

VERKETTETE UND FREIE APPROXIMATION BEI DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

von

L. COLLATZ

(Hamburg)

Bei der Behandlung von Anfangs- und Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen und von Integralgleichungen mit Hilfe von Approximationsmethoden kommt man häufig auf Probleme der verketteten und freien Approximation, welche bisher theoretisch noch wenig untersucht worden sind. Hier wird gezeigt, daß verkettete Approximation bei sehr verschiedenartigen Problemen auftritt. Es wird eine Anwendung auf Fehlerabschätzungen bei der Methode der finiten Elemente gegeben.

1. Verkettete Approximation

Bei der klassischen Tschebyscheff'schen Approximation (kurz T. A.) sucht man eine in einem Bereich B des n -dimensionalen Punktraumes R^n gegebene stetige Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ durch Funktionen $w(x_j, a_v)$ einer Klasse W „möglichst gut“ zu approximieren. Die Funktionen w sollen ebenfalls stetig sein und hängen von einem Parametervektor $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ ab. Sie sind aus der Optimierungsaufgabe zu ermitteln

$$(1.1) \quad -\delta_1 \leq w(x_j, a_v) - f(x_j) \leq \delta_2 \text{ für alle } x \in B, \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0$$

$$(1.2) \quad Q = \delta_1 + \delta_2 = \text{Infimum,}$$

wobei auch noch Nebenbedingungen hinzutreten können. Bei der klassischen T. A. hat man $\delta_1 = \delta_2$, bei einseitiger T. A. ist $\delta_1 = 0$ (Approximation von oben) oder $\delta_2 = 0$ (Approximation von unten).

Die Approximationsaufgabe heißt „verkettet“, wenn wenigstens einer der Parameter a_v an mindestens zwei verschiedenen Stellen auftritt und diese Erscheinung nicht durch eine eindeutige Transformation der Parameter vermieden werden kann. So ist z. B. die Approximation einer Funktion $f(x)$ durch Funktionen $w = a_1 + a_2 e^{a_1 x}$ verkettet, dagegen durch Funktionen $w = (a_1 + e^{a_1}) e^x$ nicht verkettet.

2. Inverse Probleme bei Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung

$$(2.1) \quad y'' + c^2 y = d \sin \omega x$$

hat die allgemeine Lösung

$$(2.2) \quad y = c_1 \cos(cx + c_2) + \frac{d}{c^2 - \omega^2} \sin \omega x.$$

Nun werde angenommen, man habe eine Erscheinung beobachtet, die einer Differentialgleichung der Form (2.1) genügt, und man möchte aus dem durch Beobachtungen ermittelten Verlauf von $y(x)$ auf die physikalischen Konstanten c , d , ω zurückschließen. Man soll also y durch einen Ausdruck der Form (2.2) approximieren. Das ist eine verkettete Approximation, weil die Parameter c , ω je zweimal auftreten.

Ein Beispiel einer verketteten Approximation bei der partiellen Differentialgleichung

$$(2.3) \quad k \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

findet man bei COLLATZ [3]. Dort soll die Konstante k aus Beobachtungen ermittelt werden.

3. Eigenwertaufgaben

Bei der Eigenwertaufgabe

$$(3.1) \quad y'' + \lambda(1 + \sin x)y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

kann man für y den Näherungsansatz machen

$$(3.2) \quad y \approx w(x, a_\nu) = \sum_{\nu=1}^p a_\nu \sin [(2\nu-1)x].$$

Man müßte dann durch passende Wahl der a_ν erreichen, daß der Quotient

$$(3.3) \quad \Phi[w] = \frac{-w''}{(1 + \sin x)w} = \frac{\sum_{\nu=1}^p (2\nu-1)^2 a_\nu \sin [(2\nu-1)x]}{\sum_{\nu=1}^p a_\nu (1 + \sin x) \sin [(2\nu-1)x]}$$

möglichst konstant wird. Verwendet man nur solche a_ν , für welche im Quotient Zähler und Nenner nicht negativ sind und für welche der Quotient endlich bleibt, so gilt die Einschließungsaussage

$$(3.4) \quad 0 < \text{Min}_{[0, \pi]} \Phi(x) \leq \lambda_1 \leq \text{Max}_{[0, \pi]} \Phi(x),$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert ist. Da die a_ν im Zähler und im Nenner auftreten, liegt auch hier eine verkettete Approximation vor.

Man kann nach solchen Werten a_ν fragen, für welche der Ausdruck

$$(3.5) \quad \text{Max}_{[0, \pi]} \Phi(x) - \text{Min}_{[0, \pi]} \Phi(x)$$

möglichst klein wird. Etwas bessere Schranken erhält man, wenn man die a_ν so bestimmt, daß der Ausdruck

$$(3.6) \quad M = \text{Max}_{[0, \pi]} \Phi(x)$$

möglichst klein ausfällt und andere Werte \hat{a}_ν , für welche

$$(3.7) \quad m = \text{Min}_{[0, \pi]} \Phi(x)$$

möglichst groß wird.

Für die Durchführung der Rechnung auf einem Computer danke ich Herrn H. Günther. Man erhält die Einschließung

$$(3.8) \quad 0.53901 \leq \lambda_1 \leq 0.54771.$$

In der Tabelle sind die Werte bei $p = 2$ und bei $p = 3$ Ansatzfunktionen einander gegenübergestellt.

	$p = 2$	$p = 3$
Min Φ	0.53591	0.53901
Max Φ	0.56727	0.54771
Differenz	0.03136	0.00870

4. Nichtlineare Schwingungen

Bei einer linearen Differentialgleichung

$$(4.1) \quad Tu = Lu - r(x_j) = 0,$$

bei der u und seine Ableitungen linear in L vorkommen, und einem Näherungsansatz

$$(4.2) \quad u \approx w = \sum_{\nu=1}^p a_\nu w_\nu(x_j)$$

treten die a_ν nicht verkettet in T auf. Bei einer nichtlinearen Differentialgleichung jedoch liegt bei dem Ansatz (4.2), abgesehen von trivialen Spezial-

fällen, verkettete Approximation vor. Das werde am Beispiel der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen

$$(4.3) \quad Ty = y'' - 2 \sin y + \cos x = 0, \quad y(x) = y(x + 2\pi)$$

erläutert.

In dem Ansatz für Näherungsfunktionen

$$(4.4) \quad w(x) = a_0 + a_1 \cos x, \quad v(x) = b_0 + b_1 \cos x$$

mit

$$(4.5) \quad \begin{cases} Tw(x) = (1 - a_1) \cos x - 2 \sin(a_0 + a_1 \cos x) \\ Tv(x) = (1 - b_1) \cos x - 2 \sin(b_0 + b_1 \cos x) \end{cases}$$

sucht man die Parameter a_0, a_1, b_0, b_1 so zu bestimmen, daß unter den Nebenbedingungen

$$(4.6) \quad Tv(x) \leq 0 \leq Tw(x) \text{ für alle } x$$

die Optimierungsforderung

$$(4.7) \quad \text{Max } Tw(x) = \delta_1, \quad \text{Max } (-Tv(x)) = \delta_2, \quad \delta_1 = \text{Min}, \quad \delta_2 = \text{Min}$$

erfüllt wird, Fig. 1. Die numerische Rechnung, für deren Durchführung

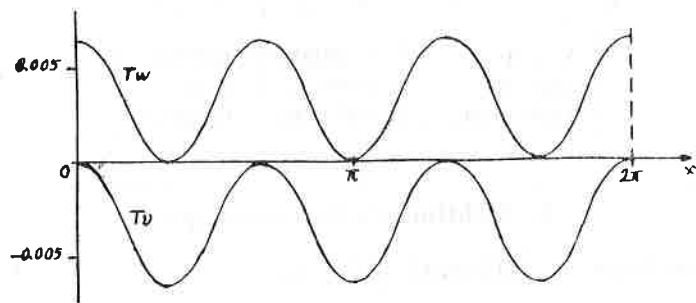


Fig. 1

ich den Herren H. Günther und J. Sprekels danke, führt zu den Werten

$$b_0 = -a_0 = 0.001\,618\,7, \quad b_1 = a_1 = 0.336\,525\,7$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.006\,389\,8.$$

Betreffs der Theorie für diese Approximation vgl. J. WERNER.

5. Kompakte monotone Operatoren

$$(5.1) \quad u = Tu$$

sei eine vorgelegte Operatorgleichung in einem halbgeordneten Banachraum. T sei ein kompakter monotoner Operator, bei dem $v \leq w$ (etwa punktweise im Sinne der klassischen, bei reellen Zahlen benutzten Ordnung) zur Folge hat

$$(5.2) \quad Tv \leq Tw.$$

Man kann ein Iterationsverfahren aufstellen

$$(5.3) \quad v_{n+1} = Tv_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Läßt man $v_0(x)$ noch von Parametern a_1, \dots, a_p abhängen, so liegt es nahe, diese Parameter so zu bestimmen, daß sich v_0 und v_1 „wenig“ voneinander unterscheiden. Man kommt so zu der Optimierungsaufgabe

$$(5.4) \quad 0 \leq v_1(x, a_v) - v_0(x, a_v) \leq \delta, \quad \delta = \text{Min}.$$

Dies ist eine verkettete, im allgemeinen nichtlineare einseitige Tschebyscheff-Approximation, und zwar eine „freie“ Approximation, weil hier nicht eine feste Funktion $f(x)$ wie in (1.1) zu approximieren ist. Man kann nun versuchen, die Lösung u von unten her durch die v_n und von oben her durch eine andere Folge w_n nach

$$(5.5) \quad w_{n+1} = Tw_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

anzunähern. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gilt dann, falls

$$(5.6) \quad v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$$

erfüllt ist, daß die Operatorgleichung (5.1) mindestens eine Lösung u mit

$$(5.7) \quad v_1 \leq u \leq w_1$$

besitzt, und die Monotoniebedingung läßt sich noch wesentlich abschwächen (ausführliche Darstellung z. B. bei COLLATZ [2]s. 352 ff.). Sucht man möglichst enge Schranken (5.7), so bedeutet dies eine hochgradig verkettete Approximation.

6. Eine schwach singuläre Integralgleichung vom Urysohn-Typ

Die Gleichung

$$(6.1) \quad u(x) = Tu = \lambda \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{s}\right) ds}{1+x-\frac{1}{2}u(s)}$$

werde für den Wert $\lambda = \frac{1}{2}$ betrachtet. Geht man von $v_0 = \text{const.} = \alpha$ aus, so erhält man nach (5.3)

$$(6.2) \quad v_1 = Tv_0 = \frac{1}{2 + 2x - \alpha}$$

Die freie verkettete Approximation (5.4) lautet hier

$$(6.3) \quad 0 \leq \frac{1}{2 + 2x - \alpha} - \alpha \leq \delta \text{ für } x \in [0, 1], \delta = \text{Min.}$$

Diese Aufgabe hat die Lösung $\alpha = 2 - \sqrt{3}$. Geht man entsprechend von $w_0 = \text{const.} = 1$ aus, so erhält man (Fig. 2) Funktionen v_0, v_1, w_1, w_0 , welche (5.6) erfüllen, und man hat die Fehlerabschätzung (5.7). Es liegt also in dem in Fig. 2 schraffierten Streifen mindestens eine Lösung u .

7. Die Methode der finiten Elemente

Die stationäre Temperaturverteilung $u(x, y)$ in einer Platte, deren Mittelebene den Bereich $B: \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ bedeckt, genüge der Differentialgleichung

$$(7.1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } B$$

und der Randbedingung

$$(7.2) \quad u = \frac{3}{2 + x^2 + y^2} \text{ auf dem Rande } \partial B.$$

Die Zahlen sind so gewählt, daß auch in den Ecken $\Delta u = 0$ gilt.

Bei der Methode der finiten Elemente teilt man den Bereich B in Teilbereiche ein, z. B. in Dreiecke, Vierecke mit gradlinigen oder krummlinigen Rändern, und nähert u in jedem Teilbereich durch einfache Funktionen, oft Polynome oder sogar durch lineare Funktionen, an. Bei dem vorliegenden Beispiel werde B in einfachster Weise in vier Teilquadrate der Seitenlänge 1 zerlegt, die, wie in Fig. 3, mit B_1, B_2, B_3, B_4 bezeichnet

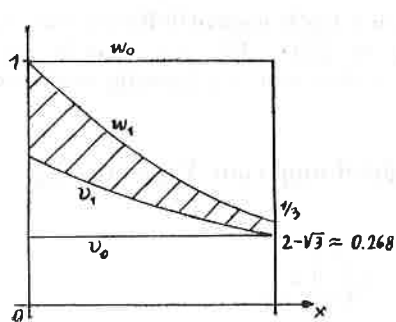


Fig. 2

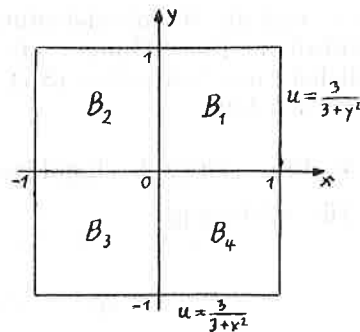


Fig. 3

seien. Nun sei C_2^1 die Klasse der Funktionen mit stetigen partiellen ersten Ableitungen, für welche die zweiten partiellen Ableitungen stückweise stetig sind. Die Lösungsfunktion u werde durch eine Funktion $w \in C_2^1$ approximiert. Dann gilt als spezieller Fall eines allgemeineren Satzes von NATTERER und WERNER [5] die

Monotonie: *Gehören die Funktionen v und w zur Klasse C_2^1 , so hat*

$$(7.3) \quad -\Delta v \leq \Delta w \text{ in } B, v \leq w \text{ auf } \partial B$$

zur Folge

$$(7.4) \quad v \leq w \text{ in } B.$$

Für $w = u$ hat man hier in v mit $v \leq u$ eine untere Schranke für u , analog gewinnt man obere Schranken für u . Man erhält also auf diese Weise exakte Schranken für die gesuchte Lösung u .

8. Fehlerabschätzung für die Methode der finiten Elemente mit bicubic splines

Bicubic splines sind Funktionen $w \in C_2^1$, die sich in jedem Teilbereich auf Funktionen der Form

$$(8.1) \quad w = \sum_{j,k=0}^3 a_{jk} x^j y^k$$

reduzieren. Teilt man den Bereich B in Rechtecke ein, so hat man in jedem Rechteck eine Funktion der Form (8.1) mit 16 Parametern a_{jk} , die man auch durch die Werte von $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y},$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ in den vier Eckpunkten des Rechtecks ausdrücken kann, vgl. MITCHELL [4], WHITEMAN [7], STRANG [6].

Im vorliegenden Falle können wir uns aus Symmetriegründen auf eines der Teilquadrate, etwa B_1 , beschränken. In Fig. 4 ist an jede Ecke von B_1 der Vektor der vier Werte $\left\{ w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$ angeschrieben, wobei α, β, γ noch unbekannte Werte sind, die als Parameter

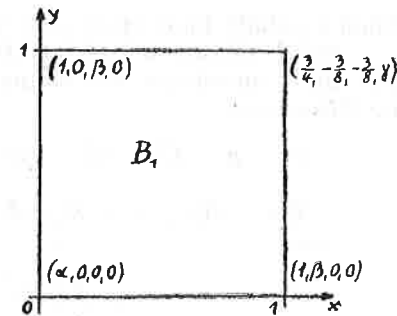


Fig. 4

aufgefaßt werden. Nach der Vorschrift der Methode der finiten Elemente hätte man sie aus dem Variationsprinzip

$$(8.2) \quad \Phi[w] = \iint_B \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \text{Min}, \quad w = u \text{ auf } \partial B$$

zu ermitteln.

Mit Rücksicht auf die vorzunehmende Fehlerabschätzung aber werde das Prinzip zugrunde gelegt

$$(8.3) \quad |\Delta w| \leq \delta \text{ in } B, \quad \delta = \text{Min.}$$

Man bildet dann eine neue Funktion

$$(8.4) \quad \hat{w} = w + c \cdot z(x, y)$$

mit einer Konstanten c und einer Funktion z , die man zur Erzielung scharfer Schranken dem Verlauf von Δw anpassen wird, die man aber oft auch in einfacher Weise wählen wird, z. B.

$$(8.5) \quad z = x^2 + y^2, \quad -\Delta z = -4$$

oder

$$(8.6) \quad z = k_1 - k_2 x^2 - k_3 xy - k_4 y^2, \quad -\Delta z = 2(k_2 + k_4).$$

Auf diese Weise kann man

$$(8.7) \quad 0 \leq -\Delta \hat{w} \text{ in } B, \quad u \leq \hat{w} \text{ auf } \partial B$$

erreichen und hat damit eine obere Schranke für u

$$(8.8) \quad u \leq \hat{w} \text{ in } B.$$

Analog erhält man auch eine untere Schranke \bar{w} für u .

Auf das Zahlenbeispiel (7.1), (7.2) angewandt, ergeben sich die Werte (für die numerische Rechnung danke ich den Herren H. Günther und B. Güssmann)

$$\begin{aligned} w = & \alpha + (3 - 3\alpha - \beta)(x^2 + y^2) + (2\alpha + \beta - 2)(x^3 + y^3) + \\ & + (9\alpha + 6\beta + \gamma - 9)x^2y^2 + \left(\frac{45}{8} - 6\alpha - 5\beta - \gamma \right)(x^2y^3 + x^3y^2) + \\ & + \left(4\alpha + 4\beta + \gamma - \frac{7}{2} \right)x^3y^3 \end{aligned}$$

$$\alpha = 0.925\ 670, \quad \beta = 0.260\ 993, \quad \gamma = -0.881\ 126, \quad |\Delta w| \leq 0.152\ 010.$$

Obiges Prinzip gibt für $-\Delta \bar{w} \leq 0 \leq -\Delta \hat{w}$ in B , $\bar{w} \leq u \leq \hat{w}$ auf ∂B ,

$$(8.9) \quad 0 \leq \hat{w} - \bar{w} \leq \delta \text{ in } B, \quad \delta = \text{Min}$$

die Fehlerschranke $\delta = 0.123\ 193$.

Dieses Beispiel eignet sich übrigens auch gut für die Anwendung von Approximationsmethoden. Nähert man in Polar-Koordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ die Lösungsfunktion u an durch

$$(8.10) \quad u \approx w = \sum_{v=0}^m a_v r^{4v} \cos(4v\varphi),$$

so erhält man beim Rechnen mit $m = 1, 2, 3$ oder 4 Ansatzfunktionen die in der Tabelle angegebenen Werte der Parameter a_v , und die jeweilige Fehlerschranke für den Fehler $\varepsilon = w - u$:

	a_0	a_1	a_2	a_3	$ \varepsilon \leq$
$m = 0$ ($w = \text{const.}$)	0.875				0.125
$m = 1$	0.947 175 9	0.05			0.002 824
$m = 2$	0.947 270 8	0.051 948 6	0.000 665 0		0.000 115 6
$m = 3$	0.947 271 07	0.051 985 98	0.000 725 29	0.000 014 61	0.000 003 05

Für $m = 3$, also 4 Ansatzfunktionen, bekommt man die im ganzen Bereich B gültige Fehlerabschätzung

$$|\varepsilon| = |w - u| \leq 0.000\ 003\ 05 \text{ in } B.$$

LITERATUR

- [1] Barnhill R. E., Whiteman J. R., *Error analysis of Finite Element Methods with triangles for elliptic boundary value problems*. In Whiteman [7], 83–112.
- [2] Collatz L., *Functional Analysis and Numerical Mathematics*. Acad. Press 1966.
- [3] Collatz L., *Discretization and chained approximation*. Erscheint in Proc. Symp. Numer. Solution Diff. Equ., Dundee, Scotland 1973.

- [4] Mitchell A. R., *An Introduction to the Mathematics of the Finite Element Method*. In Whiteman [7], 37–58.
- [5] Natterer F., Werner B., *Eine Erweiterung des Maximumprinzips für den Laplace-Operator*. Erscheint demnächst.
- [6] Strang G., Fix G., *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall 1973.
- [7] Whiteman J. R., *The Mathematics of finite Elements and Applications*. Acad. Press, 1973.

Eingegangen am 11. XII. 1973.

*Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg*