REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 3, N° 2, 1974, pp. 161—165

UN ESSAI DE MATHÉMATISATION DU PROCESSUS DE L'ENSEIGNEMENT COLLECTIF

par

S. GOLAB

(Kraków)

La théorie des systèmes de l'étude ainsi que de l'enseignement a fixé maintenant aussi l'attention des mathématiciens. Il suffit de mentionner le livre récent de YA. Z. TSYPKIN „Foundations of the theory of learning systems" (Mathematics in Science and Engineering 1973).

L'objet de mes considérations est une conception mathématique de l'enseignement collectif s'effectuant dans une classe renfermant n élèves. Dans une classe on enseigne quelques matières. Comme nous allons ignorer la corrélation entre diverses matières nous supposons qu'il y a une seule matière et un maître enseignant cette matière pendant toute la période $[0, T]$ de l'enseignement. La variable du temps sera dénotée par t.

Nous supposons que l'état (le cercle) des connaissances de la matière chez l'élève x_i $(i = 1, \ldots, n)$ peut être mesuré à l'aide des nombres positifs et nous dénotons cette quantité par

$$y_i(t). \tag{1}$$

Supposons ensuite que, la personne du maître étant fixée, la quantité $y_i(t)$ sous l'existence d'un *seul* élève x est une fonction connue

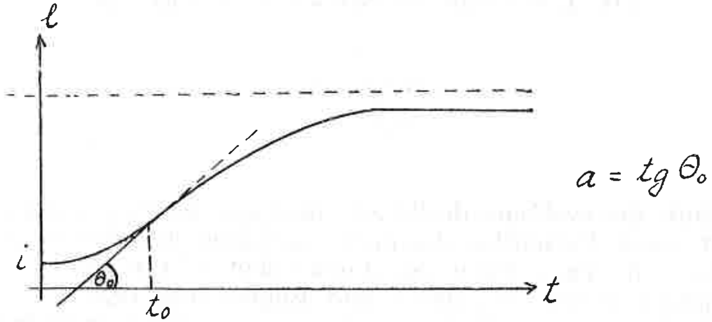
$$y_i^*(t). \tag{2}$$

Nous admettons (conformément avec l'intuition) que la fonction (2) est croissante. Nous admettons (aussi conformément avec l'intuition) l'hypothèse que la dérivée $\frac{dy_i^{2*}}{dt^2}$ est au commencement positive et à partir d'un moment $t_0 > 0$ elle est négative.

Il est vrai que nous avons admis l'intervalle de la variabilité du temps borné, mais nous nous permettons d'admettre que la fonction (2) est définie pour tous les $t \geqslant 0$ et que la vitesse $\frac{dy_i^*}{dt}$ non seulement converge vers zéro pour l'hypothèse fictive $t \to \infty$, mais aussi qu'il existe la limite

$$\lim_{t\to\infty} y_i^*(t) = l_i < \infty. \tag{3}$$

Nous introduisons quelques notions pour simplifier notre langage. Suivant la figure ci-dessous représentant l'allure quantitative de la fonction



nous donnons aux valeurs i, l, a, t_0 les noms suivants:

(5)
$i =$ l'état initial des connaissances,
$l =$ la capacité de l'élève,
$a =$ l'aptitude de l'élève.
$t_0 =$ le moment de maturité de l'élève.

Or, il y a beaucoup de familles de fonctions qui satisfassent aux hypothèses énoncées plus haut. Nous citerons par exemple trois familles de cette sorte (chaque à 4 paramètres), notamment

(5) I $$y^*(t) = \alpha \operatorname{arctg}\,[\beta(t+\gamma)] + \delta$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes (paramètres) remplissant, au titre du problème, quelques inégalités, à savoir

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma < 0,\ \delta > 0,\ \alpha \operatorname{arctg}\,(\beta\gamma) + \delta > 0. \tag{6}$$

Nous avons alors

$$i = \alpha \operatorname{arctg} \gamma + \delta > 0,\ l = \delta + \frac{\alpha\pi}{2},\ a = \alpha\beta,\ t_0 = -\gamma. \tag{7}$$

(8) II $$y^*(t) = \frac{\alpha(t+\beta)^2 + \gamma}{(t+\beta)^2 + \delta},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes remplissant de la même cause comme auparavant les inégalités

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \delta > 0,\ \alpha\delta - \gamma > 0,\ \beta^2 < \frac{\delta}{3}. \tag{9}$$

Dans ce cas — là les quantités i, l, a, t_0 sont égales à

$$i = \frac{\alpha\beta^2 + \gamma}{\beta^2 + \delta},\ l = \alpha,\ a = \frac{9}{8\sqrt{3}}(\alpha\delta - \gamma)\cdot \delta^{5/2},\ t_0 = -\beta + \sqrt{\frac{\delta}{3}} \tag{10}$$

Comme une troisième famille des fonctions satisfaisant à nos hypothèses on peut prendre la suivante

(11) III $$y = \delta + \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}},$$

où

$$\alpha > 0,\ \alpha + \delta > 0,\ \beta > 1,\ \gamma > 0. \tag{12}$$

On obtient alors

$$i = \frac{\alpha}{1+\beta} + \delta,\ l = \alpha + \delta,\ a = \frac{\alpha\gamma(\beta-1)}{\beta},\ t_0 = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{\beta-1}{\beta}$$

Nous laissons ici de côté la question s'il existe (dans tous les trois cas I, II, III) une solution par rapport aux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant données les valeurs positives i, l, a, t_0.

Remarquons que le coefficient i dépend de l'élève pendant que les coefficients l, a, t_0 dépendent aussi bien de l'élève de même que du maître.

Si l'équipe des élèves dans la classe compte n élèves où $n \geqslant 2$, alors le résultat de l'enseignement chez l'élève x_i ne sera pas égal à $y_i^*(t)$, mais plus bas en général parce que l'enseignement collectif abaisse le plus souvent les résultats individuels. J'ai dit „le plus souvent" parce que il peut arriver que l'enseignement individuel d'un élève plus faible peut donner un résultat plus bas que l'enseignement collectif si cet élève possède une grande ambition et si les résultats d'un collègue plus doué peuvent lui donner l'impulsion pour une étude plus intensive. Par contre, les résultats de l'enseignement collectif seront chez un élève plus doué toujours réduits si dans la classe la nombre des élèves faibles augmentera.

Nous allons traiter au commencement le cas $n = 2$.

Nous posons l'hypothèse suivante:

Si pour un t déterminé on a

$$y_1^*(t) < y_2^*(t) \tag{14}$$

et si nous dénotons par $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ les valeurs „corrigées" par rapport à $y_i^*(t)$, alors on a, par définition,

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_i^*}{dt} - \rho_i \cdot \Phi(y_2^* - y_1^*), \tag{15}$$

où $\Phi(u)$ est une fonction non-négative, croissante, déterminée pour $u \geqslant 0$, $\Phi(0) = 0$, ρ_2 est une constante positive, ρ_1 une constante, non nécessairement positive (ρ_1 peut être négatif pour un élève ambitieux). Nous supposons en outre que Φ est une fonction continue. Les formules (15) donneront, par conséquent,

$$y_i(t) = y_i^*(t) - \rho_i \int_0^t \Phi[y_2^*(u) - y_1^*(u)]\, du. \tag{16}$$

Pour n quelconque les fonctions corrigées s'exprimeront comme suit:

$$y_i(t) \overset{\text{def}}{=} y_i^*(t) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}(t)\, \rho_{ik} \int_0^t \Phi[|y_k^*(u) - y_i^*(u)|]\, du, \tag{17}$$

où ρ_{ik} est une matrice-carrée de constantes positives, ε_{ik} une matrice composée des nombres $+1$, -1, 0 telle que l'on a

$$\begin{cases} \varepsilon_{ik} = 1 \text{ pour } k > i, \\ \varepsilon_{ik} = 0 \text{ pour } k = i \\ \varepsilon_{ik} = -1 \text{ resp. } +1 \text{ suivant que l'élève } x_i \text{ est ambitieux ou non.} \end{cases} \tag{18}$$

Les constantes ρ_{ik} doivent être suffisamment petites afin que toutes les fonctions $y_i(t)$ soient croissantes ce qui est un postulat naturel du point de vue de l'intuition. Cette circonstance peut être réalisée à cause du fait que l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t \Phi[|y_k^*(u) - y_i^*(u)|]\, du \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

est bornée vu l'hypothèse (3) et de la monotonie des fonctions y_i^*.

Les constantes ρ_{ik} dépendront non seulement de l'aptitude des élèves mais aussi de l'individualité du maître, elles seront tant plus petites moins que le maître soit plus habile.

Le niveau moyen global des connaissances à la fin de la période de l'enseignement $(t = T)$ peut etre défini par la formule

$$Y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i(T). \tag{20}$$

L'équipe des élèves $\{x_i\}$ étant fixée, la valeur Y dépend du maître, parce que de lui dépendent non seulement les paramètres l_i, mais partiellement aussi les a_i et enfin les constantes ρ_{ik}.

On pourrait prendre au lieu de la formule (17) la formule plus simple suivante

$$y_i(t) \overset{\text{def}}{=} y_i^*(t) - \sigma_i \int_0^t \Phi[\operatorname*{Max}_k y_k^*(u) - \operatorname*{Min}_k y_k^*(u)]\, du \tag{21}$$

où les constantes σ_i sont suffisamment petites.

Des considérations précédentes il suit en particulier cette conclusion importante que, le maître étant fixé, si l'on inclut à l'ensemble d'élèves $\{x_i\}$ un élève x_{n+1} pour lequel l_{n+1} est plus petit que les valeurs $l_1, \ldots, l_n$, alors le résultat global diminuera, ce qui se vérifie en pratique.

Dans les considérations ci-dessus nous avons supposé en silence que tous le processus de l'enseignement a lieu pendant des heures dans la classe et nous avons fait abstraction du composant du travail des élèves dans la maison.

Reçu le 19. III. 1974.