MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 87–97

SUR UNE MÉTHODE POUR LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION FRACTIONNAIRE PAR SEGMENTS

par

ŞTEFAN ŢIGAN

(Cluj — Napoca)

1. Introduction

Soit D un ensemble nonvide donné d'un espace topologique X et soit egalement $f_i : D \to R$, $k_i : D \to R$(* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ fonctions données. Nous supposons encore q'on a :

(1) $$k_i(x) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

pour tout $x \in D$.

La fonction $f : D \to R$, définie par la formule :

(2) $$f(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)}$$

pour tout $x \in D$, s'appelle fonction fractionnaire par segments.

Dans ce travail nous considérons le problème d'optimisation suivant (appelé le problème d'optimisation fractionnaire par segments) :

PF. Déterminer

(3) $$a = \sup \{f(x) \mid x \in D\},$$

où f est définie par (2).

---

* R désigne l'ensemble des nombres réels.

Un élément $x^* \in D$ s'appelle solution optimale pour le problème PF si $f(x^*) = a$.

Une suite (x_n), $x_n \in D$, s'appelle solution asymptotique optimale pour le problème PF si :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Au problème PF nous pouvons attacher, pour tout $\lambda \in R$, le problème d'optimisation suivant :

$PF\lambda$. Déterminer :

$$\sup \{\min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - \lambda k_i(x)) \mid x \in D\}.$$

Dans ce travail nous présentons une méthode qui réduit la résolution du problème PF à la résolution d'une suite de problèmes PF_λ. Cette méthode est similaire au procedé considéré par DINKELBACH [1], pour la programmation fractionnaire nonlinéaire (voir egalement pour la programmation fractionnaire linéaire ou pseudobooleene [2], [3], [4], [5]), ou avec la méthode présentée dans [6] pour un problème d'optimisation fractionnaire.

2. Quelques propriétés préliminaires

Pour tout $\lambda \in R$ et $x \in D$ on désigne :

$$F(\lambda, x) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - \lambda k_i(x)),$$

(4) $$F(\lambda) = \sup \{F(\lambda, x) \mid x \in D\}.$$

D'abord on démontre les lemmes suivants.

L e m m e 1. *La fonction* $F: R \to R \cup \{+\infty\}$ *définie par la formule* (4) *est décroissante.*

Démonstration : Soient $\lambda', \lambda'' \in R$, tels que $\lambda' \leqslant \lambda''$. Alors, de (1), pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$, on a :

$$f_i(x) - \lambda'' k_i(x) \leqslant f_i(x) - \lambda' k_i(x),$$

pour tout $x \in D$. Donc, il résulte :

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - \lambda'' k_i(x)) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - \lambda' k_i(x)),$$

pour tout $x \in D$, ce qui implique :

$$F(\lambda'') \leqslant F(\lambda').$$

Le lemme est démontré.

L e m m e 2. Si $a < +\infty$, alors

(5) $$F(a) \leqslant 0.$$

Démonstration : De (2) et (3), il résulte que :

$$a \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)},$$

pour tout $x \in D$. Mais alors pour tout $x \in D$, on a :

(6) $$a \geqslant \frac{f_i(x)}{k_i(x)},$$

quelque soit $i \in J(x)$, où :

$$J(x) = \left\{ i \,\middle|\, \frac{f_i(x)}{k_i(x)} = f(x) \right\}.$$

De (6), pour tout $x \in D$, on obtient :

$$f_i(x) - a k_i(x) \leqslant 0,$$

quelque soit $i \in J(x)$, ce qui entraîne (parce que $J(x) \neq \Phi$, pour tout $x \in D$), que :

$$F(a, x) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - a k_i(x)) \leqslant 0.$$

Donc, on a :

$$F(a) = \sup \{F(a, x) \mid x \in D\} \leqslant 0.$$

ce qui démontre le lemme.

L e m m e 3. *Soit* $\lambda_0 \in R$. *Si* $F(\lambda_0) = 0$, *alors :*

(7) $$a = \sup \left\{ \min_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)} \,\middle|\, x \in D \right\} \leqslant \lambda_0.$$

Démonstration : La relation $F(\lambda_0) = 0$, entraîne l'inégalité :

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} (f_i(x) - \lambda_0 k_i(x)) \leqslant 0,$$

pour tout $x \in D$, d'où, pour chaque $x \in D$, on obtient :

(8) $$f_i(x) - \lambda_0 k_i(x) \leqslant 0,$$

pour tout $i \in J(x)$. Mais, de (1) et (8), pour tout $x \in D$, on a :

$$\frac{f_i(x)}{k_i(x)} \leqslant \lambda_0,$$

pour $i \in J(x)$. Donc, puisque pour tout $x \in D$, $J(x) \neq \Phi$, il résulte que :

(9) $$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)} \leqslant \lambda_0,$$

quleque soit $x \in D$. Mais, l'inégalité (9) entraîne (7).

THÉORÈME 1. *Soit* $x_0 \in D$ *et soit*

(10) $$\lambda_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_0)}{k_i(x_0)}.$$

Alors, x_0 *est solution optimale pour le problème PF, c'est-à-dire :*

(i) $$\lambda_0 = a = \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)} \mid x \in D \right\},$$

si et seulement si :

(ii) $$F(\lambda_0) = 0.$$

Démonstration : 1. En effet, de (i) et (10), d'après le lemme 2, on a :

(11) $$F(\lambda_0) \leqslant 0.$$

D'autre part, (10) entraîne que :

$$\lambda_0 \leqslant \frac{k_i(x_0)}{j_i(x_0)},$$

pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$, ce qui implique (en tenant compte de (1)) que :

(12) $$f_i(x_0) - \lambda_0 k_i(x_0) \geqslant 0,$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$. De (12) et (4) on a :

(13) $$F(\lambda_0) \geqslant F(\lambda_0, x_0) \geqslant 0.$$

Mais les inégalité (11) et (13) impliquent la condition (ii).

2. De (10) il résulte que :

(14) $$\lambda_0 \leqslant a.$$

Mais, d'après le lemme 3, la condition (ii) entraîne que $a \leqslant \lambda_0$, donc, en tenant compte de (14), il résulte $a = \lambda_0$. Le théorème est ainsi démontré.

L e m m e 4. *Supposons que* $a < +\infty$, *et que :*

(15) $$0 < k_i(x) \leqslant \alpha,$$

pour tout $x \in D$ *et* $i = 1, 2, \ldots, m$. *Alors, pour tout* $\lambda \in f(D) \cup \{a\}$(*), *on a l'inégalité :*

(16) $$F(\lambda) \geqslant 0.$$

Démonstration : Evidemment, si $\lambda \in f(D) \cup \{a\}$ on a $\lambda \leqslant a$. Mais, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in D$, tel que :

$$\lambda - \varepsilon \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_\varepsilon)}{k_i(x_\varepsilon)},$$

d'où, il résulte que :

(17) $$\lambda - \varepsilon \leqslant \frac{f_i(x_\varepsilon)}{k_i(x_\varepsilon)},$$

pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

De (15) et (17), pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$, on obtient :

$$f_i(x_\varepsilon) - \lambda k_i(x_\varepsilon) \geqslant -\varepsilon k_i(x_\varepsilon) \geqslant -\varepsilon\alpha,$$

d'où, on a :

(18) $$F(\lambda) \geqslant F(\lambda, x_\varepsilon) \geqslant -\varepsilon\alpha.$$

Mais, (18) entraîne l'inégalité (16). Le lemme est ainsi démontré.

THÉORÈME 2. *Supposons que* $a < +\infty$ *et qu'on a :*

(19) $$0 < \beta \leqslant k_i(x) \leqslant \alpha,$$

pour tout $x \in D$ *et* $i = 1, 2, \ldots, m$. *Alors* $\lambda_0 = a$ *si et seulement si* $F(\lambda_0) = 0$.

---

* $f(D) = \{f(x) / x \in D\}$.

Démonstration : 1. En effet, de la relation $\lambda_0 = a$, il résulte (en utilisant le lemme 2) que $F(\lambda_0) \leqslant 0$. D'autre part, de (19) et $\lambda_0 = a$, d'après le lemme 4, on a $F(\lambda_0) \geqslant 0$. Donc $F(\lambda_0) = 0$.

2. Maintenant de $F(\lambda_0) = 0$ d'après le lemme 3, on a :

$$a \leqslant \lambda_0. \tag{20}$$

D'autre part, de $F(\lambda_0) = 0$ et de (4), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe au moins un élément $x_\varepsilon \in D$, tel que :

$$-\varepsilon \leqslant f_i(x_\varepsilon) - \lambda_0 k_i(x_\varepsilon), \tag{21}$$

quelque soit $i = 1, 2, \ldots, m$. Mais de (19) et (21), on a :

$$\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{k_i(x_\varepsilon)} \leqslant \frac{f_i(x_\varepsilon)}{k_i(x_\varepsilon)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

d'où, en employant l'inégalité $k_i(x_\varepsilon) \geqslant \beta (> 0)$, il résulte :

$$\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{\beta} \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_\varepsilon)}{k_i(x_\varepsilon)} \cdot \leqslant \sup \left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x)}{k_i(x)} \mid x \in D \right\},$$

d'où puisque ε est un nombre positif arbitraire on obtient :

$$\lambda_0 \leqslant a. \tag{22}$$

Mais les inégalités (20) et (22) impliquent $\lambda_0 = a$.

3. Algorithmes pour le probléme PF

Algorithme 1. A l'itération n on suppose qu'on a un élément $X_{n-1} \in D$

I. On prend :

$$\lambda_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_{n-1})}{k_i(x_{n-1})} \tag{23}$$

et on détermine un élément $x'_n \in D$, tel que :

$$F(\lambda_n) - \varepsilon_n \leqslant F(\lambda_n, x'_n), \tag{24}$$

où (ε_n) est une suite de nombres réels positifs, avec la propriété :

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n. \tag{25}$$

II. Si $F(\lambda_n, x'_n) \leqslant 0$, on prend $x_n = x_{n-1}$ et on passe à l'étape I avec $n + 1$ au lieu de n.

III. Si $F(\lambda_n, x'_n) > 0$, alors on prend $x_n = x'_n$ et on passe à l'étape I avec $n + 1$ au lieu de n.

Si on suppose que pour tout $\lambda \in R$ on peut déterminer $x' \in D$, tel que :

$$F(\lambda, x') = \sup \{F(\lambda, x) \mid x \in D\},$$

alors on peut considérer la variante suivante de l'algorithme 1.

Algorithme 1.

I'. On prend $\lambda_n = f(x_{n-1})$, et on détermine $x_n \in D$, tel que :

$$F(\lambda_n, x_n) = F(\lambda_n).$$

II'. Si $F(\lambda_n) = 0$, alors (d'après le théorème 1) x_{n-1} est une solution optimale pour le problème PF et l'algorithme s'arrête.

III'. Si $F(\lambda_n) > 0$, alors on passe à l'étape I' avec $n + 1$ au lieu de n.

4. Convergence de l'algorithme

Dans cette section on donne des conditions suffisantes (sur le problème PF) afin que la suite (x_n), obtenue par l'algorithme 1 soit une solution asymptotique optimale pour le problème PF.

D'abord, on démontre les lemmes suivants.

L e m m e 5. *La suite* (λ_n) (obtenue par l'algorithme 1) *est nondécroissante.*

Démonstration : En effet, si $F(\lambda_n, x'_n) \leqslant 0$, alors puisque $x_n = x_{n-1}$ il résulte (en vertu de (23)) que $\lambda_{n+1} = \lambda_n$.

Si $F(\lambda_n, x'_n) > 0$, alors on a également $F(\lambda_n, x_n) > 0$, ce qui implique que :

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} (f_i(x_n) - \lambda_n k_i(x_n)) > 0,$$

d'où il résulte :

$$f_i(x_n) - \lambda_n k_i(x_n) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Mais, en utilisant (1), on a :

$$\lambda_n < \frac{f_i(x_n)}{k_i(x_n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

d'où l'on obtient :

$$\lambda_n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_n)}{k_i(x_n)} = \lambda_{n+1},$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 6. Si

(i) $a < +\infty$,

(ii) *les fonctions* k_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *vérifient la condition* (15), *alors il existe une sous-suite* $(F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}))$ *de la suite* $(F(\lambda_n, x_n))$ *telle que :*

(27) $$\lim_{n \to \infty} F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}) = 0.$$

Démonstration : L'algorithme 1 conduit à l'une de situations :

a 1) il existe un $n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$F(\lambda_n, x'_n) > 0,$$

a2) il existe une sous-suite $(F(\lambda_{i_n}, x_{i'_n}))$ de la suite $(F(\lambda_n, x_n))$ telle que :

(28) $$F(\lambda_{j_n}, x_{j'_n}) \leqslant 0.$$

Supposons que nous sommes dans le cas a1) et que le lemme ne soit pas vrai. Alors, il existe un nombre réel $\theta > 0$, tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

(29) $$F(\lambda_n, x_n) \geqslant \theta,$$

Mais de (29), pour tout $n \geqslant n_0$, il résulte que :

$$f_i(x_n) - \lambda_n k_i(x_n) \geqslant \theta \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

d'où, en tenant compte de (1) et (15) on obtient :

$$\frac{f_i(x_n)}{k_i(x_n)} - \lambda_n \geqslant \frac{\theta}{k_i(x_n)} \geqslant \frac{\theta}{\alpha} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ce qui entraîne que :

(30) $$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_n)}{k_i(x_n)} - \lambda_n \geqslant \frac{\theta}{\alpha} > 0,$$

pour tout $n \geqslant n_0$. De (23) et (30) on déduit :

(31) $$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \frac{\theta}{\alpha} > 0,$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

D'autre part, d'après le lemme 5, la suite (λ_n) est nondécroissante. Cette suite est également bornée par a (puisque $x_n \in D$ pour tout $n \in N$). Donc on a :

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda^* \leqslant a.$$

Alors, en passant à la limite en (31), on obtient :

$$\lambda^* - \lambda^* = 0 \geqslant \frac{\theta}{\alpha} > 0,$$

ce qui est une contradiction. Donc, dans le cas a1) le lemme est vrai.

Dans le cas a2), de (23) et (28), on déduit :

(32) $$F(\lambda_{j_n}) - \varepsilon_{j_n} \leqslant F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}) \leqslant 0,$$

pour tout $n \in N$.

Mais puisque $F(\lambda_{i_n}) \geqslant 0$ (d'aprés le lemme 4) de (32), il résulte :

$$-\varepsilon_{i_n} \leqslant F(\lambda_{j_n}, x_{j_n}) \leqslant 0,$$

d'où, en utilisant (25), on obtient (27). Donc, dans le cas a2) le lemme est également vrai.

Le théorème suivant donne des conditions, dans lesquelles l'algorithme 1 fournit une suite (x_n) qui est une solution asymptotique optimale pour le problème *PF*, c'est-à-dire :

(33) $$\lim_{n \to \infty} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{f_i(x_n)}{k_i(x_n)} \right) = a.$$

THÉORÈME 3. *Si*

(i) $$a < +\infty,$$

(ii) *les fonctions* $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ *vérifient la condition* (19), *alors la suite* (x_n) (obtenue par l'algorithme 1) *est une solution asymptotique optimale pour le problème PF.*

Démonstration : En effet, d'après le lemme 5 et en vertu de (23), on a :

(34) $$\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant a,$$

pour tout $n \in N$, d'où il résulte que :

(35) $$\lambda_n \leqslant \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^* \leqslant a.$$

Mais, de (34) et (35), en utilisant le lemme 1 et le théorème 2, on déduit :

(36) $$F(\lambda_n) \geqslant F(\lambda_{n+1}) \geqslant F(\lambda^*) \geqslant F(a) = 0,$$

ce qui entraîne que :

(37) $$\lim_{n\to\infty} F(\lambda_n) = F^* \geqslant F(\lambda^*).$$

D'autre part, d'après le lemme 6, il existe une sous-suite $(F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}))$ (de la suite $(F(\lambda_n, x'_n))$ telle que :

(38) $$\lim_{n\to\infty} F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}) = 0.$$

On deduit de (24), pour tout $n \in N$:

(39) $$F(\lambda_{j_n}) - \varepsilon_{j_n} \leqslant F(\lambda_{j_n}, x'_{j_n}).$$

Mais de (37)—(39) (en passant à la limite en (39)) on obtient l'inégalité $F^* \leqslant 0$. Alors de (36) et (37) il résulte que :

$$F(\lambda^*) = 0$$

ce qui implique (d'après le théorème 2) que $\lambda^* = a$, d'où, en tenant compte de (23) et (35), il résulte (33). Le théorème est ainsi démontré.

THÉORÈME 4. *Si*

(i) $$a < +\infty,$$

(ii) les fonctions $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ *vérifient la condition* (15),

(iii) *le problème PF a au moins une solution optimale, alors la suite* (x_n) *est une solution asymptotique optimale pour le problème PF.*

Démonstration : La démonstration du théorème 4 est similaire à celle du théorème 3.

THÉORÈME 5. *Si*

(i) $$a < +\infty,$$

(ii) *D est un ensemble fermé,*

(iii) *les fonctions f_i et k_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont continues sur l'ensemble D, et si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

a1) *les fonctions $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ vérifient la condition* (19)

a2) *les fonctions $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ vérifient la condition* (15) *et le problème PF a au moins une solution optimale, alors tout point limite x^* de la suite (x_n) est une solution optimale pour le problème PF.*

Démonstration : En effet, x^* etant un point limite de la suite (x_n), il existe une sous-suite (x_{j_n}), telle que $x_{j_n} \to x^*$. Mais, puisque les fonctions f_i et $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ sont continues sur D, d'après le théorème 3 ou 4 il résulte que :

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(\min_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{f_i(x_{j_n})}{k_i(x_{j_n})} \right) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{f_i(x^*)}{k_i(x^*)}.$$

Alors, puisque D est fermé, on a $x^* \in D$ et donc x^* est une solution optimale pour le problème PF.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dinkelbach W., *On nonlinear Fractional Programming*, Manag. Sci. **13**, 7, 492—498 (1967).

[2] Florian, M., Robillard, P., *Programmation hyperbolique en variables bivalentes*, R I R O, **V—1** 3—9, (1971).

[3] Isbell, J. R., Marlow, W. H., *Attrition Games*, Naval Research Logistics Quarterly, **3**, 71—93 (1956).

[4] Jaghanathan, R., *On some Properties of Programming Problems in Parametric Form Pertaining to Fractional Programming*, Manag. Sci., **12**, 609—615 (1966).

[5] Ţigan, S., *Asupra unei probleme de programare neliniară fractionară*, Revista de Analiză Numerică şi Teoria Aproximaţiei, **1**, 2, 215—226 (1972).

[6] Ţigan, S., *On a method for fractional optimization problems. Application to stochastic optimization problems*, Proceedings of the Computer Science Conference, Székesfehérvar, 22—26 may 1973, Hungary.

Reçu le 23. III. 1974.