MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 13 — 18

SPLINE-SYSTEME UND BESTE APPROXIMATION VON STETIGEN LINEAREN FUNKTIONALEN

von

WERNER HAUSSMANN

(Duisburg)

Bei der klassischen Spline-Interpolation werden Interpolations- und Minimaleigenschaften sowie Approximationsaussagen für stetige lineare Funktionale betrachtet. DELVOS-SCHEMPP [1] führten den Begriff des Spline-Systems ein und untersuchten diese Eigenschaften im Rahmen einer funktionalanalytischen Theorie. Unter schwächeren Voraussetzungen als bei DELVOS-SCHEMPP [1] wurde in [5] das duale Spline-System betrachtet, aus dem sich Approximationseigenschaften für stetige lineare Funktionale herleiten lassen. Wir führen diese Untersuchungen hier fort, und zwar für den wichtigen Fall, daß der Spline-Grundraum X ein Banach-Raum ist.

1. Vollständige normierte Spline-Systeme

(X, P, U, H) heißt ein *vollständiges normiertes Spline-System*, falls gilt:

(i) X ist ein Banach-Raum, H ein Hilbert-Raum (über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$).

(ii) $P : X \to X$ ist eine stetige, lineare und idempotente Abbildung.

(iii) $U : X \to H$ ist eine stetige, lineare und surjektive Abbildung.

(iv) Es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\operatorname{Im} UP \perp \operatorname{Im} U(\mathrm{id}_X - P).$$

(Hierbei verstehen wir unter Im φ das Bild, unter Ker φ im folgenden den Kern der linearen Abbildung φ).

Fordern wir darüber hinaus noch

(v) $\qquad \operatorname{Ker} U \cap \operatorname{Ker} P = (0),$

so nennen wir das vollständige normierte Spline-System (X, P, U, H) *eindeutig*.

Es erfülle (X, P, U, H) die Bedingungen (i) — (iii). $s \in X$ heißt *Spline-Element zu einem gegebenen* $x \in X$, wenn gilt:

$$Ps = Px,$$

$$\|Us\|_H \leq \|Ut\|_H \text{ für alle } t \in X \text{ mit } Pt = Px.$$

Damit können wir folgenden Satz formulieren (vgl. [4]):

SATZ 1.
(1) *(X, P, U, H) erfülle (i) — (iii). Dann gilt: (X, P, U, H) ist ein vollständiges normiertes Spline-System (d.h. es erfüllt auch (iv)) genau dann, wenn Px ein Spline-Element für x ist (und zwar für alle $x \in X$).*

(2) *Gelten für (X, P, U, H) die Bedingungen (i) — (iv), ist $x \in X$ und s_0 ein Spline-Element für x, so haben wir die folgenden Minimaleigenschaften:*

(M1) $\qquad \|Us_0\|_H \leq \|Ut\|_H$ *für alle* $t \in x + \operatorname{Ker} P$.

(M2) $\|U(x - s_0)\|_H \leq \|U(x - s)\|_H$ *für alle* $s \in \operatorname{Im} P \oplus (\operatorname{Ker} U \cap \operatorname{Ker} P)$.

2. Das duale Spline-System und beste Approximation von stetigen linearen Funktionalen

Zur Konstruktion des dualen Spline-Systems gehen wir aus von einem vollständigen normierten (aber nicht notwendig eindeutigen) Spline-System (X, P, U, H). Als Hilfsmittel benötigen wir den folgenden

HILFSSATZ (SARD [6]). *Es seien X, Y und Z Banach-Räume und U eine stetige, lineare und surjektive Abbildung von X auf Y sowie R eine stetige lineare Abbildung von X nach Z. Dann gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $Q : Y \to Z$ mit $R = Q \circ U$.*

Damit beweisen wir

SATZ 2. *Es sei (X, P, U, H) ein vollständiges normiertes Spline-System. Dann gibt es eine Orthogonalprojektion $Q : H \to H$, so daß das folgende Diagramm kommutativ wird:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{U} & H \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ X & \xrightarrow{U} & H \end{array}$$

Beweis. Wegen $\operatorname{Ker} U \subset \operatorname{Ker} UP$ folgt mit dem obigen Hilfssatz, daß es genau eine stetige lineare Abbildung $Q : H \to H$ gibt mit $QU = UP$. Q ist idempotent; denn ist $x \in X$, so gibt es wegen der Surjektivität von U ein $x_0 \in X$ mit $Ux_0 = x$, also ist

$$Qx = QUx_0 = UPx_0.$$

Die Unabhängigkeit von Qx von dem Repräsentanten $x_0 \in U^{-1}(x)$ folgt daraus, daß für jedes $x_1 \in U^{-1}(x)$ gilt:

$$x_0 - x_1 \in \operatorname{Ker} U \subset \operatorname{Ker} UP,$$

d. h. $Qx = UPx_0 = UPx_1$. Jedes $z \in \operatorname{Im} Q$ hat also die Form $z = UPz_0$ mit einem geeigneten $z_0 \in X$. Damit wird

$$Q^2x = Q(UPx_0) = UP(Px_0) = UP^2x_0 = UPx_0 = Qx,$$

also ist Q idempotent.

Um zu zeigen, daß Q eine Orthogonalprojektion ist, weisen wir die Symmetrie von Q nach (vgl. DELVOS-SCHEMPP [1]). Es seien dazu x_0 und y_0 Urbilder von x bzw. y bezüglich U. Dann wird wegen (iv) (mit dem inneren Produkt $(.,.)_H$ in H)

$$\begin{aligned}(Qx, y)_H &= (UPx_0, Uy_0)_H = (UPx_0, UPy_0 + U(\mathrm{id}_X - P)y_0)_H = \\ &= (UPx_0 + U(\mathrm{id}_X - P)x_0, UPy_0)_H = (Ux_0, UPy_0)_H = \\ &= (x, QUy_0)_H = (x, Qy)_H.\end{aligned}$$

Aus der Kommutativität des Diagramms in Satz 2 erhalten wir durch Transponieren das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{U'} & H' \\ {\scriptstyle P'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Q'} \\ X' & \xleftarrow{U'} & H' \end{array}$$

Dabei sind X' und H' die Banachräume der stetigen linearen Funktionale auf X bzw. H, und P', Q' und U' sind die betreffenden *transponierten Abbildungen*. Mit P, Q und U sind auch P', Q' und U' stetig. Aus der Surjektivität von U folgt die Injektivität von U', also existiert die Umkehrung $W' = (U')^{-1} : \operatorname{Im} U' \to H'$. Ist weiter $R' = P'_{|\operatorname{Im} U'}$ die Einschränkung von P' auf $\operatorname{Im} U'$, so erhalten wir

SATZ 3. *Ist (X, P, U, H) ein vollständiges normiertes Spline-System, so ist $(\operatorname{Im} U', R', W', H')$, das duale Spline-System, ebenfalls ein vollständiges normiertes Spline-System. $(\operatorname{Im} U', R', W', H')$ ist eindeutig, und zwar unabhängig davon, ob dies für (X, P, U, H) gilt oder nicht.*

Beweis. (i) Offenbar sind X' und H' Banach-Räume. Da $\operatorname{Im} U = H$ abgeschlossen ist in H, folgt nach dem Closed Range Theorem (vgl. WLOKA [9]), daß auch $\operatorname{Im} U'$ abgeschlossen ist, also ist $\operatorname{Im} U'$ ein Banach-Raum.

(ii) $R' = P'|_{\mathrm{Im}\,U'}$ ist offenbar linear und stetig. Wegen $P'U' = U'Q'$ folgt

$$\mathrm{Im}\ R' = \mathrm{Im}(P'|_{\mathrm{Im}\,U'}) \subset \mathrm{Im}\ U'Q' \subset \mathrm{Im}\ U',$$

und für $x \in \mathrm{Im}\ U'$ gilt

$$R'^2 x = R'^2(U'x_0) = R'(P'U'x_0) = R'(U'Q'x_0) =$$
$$= P'(U'Q'x_0) = P'(P'U'x_0) = P'U'x_0 = R'x.$$

Damit ist R' idempotent.

(iii) W' ist linear und nach Konstruktion surjektiv. Die Stetigkeit von W' ergibt sich aus dem Homomorphiesatz von Banach und dem Closed Range Theorem (vgl. WLOKA [9]). Da nämlich $\mathrm{Im}\ U'$ ein Banach-Raum ist, folgt aus der Linearität, der Stetigkeit und der Surjektivität von $U' : H' \to \mathrm{Im}\ U'$ die Offenheit von U', also ist $W' = (U')^{-1}$ stetig.

(iv) Aus den Beziehungen $P'U' = U'Q'$ und $(\mathrm{id}_{X'} - P')U' = U'(\mathrm{id}_{H'} - Q')$ folgt

$$Q' = W'P'U',$$
$$\mathrm{id}_{H'} - Q' = W'(\mathrm{id}_{X'} - P')U'.$$

Wir zeigen jetzt, daß Q' und $\mathrm{id}_{H'} - Q'$ Orthogonalprojektionen sind, und zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit für Q'. Die Idempotenz folgt unmittelbar aus $Q^2 = Q$. Wir müssen also noch die Symmetrie nachweisen. Dazu verwenden wir die Beziehung

$$Q = j^{-2} \circ Q' \circ j,$$

die für die symmetrische Abbildung Q gilt (vgl. WLOKA [9]). Hierbei ist $j : H \to H'$ die kanonische Isometrie von H auf H'. Wir erhalten für beliebige $x', y' \in H'$ (vgl. [3]):

$$(x', Q'y')_{H'} = (j^{-1}x', j^{-1}Q'jj^{-1}y')_H = (j^{-1}x', Qj^{-1}y')_H =$$
$$= (Qj^{-1}x', j^{-1}y')_H = (jQj^{-1}x', y')_{H'} = (Q'x', y')_{H'}.$$

Nun sind Q' und $\mathrm{id}_{H'} - Q'$ supplementäre Orthogonalprojektoren, also gilt

$$Q'h' \perp (\mathrm{id}_{H'} - Q')h'' \quad \text{für alle} \quad h', h'' \in H'.$$

Sind also $u', u'' \in \mathrm{Im}\ U'$ gegeben, so gibt es $h', h'' \in H'$ mit $u' = U'h'$ und $u'' = U'h''$. Damit folgt

$$W'R'u' = W'P'u' = W'P'U'h' = Q'h' \perp (\mathrm{id}_{H'} - Q')h'' =$$
$$= W'(\mathrm{id}_{X'} - P')U'h'' = W'(\mathrm{id}_{X'} - P')u'' = W'(\mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,U'} - R')u'',$$

d.h. die Orthogonalitätsbeziehung

$$\mathrm{Im}\ W'R' \perp \mathrm{Im}\ W'(\mathrm{id}_{X'} - R')$$

ist bewiesen.

(v) Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $W'y' = 0$ für $y' \in \mathrm{Im}\ U'$. Dann gilt

$$0 = U'W'y' = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,U'}\, y' = y'.$$

Somit ist $\mathrm{Ker}\ W' = (0)$, also ist auch $\mathrm{Ker}\ W' \cap \mathrm{Ker}\ R' = (0)$ erfüllt.

Mit Hilfe von Satz 1 erhalten wir aus Satz 3 die

FOLGERUNG. *Sei (X, P, U, H) ein vollständiges normiertes Spline-System. Dann gilt für $x' \in \mathrm{Im}\ U'$ bezüglich des dualen Spline-Systems $(\mathrm{Im}\ U', R', W', H')$:*

(M1′) $\|W'R'x'\|_{X'} \leqslant \|W'y'\|_{X'}$ *für alle* $y' \in \mathrm{Im}\ U'$ *mit* $R'y' = R'x'$.

(M2′) $\|W'(x' - R'x')\|_{X'} \leqslant \|W'(x' - t')\|_{X'}$ *für alle* $t' \in \mathrm{Im}\ R'$.

Ausgehend von dieser Aussage betrachtet SCHEMPP [7] die beste Approximation von stetigen linearen Funktionalen. Frühere Untersuchungen gehen auf SCHOENBERG [8] sowie DELVOS-SCHEMPP [1, 2] zurück. Wir folgen [7] und setzen voraus, daß (X, P, U, H) ein vollständiges normiertes Spline-System ist mit *reellen Hilbert-Räumen* X und H.

Ist $f \in X'$ ein stetiges lineares Funktional mit $f|_{\mathrm{Ker}\ U} = 0$, so beweist SCHEMPP [7], daß es einen eindeutig bestimmten *verallgemeinerten Peano-Kern* $k_f \in H$ gibt mit

$$f(x) = (U(x), k_f)_H \quad \text{für alle } x \in X.$$

Damit erhält man mit Hilfe der Folgerung zu Satz 3:

SATZ 4 (SCHEMPP [7]) *Es sei $l \in X'$. Für jedes $f \in X'$ mit $f|_{\mathrm{Ker}\ U} = l|_{\mathrm{Ker}\ U}$ ist $f_1 := P'f$ eine Approximation von l, die auf* Ker U *mit l übereinstimmt. Es gilt also*

$$l(x) = f_1(x) + (U(x), k_{l-f_1})_H.$$

Dann gilt: Die optimale Approximation von l in dem Sinne, daß die Norm des Restglied-Kerns minimal wird, d. h. daß gilt

$$\|k_{l-f_0}\|_H \leqslant \|k_{l-f_1}\|_H,$$

wird geliefert durch $f_0 = P'l$.

Dieser Satz stellt eine abstrakte Fassung des Satzes von Schoenberg dar, der die beste Approximation von stetigen linearen Funktionalen im Sinne von Sard bei Polynom-Splines untersucht (vgl. SCHOENBERG [8]).

LITERATUR

[1] Delvos, F.-J., Schempp, W., *On spline systems.* Monatsh. Math. **74**, 399–409 (1970).

[2] Delvos, F.-J., Schempp, W., *On spline systems: L_m-splines.* Math. Z. **126**, 154–170 (1972).

[3] Haussmann, W., *Zur Theorie der Spline-Systeme.* Habilitationsschrift. Bochum 1970.
[4] Haussmann, W., *On multivariate spline systems.* J. Approx. Theory **11**, 285–305 (1974).
[5] Haussmann, W., Münch, H. J., *Topological spline systems.* Erschienen in „*Spline-Funktionen*" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Hrsg.), S. 109–127. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut 1974.
[6] Sard, A., *Linear Approximation.* Math. Surveys No. 9. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1963.
[7] Schempp, W., *Zur Theorie der Spline Systeme.* Erschienen in „*Spline-Funktionen*" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Hrsg.), S. 275–287. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut 1974.
[8] Schoenberg, I. J., *On best approximation of linear operators.* Indag. Math. **26**, 155–163 (1964).
[9] Wloka, J., *Funktionalanalysis und Anwendungen.* Berlin-New York: De Gruyter 1972.

Eingegangen am 6. IX. 1973.

Gesamthochschule Duisburg
Fachbereich 6 — Mathematik