REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION, Tome 3, N° 2, 1974, pp. 125–142

SUR LA REPRÉSENTATION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES

par

LASCU BAL et MARIA MIHOC

(à Cluj)

1. Il est bien connu que n'importe quelle équation à trois variables

$$F(z_1, z_2, z_3) = 0 \tag{1}$$

peut être représentée nomographiquement par un nomogramme à lignes côtées. Parce que tant la construction que l'utilisation des nomogrammes à lignes côtées présentent des difficultés, on a cherché à établir des classes d'équations qui peuvent être représentées par des nomogrammes à familles de droites, des nomogrammes à familles de cercles, ou à d'autres familles de courbes commodes au point de vue de la construction et de l'utilisation.

Il est clair que si l'équation satisfait à certaines conditions alors on peut obtenir des nomogrammes plus simples. Ainsi, si l'équation à trois variables peut être amenée à la forme canonique de Cauchy :

$$f_1(z_1)f_3(z_3) + f_2(z_2)g_3(z_3) + h_3(z_3) = 0, \tag{2}$$

ou à une forme particulière :

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0, \tag{3}$$

alors elle peut être représentée par un nomogramme à droites ou à points alignés.

Généralement, pour que l'équation (1) puisse être représentée par un nomogramme à points alignés, elle doit admettre une forme équivalente :

$$(4) \qquad F(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1 \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1 \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème de trouver les conditions dans lesquelles l'équation (1) peut être amenée à la forme (4) est connu dans la littérature mathématique sous le nom du problème de l'anamorphose.

Le problème général de l'anamorphose a été résolu complétement par T. H.GRONWALL [8], qui a établi la condition nécessaire et suffisante pour amener l'équation (1) à la forme équivalente (4). Cette condition a été exprimée par l'existence d'une intégrale commune pour un système de deux équations à dérivées partielles du deuxième ordre. À cause des difficultés qui surgissent dans les applications pratiques ,la solution donnée par Gronwall n'a qu'une importance théorique. Dans la pratique on a cherché des solutions plus simples, en particularisant l'équation à trois variables.

2. Dans le cas des équations à plus de trois variables, une représentation nomographique n'est généralement pas possible.

En vue de la représentation nomographique des équations à quatre variables et de la constitution des tableaux des valeurs de fonctions à quatre variables on a étudié des cas simples analogues aux cas des équations et des fonctions à trois variables.

Ainsi, pour les équations à quatre variables de la forme :

$$(5) \qquad F_{12}(z_1, z_2) = G_{34}(z_3, z_4)$$

on peut construire des nomogrammes composés à lignes côtées ou à points alignés.

Pour les équations à quatre variables :

$$(6) \qquad F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

qui peuvent être ramenées à la forme :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

où $f_i = f_i(z_i)$, $g_i = g_i(z_i)$, $i = 1, 2$, $f_{34} = f_{34}(z_3, z_4)$, $g_{34} = g_{34}(z_3, z_4)$, on peut construire des nomogrammes à points alignés constitués de deux échelles et d'un champ binaire.

On représente les équations de la forme :

$$(8) \qquad z_4 = F(f_{12} + f_3, g_{12}),$$

par des nomogrammes rhomboïdaux, mais pour les équations de la forme :

$$(9) \qquad \frac{f_4 - f_{23}}{g_4 - g_{23}} + \frac{f_1 - f_{23}}{g_1 - g_{23}} = 0,$$

on peut construire des nomogrammes à transparent en angle droit.

Il existe également des nomogrammes à compas — les nomogrammes de M. Ghersevanoff — auxquels correspondent les équations à quatre variables de la forme :

$$(10) \qquad (f_3 - f_{12})^2 + (g_3 - g_{12})^2 = (f_4 - f_{12})^2 + (g_4 - g_{12})^2.$$

Dans les formules (8)—(10) de même que dans celles qui suivent, les indices inférieurs attachés aux fonctions marquent le fait qu'elles sont des fonctions des variables qui correspondent à ces indices.

Dans les travaux [2], [3], on a étudié de nombreux types de nomogrammes à transparent orienté pour les équations à quatre variables et on a donné les formes canoniques correspondantes de ces types.

Si l'équation à quatre variables (6) peut être écrite sous la forme équivalente :

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & h_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & h_3 & 1 \\ f_4 & g_4 & h_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

alors elle peut être représentée par un nomogramme dans l'espace à points situés dans le même plan, analogue au nomogramme à points alignés du plan. Plusieurs cas particuliers des équations à quatre variables qui admettent la forme équivalente (11) peuvent être représentés par des nomogrammes composés à points alignés ou par des nomogrammes à transparent. Cette représentation justifie l'étude des propriétés de certaines fonctions à quatre variables, analogues aux fonctions nomographiques à trois variables [14].

Nous examinerons les conditions dans lesquelles une équation à quatre variables peut être ramenée aux formes équivalentes analogues à certaines formes qui se présentent dans l'étude de la représentation nomographique des équations à trois variables.

3. Nous présenterons les conditions pour qu'une fonction $F(z_1, z_2, z_3, z_4)$ puisse être ramenée à la forme :

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = X_1 L_{234} + Y_1 M_{234} + Z_1 N_{234} + T_1 P_{234}, \tag{12}$$

où X_1, Y_1, Z_1, T_1 sont les fonctions de la seule variable z_1, mais $L_{234}, M_{234}, N_{234}, P_{234}$ sont les fonctions des variables z_2, z_3, z_4.

Ces conditions sont données par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Pour qu'une fonction réelle à quatre variables $F(z_1, z_2, z_3, z_4)$ définie dans le domaine :*

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times [a_4, b_4],$$
$$\text{où } z_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

ayant des dérivées partielles jusqu'au huitième degré puisse être ramenée à la forme (12), *il est nécessaire et suffisant que l'on ait rang $A \leq 4$, dans le domaine D, où :*

$$A = \begin{bmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial F}{\partial z_3} & \frac{\partial F}{\partial z_4} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^4 F}{\partial z_4^4} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^5 F}{\partial z_1 \partial z_4^4} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_3} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_4} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^6 F}{\partial z_1^2 \partial z_4^4} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_2} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_3} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_4} & \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^3 \partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^7 F}{\partial z_1^3 \partial z_4^4} \\ \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} & \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_2} & \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_3} & \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_4} & \frac{\partial^6 F}{\partial z_1^4 \partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^8 F}{\partial z_1^4 \partial z_4^4} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Nécessité. En dérivant les deux membres de l'équation (12) quatre fois successivement par rapport à la variable z_1, nous trouvons les égalités :

$$F = X_1 L_{234} + Y_1 M_{234} + Z_1 N_{234} + T_1 P_{234}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{dX_1}{dz_1} L_{234} + \frac{dY_1}{dz_1} M_{234} + \frac{dZ_1}{dz_1} N_{234} + \frac{dT_1}{dz_1} P_{234}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} = \frac{d^2 X_1}{dz_1^2} L_{234} + \frac{d^2 Y_1}{dz_1^2} M_{234} + \frac{d^2 Z_1}{dz_1^2} N_{234} + \frac{d^2 T_1}{dz_1^2} P_{234}$$
$$\frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} = \frac{d^3 X_1}{dz_1^3} L_{234} + \frac{d^3 Y_1}{dz_1^3} M_{234} + \frac{d^3 Z_1}{dz_1^3} N_{234} + \frac{d^3 T_1}{dz_1^3} P_{234}$$
$$\frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} = \frac{d^4 X_1}{dz_1^4} L_{234} + \frac{d^4 Y_1}{dz_1^4} M_{234} + \frac{d^4 Z_1}{dz_1^4} N_{234} + \frac{d^4 T_1}{dz_1^4} P_{234}.$$

En éliminant les fonctions $L_{234}, M_{234}, N_{234}, P_{234}$ entre ces équations nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} F & X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{dX_1}{dz_1} & \frac{dY_1}{dz_1} & \frac{dZ_1}{dz_1} & \frac{dT_1}{dz_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{d^2 X_1}{dz_1^2} & \frac{d^2 Y_1}{dz_1^2} & \frac{d^2 Z_1}{dz_1^2} & \frac{d^2 T_1}{dz_1^2} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} & \frac{d^3 X_1}{dz_1^3} & \frac{d^3 Y_1}{dz_1^3} & \frac{d^3 Z_1}{dz_1^3} & \frac{d^3 T_1}{dz_1^3} \\ \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} & \frac{d^4 X_1}{dz_1^4} & \frac{d^4 Y_1}{dz_1^4} & \frac{d^4 Z_1}{dz_1^4} & \frac{d^4 T_1}{dz_1^4} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

En développant le déterminant (14) d'après la première colonne, nous trouvons :

$$H_1 F + H_2 \frac{\partial F}{\partial z_1} + H_3 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + H_4 \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} + H_5 \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} = 0, \tag{15}$$

où les fonctions H_i $(i = 1,5)$ ne contiennent que la variable z_1.

En dérivant l'équation (15) quatre fois par rapport à chaque des variables z_2, z_3, z_4 nous trouvons :

$$\begin{aligned} &H_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} + H_2 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} + H_3 \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_2} + H_4 \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_2} + H_5 \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_2} = 0 \\ &H_1 \frac{\partial F}{\partial z_3} + H_2 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} + H_3 \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_3} + H_4 \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_3} + H_5 \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_3} = 0 \\ &H_1 \frac{\partial F}{\partial z_4} + H_2 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} + H_3 \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_4} + H_4 \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_4} + H_5 \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^4 \partial z_4} = 0 \\ &H_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} + H_2 \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_2^2} + H_3 \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} + H_4 \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^3 \partial z_2^2} + H_5 \frac{\partial^6 F}{\partial z_1^4 \partial z_2^2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &H_1 \frac{\partial^4 F}{\partial z_4^4} + H_2 \frac{\partial^5 F}{\partial z_1 \partial z_4^4} + H_3 \frac{\partial^6 F}{\partial z_1^2 \partial z_4^4} + H_4 \frac{\partial^7 F}{\partial z_1^3 \partial z_4^4} + H_5 \frac{\partial^8 F}{\partial z_1^4 \partial z_4^4} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Le système (16) est un système linéaire et homogène par rapport aux fonctions H_1, H_2, H_3, H_4, H_5. Vu que ces fonctions ne peuvent être toutes nulles, il résulte que le système doit admettre une solution différente de la solution nulle et donc le rang de la matrice A du système ne peut être cinq. Il en résulte rang $A \leq 4$.

Suffissance. Nous démontrerons que si le rang $A \leq 4$, la fonction F est de forme (12) où certains facteurs peuvent être aussi nuls.

Examinons tous les cas qui se présentent successivement, à savoir ceux où le rang de la matrice est égal à 1, 2, 3 et 4.

1°. Rang $A = 1$. Dans ce cas tous les mineurs du second ordre de la matrice A sont nuls. En particulier nous avons :

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_2} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_4} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} \end{vmatrix} = 0.$$

En résolvant les équations à dérivées partielles définies par les relations (17) nous trouverons successivement :

$$\ln F = \ln \frac{\partial F}{\partial z_2} + \ln |C|, \quad \ln F = \ln \frac{\partial F}{\partial z_3} + \ln |C'|$$

$$\ln F = \ln \frac{\partial F}{\partial z_4} + \ln |C''|,$$

où les constantes C, C', C'' sont des fonctions arbitraires des variables z_2, z_3, z_4. Nous avons donc :

$$F = C_{234} \frac{\partial F}{\partial z_2}, \quad F = C'_{234} \frac{\partial F}{\partial z_3}, \quad F = C''_{234} \frac{\partial F}{\partial z_4}.$$

Il en résulte :

$$F = C_{234} B_{134}, \quad F = C'_{234} B_{124}, \quad F = C''_{234} B''_{123}.$$

Ces relations impliquent :

$$(18) \qquad F = L_{234}(z_2, z_3, z_4) X_1(x_1),$$

ce qui démontre que la fonction F est un produit de deux facteurs, parmi lesquels l'un contient une seule variable.

La conclusion (18) à laquelle on est arrivé à partir de l'hypothèse 1°, peut être obtenue encore par un autre procédé.

Les déterminants (17) peuvent être considérés comme les wronskiens des fonctions $F, \frac{\partial F}{\partial z_1}$, conçues comme des fonctions de la variable z_2 (pour le premier déterminant), de la variable z_3 (pour le deuxième déterminant) enfin de la variable z_4 (pour le quatrième déterminant). En tenant compte des propriétés des déterminants nuls nous pouvons établir les relations :

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\alpha F + \beta \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0 \qquad \alpha \frac{\partial F}{\partial z_2} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \\ &\alpha \frac{\partial F}{\partial z_3} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} = 0 \qquad \alpha \frac{\partial F}{\partial z_4} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} = 0, \end{aligned}$$

où α et β peuvent être considérés comme des fonctions arbitraires des variables z_1, z_2, z_3, z_4. En dérivant le premier membre de la première relation de (19) par rapport à z_2, z_3, z_4 et en tenant compte des autres relations, nous trouvons :

$$\alpha'_{z_2} F + \beta'_{z_2} F'_{z_1} = 0, \qquad \alpha'_{z_3} F + \beta'_{z_3} F'_{z_1} = 0$$

$$\alpha'_{z_4} F + \beta'_{z_4} F'_{z_1} = 0.$$

Il en résulte les relations :

$$\frac{\alpha'_{z_2}}{\alpha} = \frac{\beta'_{z_2}}{\beta}, \quad \frac{\alpha'_{z_3}}{\alpha} = \frac{\beta'_{z_3}}{\beta}, \quad \frac{\alpha'_{z_4}}{\alpha} = \frac{\beta'_{z_4}}{\beta}.$$

En intégrant terme à terme ces équations aux dérivées partielles nous avons :

$$\ln \alpha = \ln \beta + \ln |d|, \qquad \ln \alpha = \ln \beta + \ln |d'|$$

$$\ln \alpha = \ln \beta + \ln |d''|,$$

où les constantes ont les expressions suivantes :

$$d = d(z_1, z_3, z_4), \quad d' = d'(z_1, z_2, z_4), \quad d'' = d''(z_1, z_2, z_3).$$

Il résulte que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est une fonction de la seule variable z_1.

Alors l'égalité :

$$(20) \qquad \alpha F + \beta \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0,$$

peut être considérée comme une équation différentielle du premier ordre linéaire. Sa solution générale est de forme :

$$(21) \qquad F = A \cdot X_1,$$

où A est une fonction des variables z_2, z_3, z_4 et X_1 est une fonction de la seule variable z_1. Nous avons obtenu donc de nouveau la relation (18) :

$$F = L_{234}(z_2, z_3, z_4)\ X_1(z_1).$$

2°. Rang $A = 2$. Dans ce cas tous les mineurs du troisième ordre de la matrice A sont nuls. En particulier nous avons :

$$\begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_2^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_2} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_3^2} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_3^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_3} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_3^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial z_4} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_4^2} \\ \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_4^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_4} & \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_4^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces déterminants peuvent être considérés comme les wronskiens des fonctions $F, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}$ conçues comme des fonctions de la variable z_2 (pour le premier déterminant), de la variable z_3 (pour le deuxième déterminant), enfin de la variable z_4 (pour le quatrième déterminant). En tenant compte des propriétés des déterminants nuls nous pouvons établir les relations :

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\alpha F + \beta \frac{\partial F}{\partial z_1} + \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} = 0 \\ &\alpha \frac{\partial F}{\partial z_i} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_i} + \gamma \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_i} = 0 \quad (i = 2, 3, 4) \\ &\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_i^2} + \gamma \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_i^2} = 0, \quad (i = 2, 3, 4) \end{aligned}$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires des variables z_1, z_2, z_3, z_4.

En dérivant le premie membrer de la première égalité de (23) par rapport aux variables z_2, z_3, z_4 et tenant compte des autres égalités nous trouvons :

$$\alpha'_{z_j} F + \beta'_{z_j} \frac{\partial F}{\partial z_1} + \gamma'_{z_j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} = 0. \quad (j = 2, 3,4)$$

En procédant de manière analogue avec les deux dernières égalités de (23) nous trouvons :

$$\begin{aligned} &\alpha'_{z_j} \frac{\partial F}{\partial z_i} + \beta'_{z_j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_i} + \gamma'_{z_j} \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_i} = 0 \\ &\alpha'_{z_j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} + \beta'_{z_j} \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_i^2} + \gamma'_{z_j} \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_i^2} = 0 \end{aligned} \qquad (i, j = 2, 3, 4)$$

De ces systèmes il résulte les relations :

$$\frac{\alpha'_{z_j}}{\alpha} = \frac{\beta'_{z_j}}{\beta} = \frac{\gamma'_{z_j}}{\gamma}, \quad (j = 2, 3, 4),$$

qui par intégration par rapport à z_j nous conduisent à la relation :

$$\ln \alpha - \ln \alpha_0 = \ln \beta - \ln \beta_0 = \ln \gamma - \ln \gamma_0,$$

où $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont des fonctions indépendentes de la variable z_j $(j = 2, 3, 4)$. Il en résulte que les rapports :

$$\frac{\alpha}{\gamma}, \ \frac{\beta}{\gamma},$$

sont les fonctions de la seule variable z_1.

Alors la première égalité de (23) :

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\alpha}{\gamma} F = 0,$$

peut être considérée comme une équation différentielle du second ordre linéaire, la fonction F étant la fonction inconnue et la variable étant z_1. Si X_1 et Y_1 sont deux solutions linéairement indépendentes de l'équation (24), la solution générale de l'équation (24) est de la forme :

$$(25) \qquad F = L_{234}(z_2, z_3, z_4) X_1(z_1) + M_{234}(z_2, z_3, z_4) Y_1(z_1).$$

3°. Rang $A = 3$. Dans ce cas tous les mineurs du quatrième ordre de la matrice A sont nuls. Quelques-uns de ces mineurs sont les wronskiens des fonctions $F, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3}$ considérées comme fonctions de la variable z_i $(i = 2, 3, 4)$. En tenant compte des propriétés des déterminants nuls nous pouvons établir un système de relations analogue au système (23) :

$$\alpha F + \beta \frac{\partial F}{\partial z_1} + \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \delta \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} = 0$$

$$(26) \quad \begin{aligned} &\alpha \frac{\partial F}{\partial z_i} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_i} + \gamma \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^2 \partial z_i} + \delta \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^3 \partial z_i} = 0 \\ &\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_i^2} + \gamma \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2 \partial z_i^2} + \delta \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^3 \partial z_i^2} = 0 \\ &\alpha \frac{\partial^3 F}{\partial z_i^3} + \beta \frac{\partial^4 F}{\partial z_1 \partial z_i^3} + \gamma \frac{\partial^5 F}{\partial z_1^2 \partial z_i^3} + \delta \frac{\partial^6 F}{\partial z_1^3 \partial z_i^3} = 0, \end{aligned} \qquad (i = 2, 3, 4)$$

où α, β, γ, δ sont des fonctions arbitraires des variables z_1, z_2, z_3, z_4. En procédant de la même manière qu'au cas 2°, nous déduirons que la fonction F est la solution d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre de la forme :

$$(27) \quad \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \frac{\beta}{\delta} \frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\alpha}{\delta} F = 0.$$

La solution générale de l'équation (27) est :

$$(28) \quad F = L_{234}(z_2, z_3, z_4) X_1(z_1) + M_{234}(z_2, z_3, z_4) Y_1(z_1) + N_{234}(z_2, z_3, z_4) Z_1(z_1),$$

où X_1, Y_1, Z_1 sont trois solutions linéairement indépendantes de l'équation (27).

4°. Rang $A = 4$. On montre de la même manière qu'aux cas antérieurs, que la fonction de quatre variables $F(z_1, z_2, z_3, z_4)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire :

$$(29) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} + \frac{\delta}{\lambda} \frac{\partial^3 F}{\partial z_1^3} + \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\alpha}{\lambda} F = 0,$$

et elle est donc de la forme :

$$(30) \quad F = L_{234} X_1 + M_{234} Y_1 + N_{234} Z_1 + P_{234} T_1,$$

où X_1, Y_1, Z_1, T_1 sont quatre solutions linéairement indépendantes de l'équation (29).

La démonstration du théorème 1 est terminée.

Pour représenter nomographiquement une équation dans laquelle la fonction du premier membre est de forme (12) nous nous servirons des notations suivantes :

$$(31) \quad x = \frac{L_{234}}{P_{234}}, \quad y = \frac{M_{234}}{P_{234}}, \quad z = \frac{N_{234}}{P_{234}}.$$

Si nous pouvons éliminer les variables z_3, z_4, puis z_2, z_3, et enfin z_2, z_3 entre les équations (31) et obtenir trois relations linéaires où les coefficients sont des fonctions de la seule variable z $(i = 2, 3, 4)$, alors toute équation équivalente à l'équation :

$$L_{234} X_1 + M_{234} Y_1 + N_{234} Z_1 + P_{234} T_1 = 0,$$

peut se ramener à la forme (11), donc elle admet une représentation nomographique par un nomogramme dans l'espace à trois dimensions, à points situés dans le même plan.

4. Dans le travail [8] L. BAL et N. VORNICESCU étudient les conditions dans lesquelles une fonction réelle de quatre variables peut se ramener à des formes particulières, qui sont appropriées à la représentation nomographique ou au calcul de tables numériques :

$$(32) \quad \begin{aligned} F(z_1, z_2, z_3, z_4) = {} & A f_1 f_2 f_3 f_4 + B_1 f_2 f_3 f_4 + B_2 f_1 f_3 f_4 + \\ & + B_3 f_1 f_2 f_4 + B_4 f_1 f_2 f_3 + C_{12} f_1 f_2 + C_{13} f_1 f_3 + C_{14} f_1 f_4 + \\ & + C_{23} f_2 f_3 + C_{24} f_2 f_4 + C_{34} f_3 f_4 + D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + \\ & + D_4 f_4 + E = 0 \end{aligned}$$

$$(33) \quad \begin{aligned} F(z_1, z_2, z_3, z_4) = {} & (L_1 f_1 f_2 + L_2 f_1 + L_3 f_2)(N_1 f_3 f_4 + N_2 f_3 + N_3 f_4 + N_4) + \\ & + (M_1 f_1 f_2 + M_2 f_1 + M_3 f_2)(P_1 f_3 f_4 + P_2 f_3 + P_3 f_4 + P_4) + \\ & + R_1 f_3 f_4 + R_2 f_3 + R_3 f_4 + R_4 = 0, \end{aligned}$$

où $f_i = f_i(z_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ et les coefficients sont des constantes réelles.

Les résultats sont présentés dans les théorèmes suivantes :

THÉORÈME 2. *Pour qu'une fonction F définie et à dérivées partielles du troisième ordre continues dans le domaine D :*

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times [a_4, b_4] \quad \textit{où} \quad [a_i, b_i] \subset R$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

soit de la forme du premier membre de l'équation (32) *il est nécessaire et suffisant que dans le domaine D nous ayons :*

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \ln \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0, \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{34}$$

THÉORÈME 3. *Pour qu'une fonction F définie et à dérivées partielles du troisième ordre continues dans tous les points du domanine D:*

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times [a_4, b_4], \ [a_i, b_i] \subset R, \ i = \overline{1, 4}$$

soit de la forme du premier membre de l'équation (33) il est nécessaire et suffisant que dans le domaine D soient remplies les conditions :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \ln \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{35}$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_3} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_4} & \frac{\partial^3 F}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_4} \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Nous mentionnons que les équations (32) et (33) sont des équations du quatrième ordre nomographique. L'équation (33) est un cas particulier important de l'équation (32).

Pour les équations (32) et (33) on peut toujours construire des nomogrammes composés à partir des nomogrammes à champ binaire à variables répétées.

En ordonnant le premier membre de l'équation (32) d'après la variable z_1, nous obtenons :

$$f_1(A f_2 f_3 f_4 + B_2 f_3 f_4 + B_3 f_2 f_4 + B_4 f_2 f_3 + C_{12} f_2 + C_{13} f_3 + C_{14} f_4 + D_1) +$$
$$+ (B_1 f_2 f_3 f_4 + C_{23} f_2 f_3 + C_{24} f_2 f_4 + C_{34} f_3 f_4 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + D_4 f_4 + E) = 0$$

En introduisant les variables auxiliaires :

$$u = A f_2 f_3 f_4 + B_2 f_3 f_4 + B_3 f_2 f_4 + B_4 f_2 f_3 + C_{12} f_2 + C_{13} f_3 + C_{14} f_4 + D_1 \tag{37}$$

$$v = B_1 f_2 f_3 f_4 + C_{23} f_2 f_3 + C_{24} f_2 f_4 + C_{34} f_3 f_4 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + D_4 f_4 + E, \tag{38}$$

nous trouvons :

$$f_1 u + v = 0. \tag{39}$$

Les équations (37) et (38) peuvent s'écrire sous la forme de l'équation du type Cauchy

$$f_2 \varphi_{34} - u + \Psi_{34} = 0 \tag{40}$$

$$f_2 \Phi_{34} - v + \Psi_{34} = 0 \tag{41}$$

Il en résulte qu'elles peuvent être représntées par des nomogrammes à points alignés à un champ binire.

Pour l'équation (32) ramenée à la forme (39) on peut donc construire un nomogramme composé à partir des nomogrammes à points alignés comme il est indiqué dans la figure 1.

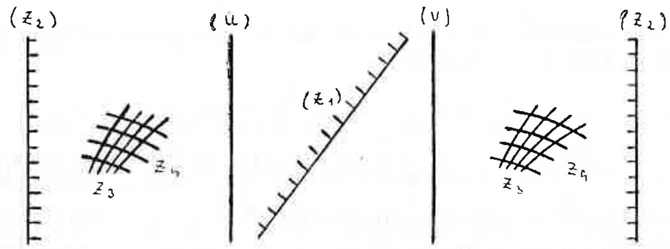

Fig. 1

L'équation (33) admét encore une autre représentation nomographique. On déstingue notamment les cas suivants :

1) Si $L_1 = M_1 = 0$, l'équation (33) est de la forme : $f_1 \varphi_{34} + f_2 \psi_{34} + \chi_{34} = 0$, qui est du type Cauchy.

2) Si $L_1 M_3 = L_3 M_1$ et $M_1 = 0$ (respectivement $L_1 = 0$) par le changement de fonction $f_1 = \frac{1}{g_1} - \frac{M_3}{M_1}$ $\left(\text{respectivement } f_1 = \frac{1}{g_1} - \frac{L_3}{L_1}\right)$, l'équation se ramène à forme canonique Cauchy : $g_1 \varphi_{34} + f_2 \psi_4 + \chi_{34} = 0$.

3) Si $L_1 M_2 = L_2 M_1$ et $M_1 = 0$ (respectivement $L_1 = 0$) par le changement de fonction $f_2 = \frac{1}{g_2} - \frac{M_2}{M_1}$ $\left(\text{respectivement } f_2 = \frac{1}{g_2} - \frac{L_2}{L_1}\right)$ on obtient encore la forme canonique Cauchy :

$$f_1 \varphi_{34} + g_2 \psi_{34} + \chi_{34} = 0.$$

4) Si $L_1M_2 = L_2M_1$ et $L_1M_3 = L_3M_1$ après le changement des fonctions :

$$f_1 = \frac{g_1}{L_1M_2 - L_2M_1}, \quad f_2 = \frac{g_2}{L_1M_3 - L_3M_1} + \frac{M_2L_3 - L_2M_3}{L_1M_3 - L_3M_1},$$

l'équation se ramène à la forme canonique Clark :

$$g_1g_2\varphi_{34} + (g_1 + g_2)\psi_{34} + \chi_{34} = 0.$$

Si dans le théorème 3 la condition (36) se remplace par la condition :

$$(42) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F}{\partial z_2} & F \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_3} & \dfrac{\partial F}{\partial z_3} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_4} & \dfrac{\partial F}{\partial z_4} \end{vmatrix} = 0,$$

on obtient une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction à quatre variables soit de la forme :

$$(43)\ F(z_1, z_2, z_3, z_4) = (L_1f_1f_2 + L_2f_1 + L_3f_2 + L_4)(N_1f_3f_4 + N_2f_3 + N_3f_2 + N_4) + (M_1f_1f_2 + M_2f_1 + M_3f_2 + M_4)(P_1f_3f_4 + P_2f_3 + P_3f_4 + P_4).$$

En ce cas l'équation correspondente $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ admet la séparation des variables sous la forme (5) $F_{12} = G_{34}$, et elle se représente nomographiquement par un nomogramme composé. Pour l'équation $F = 0$ la condition (42) est identique à la condition de Goursat pour que l'équation respective admette la séparation des variables sous cette forme.

5. Pour quelques équations à quatre variables on connaît plusieurs types de représentations nomographiques. Nous en énumérons les suivants :

a) Nomogrammes composés. Ces nomogrammes sont faciles à construire et d'un empoi aisé, [1], [7]. Ils correspondent aux équations de la forme (5). Les plus utilisés sont les nomogrammes à points alignés.

b) Nomogrammes à transparent orienté. Ces types de nomogrammes ont été beaucoup étudiés [9]—[12], [15]. Nous distinguons deux types de nomogrammes à transparent orienté qui correspondent aux formules de structure :

$$D_0 \,||\, D_0', \; P_1 \,|{-}|\, C_1', \; P_2 \,|{-}|\, C_2', \; P_3 \,|{-}|\, C_4'$$

et

$$D_0 \,||\, D_0', \; 0 \,|{-}|\, C_\lambda', \; P_{12} \,|{=}|\, P_{34}'.$$

Leurs nomogrammes sont donnés dans les figures 2 et 3.

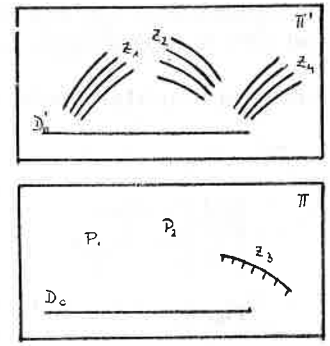

Fig. 2

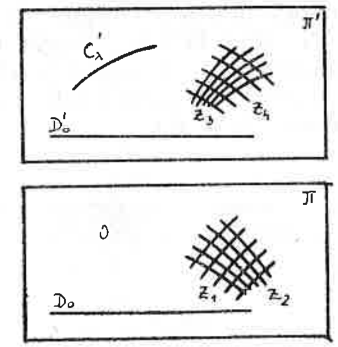

Fig. 3

À ces nomogrammes correspondent les équations canoniques :

$$(44) \qquad F(f_{12} + f_3, g_{12} + g_3, z_4) = 0,$$

respectivement :

$$(45) \qquad F(f_{34} - f_{12}, g_{34} - g_{12}) = 0.$$

Evidemment on peut encore imaginer d'autres manières de grouper les éléments côtés en ces quatre sortes de contacts [2], [3]. On peut représenter toujours par des nomogrammes de ce type, aussi les équations de forme (5).

c) Nomogrammes rhomboïdaux. Ils sont représentés par des équations de la forme (8). Un tel nomogramme est présenté dans la figure 4 [16]. Le nomogramme rhomboïdal peut être considéré aussi comme un nomogramme à transparent orienté correspondant à la formule de structure :

$$D_0 \,||\, D_0', \; P_{23} \,|{=}|\, 0', \; C_4 \,|{-}|\, P_1'$$

d) Nomogrammes à index cruciforme et parallèle et celles à transparent en forme d'angle droit. Leur construction et leur utilisation est bien connue. Ils représentent les équations de types :

$$(46) \qquad \frac{g_2 - g_4}{f_2 - f_4} + \frac{f_1 - f_3}{g_1 - g_3} = 0,$$

$$(47) \qquad \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{g_4 - g_3}{f_4 - f_3},$$

et respectivement de la forme (9).

g) Nomogramme à co pas. Ils correspondent aux équations (10) et ont une utilisation simple.

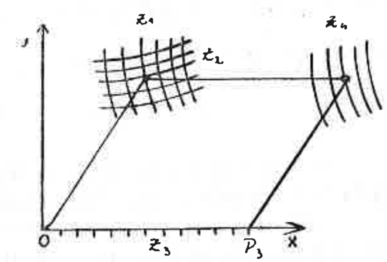

Fig. 4

h) Nomogrammes à champ binaire. Ils représentent les équations de forme (7). Ils sont la plus simple extension des nomogrammes à points alignés aux équations à quatre variables.

i) Nomogrammes tangentiels. Deux types plus importants sont donnés dans les figures 5 et 6 :

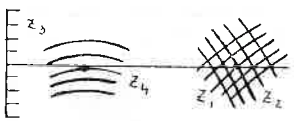

Fig. 5

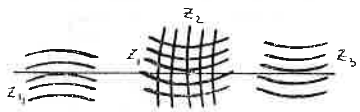

Fig. 6

qui correspondent aux formes canoniques :

(48) $$\varphi_{34}(z_3, z_4) = f_{12}(z_1, z_2) + \psi_3(z_3)\, g_{12}(z_1, z_2)$$

et

(49) $$\varphi_{34}(z_3, z_4) = f_{12}(z_1, z_2) + g_{12}(z_1, z_2)\, \psi_{34}(z_3, z_4)$$

Ils sont moins fréquemment utilisés à cause de l'imprécision des résultats qu'ils fournissent.

6. Pour finir nous indiquerons les diverses représentations nomographiques pour les cas particuliers suivants des équations du quatrième ordre nomographique.

(50) $$D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + D_4 f_4 + E = 0$$

(51) $$A f_1 f_2 f_3 f_4 + E = 0$$

(52) $$C_{12} f_1 f_2 + D_3 f_3 + D_4 f_4 + E = 0$$

(53) $$B_1 f_2 f_3 f_4 + B_2 f_1 f_3 f_4 + B_3 f_1 f_2 f_4 + B_4 f_1 f_2 f_3 + D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + \\ + D_4 f_4 = 0$$

(54) $$C_{12} f_1 f_2 + C_{13} f_1 f_3 + C_{14} f_1 f_4 + C_{23} f_2 f_3 + C_{24} f_2 f_4 + C_{34} f_3 f_4 = 0$$

(55) $$C_{12} f_1 f_2 + C_{13} f_1 f_3 + C_{14} f_1 f_4 + C_{23} f_2 f_3 + C_{24} f_2 f_4 + C_{34} f_3 f_4 + \\ + D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + D_4 f_4 = 0$$

On peut obtenir encore les équations analogues à (52) par une permutation convenable des quatres indices par groupes de deux indices.

Ces formes peuvent s'écrire plus simplement par introduction de certains coefficients dans l'expression des fonctions f_i. Elles ne correspondent pas entièrement aux formes canoniques établies par J. WOJTOWICZ [17]–[19].

Nous avons vu que pour la forme générale nous avons donné une représentation nomographique (fig. 1). Nous allons énumérer maintenant pour chaque des équations quelques autres types de nomogrammes qui leur correspondent.

L'équation (50) peut être représentée par des nomogrammes à points à échelles concurrentes ou parallèles, des nomogrammes à transparent orienté à quatre éléments côtés dans les deux plans, le nomogramme rhomboïdal, le nomogramme à index parallèle ou par le nomogramme à compas.

L'équation (51) peut être représentée par les mêmes types de nomogrammes que l'équation (50) parce que par passage aux logarithmes elle peut être ramenée à cette forme (50). Considérée comme écrite sous la forme (51) elle peut se représenter de plus par un nomogramme composé de deux nomogrammes en Z.

L'équation (52) se représente par un nomogramme composé d'un nomogramme en Z et d'un autre à échelles parallèles et d'un nomogramme à compas.

L'équation (53) se représente par un nomogramme composé, et les équations (54)–(55) par un nomogramme à champ binaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bal L., Rado F., *Lecţii de monografie*. Ed. tehnică, Bucureşti 1956.

[2] Bal Lascu, *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuaţii cu patru şi cinci variabile*. Studii şi cercetări de Matematică (Cluj), **VIII**, *1–2*, 169–176 (1957).

[3] Бал Ласку, *Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными*. Mathematica (Cluj), **1 (24)**, *2*, 193–197 (1959).

[4] Bal Lascu, *Quelques types de nomogrammes tangentiels*. Mathematica (Cluj), **2(25)**, *2*, 201–210 (1960).

[5] Bal Lascu, *Condiţii pentru reprezentarea unei ecuaţii cu patru variabile cu nomograme tangenţiale cu puncte aliniate*. Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Seria I, Mat.-Phys. **1**, 163–168 (1961).

[6] Bal L., Vornicescu N., *Asupra reprezentării nomografice a ecuaţiilor cu patru variabile*. Buletinul Ştiinţific al Institutului Politehnic Cluj, **12**, 19–26 (1969).

[7] Глаголев Н. А., *Курс номографии*, Высмая школа Москва, 1961.

[8] Gronwall T. H., *Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés*. Journal de mathématiques pures et appliqueés. **VIII**, *6*, 59–102 (1912).

[9] Хованский Г. С., *Методика построения номограмм с ориентированным транспарантом*. В сб. „Вычислительная математика и вычислительная техника", 2, 3–93, (1955).

[10] Хованский Г. С., *О представлении некоторых зависимостей с четырьмя перемен ными номограммами с ориентированным транспарантом* (тезисы доклада). Труды третьего всесоюзного математического съезда, Т. 2, М. Изд-ва АНСССР 143–143, 1956.

[11] Хованский Г. С. *Некоторые вопросы практической номографии*. Вычислительная математика, 4, 3–103 (1959).

[12] Хованский Г. С., *Методы номографирования*, Вычислительный Центр АНСССР, Москва, 1964.

[13] Hovanskii G. S., Silaeva E. A., *On nomographic reprezentation of generalized equations of third and fourth nomographic order, and successive linear interpolation formulas in tables with several entiers*. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., **199**, *6*, 1285–1288 (1971).

[14] Kellog O., *Nomograms with points in alignment*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, **63**, 159–173 (1915).

[15] Margoulis W., *Les abaques à transparent orienté ou tournant*. Gauthier-Villars Paris, 1931.

[16] Rado Fr., Bal L., Ghergely E., Ionescu Gh., *Reprezentarea ecuaţiilor cu patru variabile cu ajutorul nomogramei romboidale*. Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială 361–366, 9–12 iunie 1955, Timişoara.

[17] Wojtowicz J., *Metody sprowadzania równan czwartego i piatego rzedu nomograficznego do postaci kononicznej*. Zastosowania Matematiki **V**, 1–20 (1960).

[18] Wojtowicz J., *Nomogramowalnosc wielomianow monograficznych czwartego rzedu nomograficznego o cztevech zmiennych* (disertaţie), Politehnika Warszawa 1961.

[19] Wojtowicz J., *O czynniku anamorfozujacym, sprowadzajacym rownanie* $F(x, y, z, w) = 0$ *do postaci kanonicznych równania czwartego rzedu nomograficznego z czterema zmiennymi* Zastosowania Matematyki, **VI**, *4*, 363–375 (1963).

Primit la 8. IV. 1974.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România