MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 99—103

SUR LE PROBLEME DE LA PROGRAMMATION VECTORIELLE FRACTIONNAIRE

par

ŞTEFAN ŢIGAN
(Cluj-Napoca)

Introduction

Dans la théorie des problèmes de la programmation mathématique à plusieurs fonctions objectifs interviennent les notions de solution efficiente et proprement efficiente. Étant donné un problème de programmation vectorielle, l'ensemble des solution efficientes ne coincide, généralement, pas avec l'ensemble des solutions proprement efficientes (voir [2]). Dans cette note on montre que ces deux ensembles sont égaux dans le cas de la programmation vectorielle fractionnaire. Ce résultat a été obtenu à l'aide d'un résultat similaire d' ISERMANN [3] pour la programmation vectorielle linéaire.

Formulation du probleme, notations et définitions

On considère la fonction $z : X \to R^k$, où

$$X = \{x \in R^n / A x = b, \ x \geqslant 0\}.$$

A étant une matrice réelle donnée $m \times n$ dimensionnelle, et b un vecteur donnée de R^n. Pour un élément arbitraire $x \in X$, on a :

$$z(x) = (z_1(x), \ldots, z_k(x)).$$

On considère par la suite, la problème de programmation vectorielle suivant :

(PV). Déterminer $x^0 \in X$ tel que :

(1) $$x^1 \in X \text{ et } z(x^1) \geqslant z(x^0) \text{ implique } z(x^1) = z(x^0).$$

Lorsque dans le problème (PV) la fonction $z: X \to R^k$ a la forme :

$$z(x) = \left(\frac{(c_1, x)}{(d_1, x)}, \ldots, \frac{(c_k, x)}{(d_k, x)}\right),$$

on obtient le problème de la programmation fractionnaire (PVF(C, D)), où c_i, d_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) sont vecteurs donnés de R^n, C et D sont les matrices $C = (c_1, \ldots, c_k)$, $D = (d_1, \ldots, d_k)$ et (a, x) désigne le produit scalaire des vecteurs a et x de R^n.

D'une manière similaire, lorsque :

$$z(x) = ((h_1, x) \ldots, (h_k, x)), \qquad (h_i \in R^n, \ i = 1, 2, \ldots, k)$$

le problème (PV) est dénommé le problème de la programmation vectorielle linéaire (PVL(H)), H étant la matrice $H = (h_1, \ldots, h_k)$.

Définition 1 : $x^0 \in X$ s'appele *solution efficiente* pour le problème (PV) si x^0 verifie la condition (1).

Soient x, x^0 de X $z(x) = z_1(x), \ldots, z_k(x))$ et $j \in K = \{1, 2, \ldots, k\}$. On désigne par :

$$X_j(x^0) = \{x \in X / z_j(x) > z_j(x^0)\},$$

$$K(x^0) = \{j \in K / X_j(x^0) \neq \emptyset\},$$

$$K(x, x^0) = \{i \in K / z_i(x) < z_i(x^0)\}.$$

Définition 2 : (GEOFFRION [1]) Une solution efficiente x^0 du problème (PV) s'appele *proprement efficiente* s'il existe $r > 0$, tel que pour tout $j \in K(x^0)$ et $x \in X_j(x^0)$ il existe $i \in K(x, x^0)$ tel que :

$$\frac{z_j(x) - z_j(x^0)}{z_i(x^0) - z_i(x)} \leqslant r.$$

Résultats

Par la suite nous considérons le problème de la programmation vectoriel-le fractionnaire (PVF(C, D)),

En ce qui concerne la fonction objectif du problème (PVF(C, D)) nous supposons encore que pour tout $i \in K$, on a :

(2) $$(d_i, x) > 0, \text{ quelque soit } x \in X.$$

Le résultat principal de cette note s'obtient, tout de suite, à l'aide du résultat d'Isermann concernant la programmation vectorielle linéaire et des lemmes suivants.

Soit $x^0 \in X$. Posons

$$H = (h_1, h_2, \ldots, h_k),$$

où pour tout $i \in K$, on a :

(2') $$h_i = (d_i, x^0)c_i - (c_i, x^0)d_i.$$

Lemme 1 : *$x^0 \in X$ est une solution efficiente du problème (PVF(C,D)) si et seulement si x^0 est une solution efficiente pour le problème (PVL(H)).*

Démonstration : Nous écrirons :

$$\bar{z}(x) = ((h_1, x), \ldots, (h_k, x)).$$

(a). Soit x^0 une solution efficiente pour le problème (PVF(C,D)). Supposons que x^0 n'est pas une solution efficiente pour le problème (PVL(H)). Il résulte alors, qu'il existe $x^1 \in X$, tel que :

$$\bar{z}(x^1) \geqslant \bar{z}(x^0) \text{ et } \bar{z}(x^1) \neq \bar{z}(x^0).$$

C'est à dire, on a :

(3) $$(h_i, x^1) \geqslant (h_i, x^0), \ i \in K,$$

et il a $i_0 \in K$, tel que :

(4) $$(h_{i_0}, x^1) > (h_{i_0}, x^0).$$

Mais, de (3) et (4) il résulte :

(5) $$((d_i, x^0)c_i, x^1) - ((c_i, x^0)d_i, x^1) \geqslant ((d_i, x^0)c_i, x^0) - ((c_i, x^0)d_i, x^0) = 0,$$

pour tout $i \in K$, et pour $i = i_0$ on a l'inegalité stricte.

Maintenant, en tenant compte de (2) et (5), pour tout $i \in K$, on obtient :

$$z_i(x^1) = \frac{(c_i, x^1)}{(d_i, x^1)} \geqslant \frac{(c_i, x^0)}{(d_i, x^0)} = z_i(x^0),$$

et

$$z_{i_0}(x^1) > z_{i_0}(x^0),$$

ce qui contredit la supposition que x^0 est une solution efficiente pour le problème (*PVF*(C, D)).

(b). La démonstration de la deuxième partie du lemme est semblable à celle de la première partie.

Par la suite, nous nous servirons des notations :

(6) $$z_j(x) = \frac{(c_j, x)}{(d_j, x)} \ (j \in K),$$

$$\bar{X}_j(x^0) = \{x \in X / (h_j, x) > (h_j, x^0)\} \ (j \in K),$$

$$\bar{K}(x^0) = \{j \in K / \bar{X}_j(x^0) \neq \emptyset\},$$

$$\bar{K}(x, x^0) = \{i \in K / (h_i, x) < (h_i, x^0)\}.$$

De (2), (2′) et (6) on déduit facilement les relations suivantes :

$$\overline{X}_j(x^0) = X_j(x^0),\ (j \in K);\ \overline{K}(x^0) = K(x^0) \text{ et} \tag{7}$$

$$\overline{K}(x, x^0) = K(x, x^0)\ (x \in CX).$$

L e m m e 2 : *Soit*

$$0 < \gamma \leqslant (d_i, x) \leqslant \beta, \tag{8}$$

pour tout $i \in K$. *Alors* $x_0 \in X$ *est une solution proprement efficiente pour le problème* $(PVF(C, D))$ *si et seulement si* x^0 *est une solution proprement efficiente pour le problème* (PVL(H)).

Démonstration : (a). Soit x^0 une solution proprement efficiente pour le problème (PVF(C, D)). Il résulte alors, qu'il existe un $\alpha > 0$, tel que pour tout $j \in K(x^0)$ et $x \in X_j(x^0)$ il existe un $i \in K(x, x^0)$ tel que :

$$\frac{z_j(x) - z_j(x^0)}{z_i(x^0) - z_i(x)} \leqslant \alpha. \tag{9}$$

Mais, de (2′), (6), (8) et (9), on déduit :

$$\alpha \geqslant \frac{\dfrac{(h_j, x)}{(d_j, x)(d_j, x^0)}}{\dfrac{(h_i, x)}{(d_i, x)(d_i, x^0)}} = \frac{(h_j, x) - (h_j, x^0)}{(h_i, x^0) - (h_i, x)} \cdot \frac{(d_i, x)(d_i, x^0)}{(d_j, x)(d_j, x^0)} \geqslant \frac{(h_j, x) - (h_j, x^0)}{(h_i, x^0) - (h_i, x)} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2} \tag{10}$$

De (7) et (10) il résulte que pour tout $j \in \overline{K}(x^0)$ et $x \in \overline{X}_j(x^0)$ il existe un $i \in \overline{K}(x, x_0)$, tel que :

$$\frac{(h_j, x) - (h_j, x^0)}{(h_i, x^0) - (h_i, x)} \leqslant r,$$

où $r = \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} > 0$. Mais, ceci signifie (voir la définition 2) que x^0 est une solution efficiente pour le problème $(PVL(H))$.

(b). La démonstration de la partie (b) du lemme est semblable à celle dde la partie (a).

THÉORÈME : *Supposons remplie la condition* (8). *Alors,* $x^0 \in X$ *est une solution proprement efficiente pour le problème* $(PVF(C, D))$ *si et seulement si* x_0 *est une solution efficiente pour le problème* $(PVF(C, D))$.

Démonstration : Supposons que x^0 est une solution efficiente pour le problème (PVF(C, D)). Alors du lemme 1, il résulte que x^0 est une solution efficiente pour le problème (PVL(H)), d'où, en vertu du théorème 2 de [3], on déduit que x^0 est une solution proprement efficiente pour le problème (PVL(H)). Ensuite, on déduit du lemme 2 que x^0 est une solution proprement efficiente pour le problème (PVF(C, D)). Ceci achève la démonstration.

R E F E R E N C E S

[1] **G e o f f r i o n,** A. M., *Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization.* J. Math. Anal. and Appl., **22**, 618–630 (1968).
[2] **K l i n g e r,** A. *Improper Solutions of the Vector Maximum Problem. Opns. Res.*, **15** (1967) 570–572.
[3] **I s e r m a n n** H., *Proper Efficiency and the Linear Vector Maximum Problem.* Opns. Res., **22**, 1, 189–191 (1974).

Reçu le 23. XI. 1974