la rapidité de convergence des séries à termes positifs.* Mathematica (Cluj), **4** (**27**), 77–105 (1962).

[6] — *O extindere a teoremei de contracție a lui Banach în spații metrice.* Studia Univ. „Babeș-Bolyai" Ser. Math.-Phys. 41–46 (1965).

[7] Niczky, Șt., *Asupra unor teoreme de punct fix în spații uniforme complete.* Analele Ști. Univ. „Al. I. Cuza" Iași Sect. 1. Matematică. **2**, 391–397 (1968).

[8] Rakotch, E., *A note on contractive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 459–465 (1962).

Reçu, le 13. XII. 1973.

Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj
Facultatea de Matematică-Mecanică
Catedra de analiză