REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 3, N° 2, 1974, pp. 215–223

SUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES INTERPOLATOIRES DANS UN INTERVALLE DONNÉ

par

DUMITRU RIPEANU

(à Cluj)

1. Dans la note [1] on a proposé un procédé pour déterminer des classes d'équations différentielles linéaires, d'ordre n et de forme normale qui sont interpolatoires dans un intervalle fermé donné $I = [a,b]$ $(a < < b)$.

Rappelons la définition bien connue selon laquelle l'équation différentielle

$$(1) \qquad y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_s(x)y^{(n-s)}(x) + \ldots + \\ + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = 0$$

(où $a_s(x) \in C(I)$, $s = \overline{1,n}$) est interpolatoire dans I (ou possède la propriété $I_n(I)$) si toute solution non-identiquement nulle de cette équation possède au plus $n-1$ racines dans cet intervalle (chaque étant comptée autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique).

Dans la note présente on propose un autre procédé pour construire des classes d'équations de la forme (1) qui possèdent la propriété $I_n(I)$. À la différence du procédé de [1], celui qui est proposé dans la présente note est un procédé itératif : à partir d'une classe (Γ_n) d'équations d'ordre n, à la propriété $I_n(I)$, on construit une classe d'équations (Γ_{n+1}) d'ordre $n+1$, à la propriété $I_{n+1}(I)$. Supposons donc qu'on connaît une classe (Γ_n), d'équations de la forme (1) à la propriété $I_n(I)$. On fera dans l'équation

$$(2) \qquad y^{(n+1)} + b_1(x)y^{(n)} + \ldots + b_s(x)y^{(n+1-s)} + \ldots + b_n(x)y' + b_{n+1}(x)y = 0$$

le changement

$$y = u(x)e^{\rho(x)} \tag{3}$$

où u est la nouvelle fonction inconnue, et ρ une fonction arbitraire de $C^{(n)}(I)$.

On écrira $\varphi(x) = \rho'(x)$ et on introduira les fonctions $P_s(x)$ par la relation $(e^{\rho(x)})^{(s)} = P_s(x)e^{\rho(x)}$, ce qui donne

$$P_{s+1}(x) = P_s'(x) + \varphi(x)P_s(x) \quad (s = 0,1, \ldots; \ P_0(x) \equiv 1). \tag{4}$$

On introduira également les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} B_{m,s}(\varphi, \bar{b}_{m-s}) = \sum\limits_{\sigma=0}^{m-s} C^s_{m-\sigma}b_\sigma(x)P_{m-s-\sigma}(x) \qquad (s = \overline{0,m-1}) \\ \text{donc} \\ B_{n+1,s}(\varphi, \bar{b}_{n+1-s}) = \sum\limits_{\sigma=0}^{n+1-s} C^s_{n+1-\sigma}b_\sigma(x)P_{n+1-s-\sigma}(x) \quad (s=\overline{0,n};\ b_0(x) \equiv 1) \end{array}\right. \tag{5}$$

où C^p_m est la symbole des combinaisons et $\bar{b}_p$ est la fonction — vecteur $(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_p(x))$.

Avec ces notations l'équation (2) se transforme par le changement (3) en l'équation

$$\sum_{s=0}^{n} B_{n+1,s}(\varphi, \bar{b}_{n+1-s})u^{(s)}(x) + u^{n+1}(x) = 0. \tag{6}$$

On supposera

$$B_{n+1,0}(\varphi, \bar{b}_{n+1}) \equiv 0 \text{ dans } \bar{I}, \tag{7}$$

et on écrira $v(x) = u'(x)$, L'équation (6) s'écrit alors

$$\sum_{s=0}^{n-1} B_{n+1,s+1}(\varphi, \bar{b}_{n-s})v^{(s)}(x) + v^{(n)}(x) = 0. \tag{8}$$

Si cette équation appartient à la classe (Γ_n), alors l'équation (2) appartient à une classe (Γ_{n+1}) à la propriété $I_{n+1}(I)$. En effet, si cette équation avait une solution $y_0(x)$ qui possède $n+1$ racines dans I, alors la solution $u_0(x)$ de l'équation (3) dans laquelle on fait $y(x) = y_0(x)$ possède les mêmes $n+1$ racines, de sorte que la solution $v(x) = u_0'(x)$ de l'équation (8) a selon le théorème de Rolle, n racines (au moins) dans I, ce qui contredit l'hypothèse de la propriété $I_n(I)$ pour la classe (I_n). On a établi donc le procédé suivant.

P r o c é d é 1. 1°. *On connaît une classe* (Γ_n) *d'équations de la forme* (1) *à la propriüété* $I_n(I)$.

2°. *On choisit arbitrairement les fonctions* $b_s(x)(s = \overline{1, n+1})$ *dans* $C(I)$ *et* $\rho(x)$ *dans* $C^{(n+1)}(I)$ *et on écrit à l'aide de* (4) *et* (5) *l'équation* (8) *et la fonction* $B_{n+1,0}$ $(\varphi, \bar{b}_{n+1})$ *de* (7).

3°. *On assure la relation* (7).

4°. *On assure l'appartenance de l'équation* (8) *à la classe* (Γ_n).

5°. *Si les coefficients* $b_s(x)(s = \overline{1, n+1})$ *remplissent les conditions des points* 3° *et* 4°, *alors l'équation* (2) *possède la propriété* $I_{n+1}(I)$.

Il est bien entendu que le fait de remplir les conditions 3° et 4° réduit de l'arbitrarité des coefficients $b_s(x)(s = \overline{1, n+1})$ de l'équation (2), éventuellement de la fonction $\rho(x)$ de (3). Ces conditions ne déterminent cependant pas entièrement, ces fonctions, de sorte qu'on obtient une classe (Γ_{n+1}) d'équations à la propriété $I_{n+1}(I)$.

2. On indiquera, à titre d'application du procédé ci-dessus, un moyen très simple pour obtenir une classe (Γ_n) d'équations, à la propriété $I_n(I)$, qui dépend de n fonctions arbitraires.

Pour ce faire, on fera en (2) $n = 2$, ce qui donne l'équation $y^{(3)} + b_1(x)y'' + b_2(x)y' + b_3(x)y = 0$ auquel cas l'équation (8) prend a forme

$$v'' + (3\varphi_3 + b_1)v' + (3\varphi_3' + 3\varphi_3^2 + 2b_1\varphi_3 + b_2)v = 0 \tag{9}$$

et la relation (7) s'écrit $\varphi_3'' + 3\varphi_3\varphi_3' + \varphi_3^3 + b_1(\varphi_3' + \varphi_3^2) + b_2\varphi_3 + b_3 = 0$ (on a désigné la fonction φ de l'énoncé du procédé par φ_3, vu qu'on détermine une classe d'équations du 3 — ème ordre). On peut remplir cette condition en prenant, par exemple

$$b_3 = -\,[\varphi_3'' + 3\ \varphi_3\varphi_3' + \varphi_3^3 + b_1(\varphi_3' + \varphi_3^2) + b_2\varphi_3]. \tag{10}$$

On assurera la propriété $I_2(I)$ pour l'équation (9) en prenant, par exemple

$$b_2 = g - (3\varphi_3' + 3\ \varphi_3^2 + 2\ b_1\varphi_3) \tag{11}$$

où $g \in C(I)$ et $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$ ([3]). On obtient donc, en écrivant en (10) et (11) $b(x)$ pour $b_1(x)$ la

P r o p o s i t i o n 1. *L'équation*

$$y^{(3)} + by'' + (g - 3\varphi_3' - 3\varphi_3^2 - 2b\,\varphi_3)y' + [-\,\varphi_3'' - g\varphi_3 + 2\varphi_3^3 + \\ + b(-\,\varphi_3' + \varphi_3^2)]y = 0 \tag{12}$$

où b *et* g *sont des fonctions arbitraires de* $C(I)$, *la dernière non-positive dans* I *et* φ_3 *est une fonction arbitraire de* $C^{(2)}(I)$ *possède la propriété* $I_3(I)$.

On a obtenu ainsi une classe Γ_3 d'équations à la propriété $I_3(I)$, qui dépend des trois fonctions arbitraires b, g et φ_3

En continuant le procédé, on suppose acquise une classe (Γ_n) d'équations à la propriété $I_n(I)$ de la forme

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-s}(x)y^{(s)} + \ldots + a_n\,(x)y = 0 \tag{13}$$

où les coefficients $a_s(x)$ $(s = \overline{1, n})$ dépendent de n fonctions arbitraires b, g, φ_3, φ_4, $\ldots$, φ_n, dont les deux premières de $C(I)$, la seconde non-positive dans I, et $\varphi_s \in C^{(s-1)}(I)$ $(s = \overline{3, n})$. On fera dans l'équation

$$y^{(n+1)} + b_1(x)y^{(n)} + \ldots + b_s(x)y^{(n+1-s)} + \ldots + b_n\,(x)y' + b_{n+1}(x)y = 0 \tag{14}$$

le changement $y = ue^{\rho_{n+1}}$, ce qui donne l'équation

$$\sum_{s=0}^{n} B_{n+1,\,s}(\varphi_{n+1}, \overline{b}_{n+1-s})u^{(s)} + u^{(n+1)} = 0 \quad (\varphi_{n+1}(x) = \rho'_{n+1}(x)).$$

On écrit $v(x) = u'(x)$, puis l'équation

$$B_{n+1,\,0}(\varphi_{n+1},\ \overline{b}_{n+1}) = 0 \tag{15}$$

et on identifie l'équation en la fonction v obtenue

$$\sum_{s=0}^{n-1} B_{n+1,\,s+1}(\varphi_{n+1},\ \overline{b}_{n-s})v^{(s)} + v^{(n)} = 0 \tag{16}$$

à l'équation (13)(en la fonction inconnue v), ce qui donne

$$B_{n+1,\,s+1}(\varphi_{n+1},\ \overline{b}_{n-s}) = a_{n-s}(x), \text{ c'est-à-dire } \sum_{\sigma=0}^{n-s} C_{n+1-\sigma}^{s+1} P_{n-s-\sigma}(x) b_\sigma(x) = a_{n-s}(x)$$

$$(s = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 0)$$

où la fonction φ de (4) est remplacée par la fonction φ_{n+1}. Ces relations donnent directement les coefficients b_1, b_2, $\ldots$, b_n, puis la relation (15), c'est-à-dire

$$\sum_{\sigma=0}^{n+1} P_{n+1-\sigma}(x) b_\sigma(x) = 0 \tag{17}$$

donne le coefficient b_{n+1}. On a obtenu de la sorte une classe (Γ_{n+1}) d'équations (14) à la propriété $I_{n+1}(I)$, qui dépend des $n+1$ fonctions arbitraires b, g, φ_3, φ_4, $\ldots$, φ_{n+1}, soumises aux restrictions mentionnées à propos de l'équation (13) auxquelles il faut évidemment ajouter la condition $\varphi_{n+1} \in C^{(n)}(I)$. On peut ainsi construire de telles classes d'équations, dont l'ordre peut être donné de manière arbitraire.

À titre d'exemple, on fera en (16) $n = 3$, ce qui donne l'équation

$$v^{(3)} + (b_1 + 4\varphi_4)v^{(2)} + [6(\varphi'_4 + \varphi_4^2) + 3b_1\varphi_4 + b_2]v' +$$

$$+ [4(\varphi''_4 + 3\varphi_4\varphi'_4 + \varphi_4^3) + 3(\varphi'_4 + \varphi_4^2)b_1 + 2\varphi_4 b_2 + b_3]\,v = 0$$

dont l'identification à l'équation en v de la proposition 1 donne des relations qui déterminent successivement les coefficients b_1, b_2, b_3. En remplaçant leurs expressions dans (17) (où l'on fait $\varphi = \varphi_4$ et $n = 3$), on obtient le coefficient b_4 et par suite la

P r o p o s i t i o n 2. L'équation

$$y^{(4)} + (b - 4\varphi_4)y^{(3)} + [g - 3(\varphi'_3 + 2\varphi'_4) - 3\varphi_3^2 + 6\varphi_4^2 - b(2\varphi_3 + 3\varphi_4)]\,y^{(2)} +$$

$$+ [-g(\varphi_3 + 2\varphi_4) - (\varphi''_3 + 4\varphi''_4) + 6\varphi_4(\varphi'_3 + 2\varphi'_4) + 2\varphi_3^3 + 6\varphi_3^2\varphi_4 -$$

$$- 4\varphi_4^3 + b(-\varphi'_3 - 3\varphi'_4 + \varphi_3^2 + 4\varphi_3\varphi_4 + 3\varphi_4^2)]y' + \{g\ (-\varphi'_4 + \varphi_3\varphi_4 +$$

$$+ \varphi_4^2) - \varphi_4^{(3)} + \varphi_4(\varphi''_3 + 4\varphi''_4) + 3\varphi_4'^2 + 3\varphi'_3\varphi'_4 - 3\ \varphi'_3\varphi_4^2 + 3\varphi'_4(\varphi_3^2 -$$

$$- 2\varphi_4^2) - 2\varphi_3^3\varphi_4 - 3\varphi_3^2\varphi_4^2 + \varphi_4^4 + b[-\varphi''_4 + \varphi'_3\varphi_4 + (2\varphi_3 + 3\varphi_4)\varphi'_4 -$$

$$- \varphi_4(\varphi_3 + \varphi_4)^2]\}y = 0$$

où b, g sont des fonctions arbitraires de $C(I)$ (la seconde non-positive dans I), et φ_3, φ_4 sont des fonctions arbitraires de $C^{(2)}(I)$, respectivement $C^{(3)}(I)$, possède la propriété $I_4(I)$.

3. On peut évidemment remplacer dans (3) la fonction e^ρ par toute autre fonction f de $C^{(n+1)}(I)$ qui ne s'annule pas dans cet intervalle. Bien que cette opération soit théoriquement inutile, vu qu'une telle fonction f peut toujours s'écrire sous la forme e^ρ avec $\rho = \log f \in C^{(n+1)}(I)$, on présentera la procédé 1 sous la forme qu'il prend par la substitution ci-dessus. Cette forme sera appelée procédé 2 et peut dans certains cas être d'un emploi plus commode que le procédé 1 où l'on fait $\rho = \log f$. On fera donc en (2) le changement de fonction inconnue $y = uf$ et on obtiendra l'équation

$$\sum_{s=0}^{n} B^*_{n+1,\,s}(f,\ \overline{b}_{n+1-s})u^{(s)}(x) + f(x)u^{(n+1)}(x) = 0 \tag{18}$$

où

$$(19)\quad \begin{cases} B^*_{m,s}(f, \bar{b}_{m-s}) = \sum_{\sigma=0}^{m-s} C^s_{m-\sigma} b_\sigma(x) f^{(m-s-\sigma)}(x) \ (s = \overline{0, m-1}) \\ \text{donc} \\ B^*_{n+1,s}(f, \bar{b}_{n+1-s}) = \sum_{\sigma=0}^{n+1-s} C^s_{n+1-\sigma} b_\sigma(x) f^{(n+1-s-\sigma)}(x) \ (s = \overline{0, n}). \end{cases}$$

(on a désigné par $\bar{b}_p$ la fonction-vecteur $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ et au cas $s = 0$, $\sigma = n + 1$ le symbole C^0_0 se remplace par 1).
Si

$$(20)\qquad B^*_{n+1,0}(f, \bar{b}_{n+1}) \equiv 0 \text{ dans } I,$$

alors, en écrivant $v(x) = u'(x)$, l'équation (18) s'écrit

$$(21)\qquad \sum_{s=0}^{n-1} B^*_{n+1,s+1}(f, \bar{b}_{n-s})\, v^{(s)}(x) + f(x) v^{(n)}(x) = 0.$$

Si l'équation (21) appartient à la classe (Γ_n) à la propriété $I_n(I)$, alors l'équation (2) appartient, comme on l-a remarqué au § 1 — à une classe (Γ_{n+1}) à la propriété $I_{n+1}(I)$.
On a établi donc le
Procédé 2. 1°. *On connaît une classe (Γ_n) d'équations de la forme (1), à la propriété $I_n(I)$.*
2°. *On prend arbitrairement les fonctions $b_s(s = \overline{1, n+1})$ dans $C(I)$ et la fonction f dans $C^{(n+1)}(I)$, cette dernière ne s'annulant pas dans I.*
On écrit à l'aide de (19) l'équation (21) et la fonction $B^*_{n+1,0}(f, \bar{b}_{n+1})$ de (20).
3°. *On assure la relation* (20).
4°. *On assure l'appartenance de l'équation* (21) *à la classe (Γ_n).*
5°. *Si les coefficients $b_s(s = \overline{1, n+1})$ remplissent les conditions des points 3° et 4°, alors l'équation* (2) *possède la propriété $I_{n+1}(I)$.*
4. On utilisera encore ce procédé pour obtenir une classe d'équations à la propriété $I_n(I)$, qui dépend de n fonctions arbitraires, ainsi qu'il a été fait à propos du procédé 1. Pour ce faire, on fera dans le procédé 2, $n = 2$, ququel cas (19) donne comme équation (21) (où l'on a écrit f_3 à la place de f):

$$(22)\qquad f_3 v^{(2)} + (3f_3' + b_1 f)v' + (3f_3^{(2)} + 2b_1 f_3' + b_2 f_3)v = 0$$

et (20) donne

$$(23)\qquad f_3^{(3)} + b_1 f_3^{(2)} + b_2 f_3' + b_3 f_3 = 0.$$

Ainsi qu'on l'a mentionné au § 2, l'équation (22) possède la propriété $I_2(I)$ si

$$(24)\qquad 3f_3^{(2)} + 2b_1 f_3' + b_2 f_3 = g$$

où g est une fonction arbitraire de $C(I)$, non-positive dans cet intervalle. En déduisant les valeurs de b_2 et b_3 de (23) et (24), et en écrivant b à la place de b_1, on obtient la
Proposition 3. *L'équation*

$$y^{(3)} + by^{(2)} + \frac{1}{f_3}(g - 3f_3^{(2)} - 2bf_3')y' + \\ + \frac{1}{f_3^2}(-f_3 f_3^{(3)} + 3f_3' f_3^{(2)} - gf_3' + b(2f_3'^2 - f_3 f_3^{(2)})]y = 0$$

où b et g sont des fonctions arbitraires de $C(I)$, la seconde non-positive dans I et f_3 est une fonction arbitraire de $C^{(3)}(I)$ qui ne s'annule pas dans I, possède la propriété $I_3(I)$. On a donc une classe (Γ_3) à la propriété $I_3(I)$, qui dépend des trois fonctions arbitraires b, g et f_3. Nous continuerons ainsi le procédé, à partir d'une classe (Γ_n) d'équations (13) *à la propriété $I_n(I)$ qui dépend de n fonctions arbitraires $b, g, f_3, f_4, \ldots, f_n$ dont $b, g \in C(I)$, g non-positive dans I et $f_s \in C^{(s)}(I)(s = \overline{3, n})$ ne s'annulant pas dans I. On fera en l'équation* (14) *le changement de fonction inconnue $y = f_{n+1} u$, où f_{n+1} est une fonction arbitraire de $C^{(n+1)}(I)$, ne s'annulant pas dans I, ce qui donne l'équation $\sum_{s=0}^{n} B^*_{n+1,s}(f_{n+1}, \bar{b}_{n+1-s})\, u^{(s)} + f_{n+1} u^{(n+1)} = 0$, avec $B^*_{n+1,s}(f_{n+1}, \bar{b}_{n+1-s})$ donnée par* (19). On écrit la condition

$$(25)\qquad B^*_{n+1,0}(f_{n+1}, \bar{b}_{n+1}) \equiv 0 \quad \text{dans} \quad I$$

et on identifie l'équation en l'inconnue $v = u'$ obtenue à l'équation (13) (en la même fonction inconnue), ce qui donne les relations

$$\sum_{\sigma=0}^{n-s} C^{s+1}_{n+1-\sigma} b_\sigma f_{n+1}^{(n-s-\sigma)} = a_{n-s} \ (s = n-1, n-2, \ldots, 0),$$

qui déterminent directement les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_n$, après quoi la relation (25), c'est-àdire $\sum_{\sigma=0}^{n+1} b_\sigma f_{n+1}^{(n+1-\sigma)} = 0$ donne le coefficient b_{n+1}. On a obtenu donc une classe (Γ_{n+1}) d'équations (14) à la propriété $I_{n+1}(I)$ qui dépend des $n+1$ fonctions arbitraires $b, g, f_3, f_4, \ldots, f_{n+1}$, soumises aux restrictions mentionnées à propos de l'équation (13), auxquelles il faut évidemment ajouter les conditions $f_{n+1} \in C^{(n+1)}(I)$ et f_{n+1} ne s'annule pas dans I. Nous omettrons la déduction — d'ailleurs immédiate — de l'équation du quatrième ordre, à la propriété $I_4(I)$ à l'aide du moyen ci-dessus, à partir de la proposition 3. On y obtient une classe (Γ_4) à la propriété $I_4(I)$ dépendant des 4 fonctions arbitraires b, g, f_3 et f_4 soumises aux restrictions sus-mentionnées.

5. Les procédés utilisés aux §§ 2 et 4 peuvent être appliqués en définissant — par exemple — la classe (Γ_n) de la manière suivante ([1]): On écrira, dans (5) à propos de l'équation (1).

$$A_s(x) = B_{n,n-s}(\varphi, \bar{a}_s) = \sum_{\sigma=0}^{s} C_{n-\sigma}^{n-s}\, a_\sigma(x)\, P_{s-\sigma}(x) \tag{26}$$

$$(s = \overline{1, n}\,;\ a_0(x) \equiv 1\,;\ C_0^0 = 1)$$

avec $P_s(x)$ définies dans (4). En posant les conditions $A_s(x) \equiv 0 (s = \overline{2, n})$, qui donnent directement les coefficients $a_s(x)$ $(s = \overline{2, n})$ de (1) sous la forme de polynomes du premier degré en a_1 dont les coefficients sont des polynomes en φ, φ', ..., $\varphi^{(s-1)}$, nous obtenons une classe (Γ_n) d'équations (1) à la propriété $I_n(I)$, qui dépend de deux fonctions arbitraires $a_1 \in C(I)$ et $\varphi \in C^{(n-1)}(I)$. A partir de cette classe on obtient par l'un des procédés employés aux §§ 2 ou 4 une classe (Γ_{n+1}) d'équations (2) à la propriété $I_{n+1}(I)$ qui dépend des trois fonctions arbitraires a_1, φ et $\varphi_{n+1} \in$ $\in C^{(n)}(I)$ (respectivement $f \in C^{(n+1)}(I)$, cette dernière ne s'annulant pas dans I).

Dans un autre exemple d'application des mêmes procédés nous prendrons comme classe (Γ_n) la classe d'équations (1) dont les coefficients satisfont aux relations $A_2(x) \equiv 0$ et $A_s(x) \equiv 0 (s = \overline{4, n})$ avec $A_s(x)$ données par (26), où

$$\varphi(x) = \frac{-(n-2)\, a_1(x)\, a_2(x) - n(n-2)\, a_2'(x) + 3\, n\, a_3(x)}{(n-2)[n(n-1) a_1'(x) + (n-1) a_1^2(x) - 2\, n\, a_n(x)]}$$

([1]). Ces $n - 2$ relations exigent a_1, $a_2 \in C^{(n)}(I)$, a_n, $a_3 \in C^{(n-1)}(I)$, $a_s \in$ $\in C(I)$ $(s = \overline{4, n-1})$. La relation $A_2(x) \equiv 0$ donne a_3 par une équation du type Riccati, après quoi les relations $A_s(x) \equiv 0$ $(s = \overline{4, n-1})$ donnent directement les coefficients $a_s (s = \overline{4, n-1})$, et la relation $A_n(x) \equiv 0$ donne a_n comme solution d'une équation non-linéaire du $n - 1$ — éme ordre. En appliquant les procédés en question, on obtient une classe (Γ_{n+1}) d'équations (2) à la propriété $I_{n+1}(I)$, qui dépend des trois fonctions arbitraires a_1, a_2 et φ_{n+1} (respectivement f_{n+1}) soumises aux restrictions ci-dessus mentionnées.

On peut aussi prendre comme classe (Γ_n) diverses classes dépendant de $p (2 \leqslant p \leqslant n)$ fonctions arbitraires, dont la construction est indiquée dans une note [2] qui doit bientôt paraître.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ripeanu, D., *Intervalles d'interpolation relatifs aux équations différentielles linéaires.* Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna May 19–25, 265–268 (1970).

[2] — *Intervalles d'interpolation pour les équations différentielles linéaires.* Mathematica **14** (**37**) 2, 363–368 (1972).

[3] Vallée-Poussin Ch, de la., *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Journal de Mathématiques pures et appliquées. **8**, 125–144 (1929).

Reçu le 11. I. 1974

Institutul de Calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România