REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE LA THÉORIE
DE L'APPROXIMATION, Tome 3, Nº 2, 1974, pp. 167–171

SUR UNE RELATION DANS LE CALCUL DES NEUTRICES

par

GHEORGHE HALIC

(Arad)

Dans cet article on établit deux conditions suffisantes pour la valabilité de la relation de passage à la limite dans le calcul des neutrices.

Terminologie. Neutrice: groupe additif N de fonctions réelles, définies sur un ensemble X de nombres réels, avec la propriété que, si pour chaque $x \in X$, $\nu(x) = \gamma$, où $\nu \in N$ et γ est un nombre réel qui ne dépend pas de x, alors $\gamma = 0$.

La fonction f est neutralisée par la neutrice N: il existe un nombre réel γ et une fonction $\nu \in N$, tel que $f = \gamma + \nu$.

La valeur neutralisée de la fonction f par la neutrice N: le nombre réel γ de la relation précédente.

Ces premières trois notions ont été introduites par C. J. VAN DER CORPUT dans [1]. On y démontre que la fonction f et la neutrice N déterminent uniquement la valeur neutralisée γ, et pour cette raison, elle est notée par $f(N)$.

Dans cet article nous introduisons quelques classes de neutrices.

„Neutrice qui conserve la délimitation": une neutrice N, avec la propriété que, si f est neutralisée par N et si pour chaque $x \in X$, $|f(x)| < M$ où M est un nombre réel positif, alors $|f(N)| \leq M$.

„Neutrice complète": une neutrice avec la propriété que, si elle contient les termes d'une suite convergente de fonctions ν_n, alors elle contient aussi la limite ν de la suite.

„Neutrice rationnelle": une neutrice N avec la propriété que, si a est un nombre rationnel et $\nu \in N$, alors $a\nu \in N$.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur un ensemble X de nombres réels et qui converge vers une fonction f. Soit N une neutrice qui neutralise les f_n et f.

THÉORÈME. *Pour que la suite $(f_n(N))$ converge et l'égalité* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = f(N)$ *ait lieu, il est suffisant que :*

— *la convergence de la suite (f_n) soit uniforme,*

— *la neutrice N conserve la délimitation.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. La convergence uniforme de la suite (f_n) implique l'existence d'un nombre naturel n^*, tel que pour chaque $n > n^*$ et pour chaque $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$. Puisque les fonctions f_n et f sont neutralisées par la neutrice N, on montre facilement que $g_n = f_n - f$ seront neutralisées aussi par N, et $g_n(N) = f_n(N) - f(N)$. Étant donné que N conserve la délimitation, $|g_n(x)| < \varepsilon'$ implique $|f_n(N) - f(N)| = |g_n(N)| \leq \varepsilon' < \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = f(N)$.

Nous allons montrer que la condition de convergence uniforme est essentielle. Pour cela, considérons la suite constituée par les fonctions $f_n(x) = r_n x$, définies sur la droite réelle, où (r_n) est une suite de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$, et la neutrice N constituée par les fonctions de la forme $(a + b\sqrt{2})\,x - b$, définies sur la droite réelle, où a est un nombre rationnel quelconque et b un nombre entier quelconque. On voit que la suite (f_n) converge ponctuellement vers la fonction $f(x) = \sqrt{2}x$. On vérifie facilement que l'ensemble N est un groupe additif. Si pour chaque x, $(a + b\sqrt{2})x - b = \gamma$, où γ ne dépend pas de x, alors $(a + b\sqrt{2})\,x = \gamma + b$ donc est constante. Cela peut avoir lieu seulement si $a + b\sqrt{2} = 0$, ou $a = -b\sqrt{2}$, donc $a = b = 0$. Pour montrer que la neutrice N conserve la délimitation, remarquons que chaque fonction $h(x)$, neutralisée par N, est de la forme

$$h(x) = h(N) + (a + b\sqrt{2})\,x - b$$

où a est un nombre rationnel quelconque, et b est un nombre entier quelconque. Supposons que pour chaque $x \in X$, $|h(x)| < M$, où M est un nombre réel positif. On peut écrire en ce cas

$$-M - (a + b\sqrt{2})\,x + b < h(N) < M - (a + b\sqrt{2})\,x + b.$$

Pour $x = \dfrac{b}{a + b\sqrt{2}}$ nous obtenons $-M < f(N) < M$, ou $|f(N)| < M$, donc N conserve la délimitation. Pour chaque nombre naturel n, on a $f_n(N) = 0$, $f(N) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = 0 \neq 1 = f(N)$.

Nous allons montrer encore que la condition, que la neutrice N conserve la délimitation, est essentielle. Pour cela, considérons la suite formée par les fonctions $f_n(x) = r_n \sin x$, définies sur la droite réelle, où (r_n) est une suite de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$, et la neutrice N constituée par les fonctions de la forme $(a + b\sqrt{2}) \sin x - 3b$, définies sur la droite réelle, où a est un nombre rationnel quelconque et b, un nombre entier quelconque. On voit que la suite (f_n) converge uniformément sur la droite réelle vers la fonction $f(x) = \sqrt{2} \sin x$. On montre facilement que l'ensemble N forme une neutrice. Le fait que la fonction f a la propriété $|f(x)| < 2$ et $f(N) = 3$, montre que la neutrice N ne conserve pas la délimitation. Puisque $f_n(N) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = 0 \neq 3 = f(N)$.

Un cas particulier important est celui, où la neutrice N est constituée par toutes les fonctions ν, définies sur un ensemble de nombres réels X, qui tend vers 0, quand $x \to x_0$, où $x_0 \in X'$. La neutrice N conserve la délimitation. En effet, si une fonction f est neutralisée par N, alors f peut s'écrire sous la forme $f = f(N) + \nu$, où $\nu \in N$. Supposons que pour chaque $x \in X$, $|f(x)| < M$. Ceci peut s'écrire encore $-M - \nu(x) < f(N) < M - \nu(x)$. Si dans cette relation nous faisons x tendre vers x_0, alors nous obtenons $-M \leq f(N) \leq M$, ou $|f(N)| \leq M$.

En énonçant le théorème précédent pour cette neutrice particulière, nous obtenons le théorème bienconnu de l'analyse classique :

„(f_n) étant une suite de fonctions définies sur X, qui converge vers f, et telle que les limites $\lim\limits_{n\to x_0} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existent, a lieu la proposition suivante : pour que la relation $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ait lieu, il est suffisant que la suite (f_n) converge uniformément".

4. Puisque les neutrices usuelles rentrent dans la classe des neutrices rationnelles, nous allons étudier dans ce qui suit, les neutrices de cette classe.

Lemme. *Si N est une neutrice rationnelle complète, alors quelque soit le nombre réel a et quelque soit $\nu \in N$, il résulte $a\,\nu \in N$.*

Démonstration. Elle résulte directement de la définition du nombre réel et des définitions des classes respectives de neutrices.

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles, définies sur un ensemble X de nombres réels, et qui converge sur cet ensemble. Soit N une neutrice rationnelle qui neutralise les fonctions f, et soit f la limite de la suite (f_n).

THÉORÈME. *Pour que la suite $(f_n(N))$ converge et l'égalité* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = f(N)$ *ait lieu, il est suffisant que la neutrice N soit complète.*

Démonstration. Puisque N neutralise les fonctions f_n, pour chaque nombre naturel n, ont lieu les relations $f_n(x) = f_n(N) + \nu_n(x)$, où $\nu_n(x) \in N$.

La suite de nombres $(f_n(N))$ ne peut avoir aucun point limite infini. Dans le cas contraire il existerait une sous-suite $f_{i_n}(N)$, qui tendrait vers cette limite infinie (pour fixer les idées cette limite est ∞). Puisque $f_{i_n}(N) \to \infty$, il résulte que pour chaque $n > n_0$, tous les termes de la suite sont positifs. Nos considérations se réfèrent à la sous-suite $f_{i_{n_0+1}}, f_{i_{n_0+2}}, \ldots$, mais pour ne pas compliquer la notation, nous supposerons que dans la suite (f_{i_n}) tous les termes sont positifs. En divisant les relations $\nu_{i_n}(x) = f_{i_n}(x) - f_{i_n}(N)$ par $f_{i_n}(N)$ et en tenant compte de l'hypothèse et du lemme ce qui donne $\frac{\nu_{i_n}(x)}{f_{i_n}(N)} = \mu_{i_n}(x) \in N$ nous obtenons $\mu_{i_n}(x) = \frac{f_{i_n}(x)}{f_{i_n}(N)} - 1$. Puisque pour chaque x, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|f_{i_n}(x)|}{f_{i_n}(N)} = \frac{f(x)}{\infty} = 0$ il résulte que la suite $\mu_{i_n}(x)$ est convergente, et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i_n}(x) = -1$. Vu que N est une neutrice complète, elle doit contenir outre les termes de la suite convergente $\mu_{i_n}(x)$, aussi la limite de cette suite. Mais cela est absurde car une neutrice ne peut contenir la constante -1. Donc la suite $(f_n(N))$ ne peut avoir le point limite ∞. On montre de la même manière que cette suite ne peut avoir comme point limite $-\infty$.

La suite $(f_n(N))$ ne peut avoir deux points limite différents. Si l_1 et l_2 étaient deux points limite de la suite $(f_n(N))$, alors il existerait deux sous-suites $(f_{i_n}(N))$ et $(f_{j_n}(N))$ qui tendraient vers ces limites. Dans les relations $\nu_{i_n}(x) = f_{i_n}(x) - f_{i_n}(N)$ et $\nu_{j_n}(x) = f_{j_n}(x) - f_{j_n}(N)$ les limites des membres droits existent donc en tenant compte que le neutrice N est complète, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_{i_n}(x) = f(x) - l_1 \in N$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_{j_n}(x) = f(x) - l_2 \in N$. Vu que N est un groupe, il résulte que la différence $f(x) - l_1 - (f(x) - l_2) = l_2 - l_1$ appartient aussi à N, ce qui est possible seulement si $l_2 = l_1$.

Puisque la suite de nombres $(f_n(N))$ a un seul point limite fini, il résulte qu'elle est convergente.

Vu que (f_n) et $(f_n(N))$ sont des suites convergentes, il résulte que $\nu_n(x) = f_n(x) - f_n(N)$ est aussi une suite convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(x) = f(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(N)$. Mais du fait que N est une neutrice complète, $f(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) \in N$, ce qui signifie, que la neutrice N neutralise la fonction f et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(N) = f(N)$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour montrer que la condition que la neutrice N soit complète est essentielle, considérons la suite constituée par les fonctions $f_n(x) = r_n x$, définies sur la droite réelle, où (r_n) est une suite de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$ et la neutrice rationnelle N, constituée par les fonctions de la forme $(a + b\sqrt{2})\,x - b$, définies sur la droite réelle, où a et b sont deux nombres rationnels quelconques. On voit que la suite (f_n) tend vers la fonction $f(x) = \sqrt{2}x$. La vérification du fait que N est une neutrice est simple. Quoique la neutrice N contienne les fonctions $r_n x$, avec $r_n \to 2$, elle ne contient pas la fonction limite $\sqrt{2}x$, donc elle n'est pas une neutrice complète. Vu que pour chaque nombre naturel n, $f_n(N) = 0$ et $f(N) = 1$, on a $\lim f_n(N) = 0 \neq 1 = f(N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Van der Corput J. G., *Introduction to the Neutrix calculus.* Journal d'Analyse Mathématique, **7**, 281–399, 1959–60.

Reçu le 8. IV. 1974.