MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 19—28

OPÉRATEURS D'INTERPOLATION DANS DES ESPACES ABSTRAITS

par

MIRCEA IVAN

(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous tâchons de mettre en évidence quelques propriétés que possèdent les opérateurs d'interpolation. Pour commencer nous envisageons une définition trouvée dans l'ouvrage „Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării" par ELENA POPOVICIU [1].

Soit donné X un espace linéaire sur le champ K et S un de ses sous-espaces.

Si l'opérateur $U : X \to X$ *vérifie les conditions* :

1) $$U(x) \in S \qquad \forall x \in X;$$

2) $$U(x) = x \qquad \forall x \in S;$$

alors nous dirons que le sous-espace S *est interpolatoire par rapport à l'opérateur* U.

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des opérateurs linéaires définis sur X, aux valeurs en X, $U \in \mathcal{U}$ impliquant $U^2 = U$. On constate que les sous-espaces $U(X)$ sont interpolatoires par rapport aux opérateurs U.

Ayant désigné par I l'opérateur identique nous avons défini l'opérateur complémentaire de $U : \bar{U} = I - U$. On établit facilement les relations suivantes :

1) $$\bar{U} \in \mathcal{U};$$

2) $$\bar{\bar{U}} = U;$$

3) $$\bar{U}U = U\bar{U} = 0;$$

4) $\bar{U}(X) = \operatorname{Ker} U$;

5) $U(X) = \operatorname{Ker} \bar{U}$.

Nous allons introduire dans l'ensemble $\mathcal{U}$ une relation d'ordre.

Définition 1. *Soient donnés $U, V \in \mathcal{U}$. Si $V(X) \subseteq U(X)$ et $\operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V$ nous dirons que $V \subseteq U$.*

THÉORÈME 1. *Si $U, V \in \mathcal{U}$, la relation $V \subseteq U$ et les égalités $UV = VU = V$ sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons que $V \subseteq U$. Conformément à la définition 1 nous avons $V(X) \subseteq U(X)$ et $\operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V$. Soit $x \in X$, $Vx \in U(X)$. Il existe donc $y \in X$ tel que $Vx = Uy$. On voit que :

$$UVx = U^2y = Uy = Vx,$$

ou $UV = V$. On constate que :

$$x - Ux \in \operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V,$$

donc $V(x - Ux) = 0$, ou $Vx = VUx$, $\forall x \in X$ c'est à dire $V = UV$.

Supposons maintenant que les relations d'égalité : $UV = VU = V$ soient satisfaites. Soit $x \in V(X)$. Soit $y \in X$ tel que $x = Vy$; donc

$$x = Vy = UVy \in U(X).$$

On a démontré donc que les espaces $V(X)$ et $U(X)$ vérifient la relation $V(X) \subseteq U(X)$. Soit $x \in \operatorname{Ker} U$, donc $Ux = 0$, $Vx = VUx = V0 = 0$ donc $\operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V$.

À l'aide du théorème 1 on démontre sans difficulté, que la relation introduite dans l'ensemble $\mathcal{U}$ par la définition 1, est une relation d'ordre.

L'idée d'introduire cette relation et de la caractériser à l'aide des égalités du théorème 1, nous a été suggérée par les propriétés du polynôme de Lagrange. (Voir l'exemple 3).

THÉORÈME 2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) $V \subseteq U$;

2) $V(X) \subseteq U(X)$ et $\operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V$;

3) $\bar{U}(X) \subseteq \bar{V}(X)$ et $\operatorname{Ker} \bar{V} \subseteq \operatorname{Ker} \bar{U}$;

4) $UV = VU = V$;

5) $\bar{U}\bar{V} = \bar{V}\bar{U} = \bar{U}$;

6) $\bar{U} \subseteq \bar{V}$.

La démonstration de ce théorème ne présente pas de difficultés.

THÉORÈME 3. *L'égalité $x = Ux + \bar{U}x$ constitue l'unique représentation de l'élément $x \in X$ comme somme $x = y + z$, $y \in U(X)$ $z \in \bar{U}(X)$.*

Démonstration. On sait que $x = Ux + \bar{U}x$. Supposons que x admette la représentation : $x = y + zy \in U(X)$, $z \in \bar{U}(X)$. On constate que :

$$Ux = Uy + Uz = y + 0 = y;$$
$$\bar{U}x = \bar{U}y + \bar{U}z = 0 + z = z.$$

Il en résulte l'unicité de la représentation et nous pouvons écrire

$$X = U(X) \oplus \operatorname{Ker} U = U(X) \oplus \bar{U}(X) = \operatorname{Ker} \bar{U} \oplus \bar{U}(X) = \operatorname{Ker} \bar{U} \oplus \operatorname{Ker} U.$$

Nous allons donner quelques exemples d'opérateurs d'interpolation comparables par rapport à la relation d'ordre introduite dans $\mathcal{U}$.

Si $V \subseteq U$ et $V(X)$ est un sous-espace propre maximal de $U(X)$ nous allons écrire $V \leqslant U$.

Exemple 1. Soit C l'espace des nombres complexes et $U : C \to C$ $U(z) = \text{Réel}(z)$. On constate que : $0 \leqslant U \leqslant I$.

Exemple 2. Soit $X = C[a, b]$,

$$Uf = f - f(a),$$
$$U(X) = \{f/f \in C[a, b], f(a) = 0\},$$
$$\bar{U}f(x) = f(a), \ \forall x \in [a, b].$$

Vu que $\dim \bar{U}(X) = 1$ il résulte que $U \leqslant I$.

Exemple 3. Soit X l'ensemble des fonctions définies sur l'espace R des nombres réels et $Uf = L(x_1, x_2, \dots x_{n+1} ; f) = L_n f$ le polynôme de Lagrange attaché à la fonction f sur les points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Soit $Vf = L_{n-1}f$. On sait que :

$$U^2 = U, \ V^2 = V, \ UV = V.$$

Nous démontrons que $VU = V$ c'est à dire $L_{n-1}L_n f = L_{n-1}f$. Soit $P(f) = L(x_1, x_2, \dots x_n ; L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ; f))$. $P(f) \in \mathcal{P}_{n-1}$ ou $\mathcal{P}_{n-1}$ constitue l'ensemble des polynômes de degré $n - 1$. Vu que $P(f)(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, et que le seul polynôme de degré $n - 1$ à vérifier ces conditions est le polynome de Lagrange $L_{n-1}f$, il en résulte : $P(f) = L(x_1, x_2, \dots, x_n ; f)$. De plus $\mathcal{P}_{n-1}$ est un sous-espace maximal de $\mathcal{P}_n$, donc :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n ; f) \leqslant L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ; f).$$

Exemple 4. Soit X l'ensemble des fonctions qui possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement sur l'ensemble des nombres réels. Nous écrivons :

$$Uf = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) x^k / k! = T_n f,$$
$$Vf = T_{n-1} f.$$

On démontre que $T_{n-1} \leqslant T_n$.

E x e m p l e 5. Soit donné X un espace pré-hilbertien et $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y_n \subseteq \ldots$ une suite de sous-espaces de dimension finie. Nous définissons les projections $P_n : X \to Y_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ telles que

$$\|x - P_n(x)\| = \inf_{y \in Y_n} \|x - y\|.$$

Les opérateurs P_n sont linéaires et on sait que $P_n^2 = P_n$. On voit que

$$P_{n-1}(X) = Y_{n-1} \subseteq Y_n = P_n(X),\ n = 1, 2, \ldots$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} P_n$, $P_n(x) = 0$ donc : $\|x\| \leqslant \|x - y\|\ \forall x \in Y_n$. Il en résulte que : $\|x\| \leqslant \|x - y\|\ \forall x \in Y_{n-1}$, donc $\operatorname{Ker} P_n \subseteq \operatorname{Ker} P_{n-1}$. Conformément à la définition 1 nous obtenons une suite ordonnée :

$$P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_n \ldots$$

THÉORÈME 4. *Si $U \in \mathcal{U}$ et si $S \subseteq X$, alors il existe une fonctionnelle linéaire F qui possède la propriété suivante :*

Pour chaque $V \in \mathcal{U}$, $V(X) = S$, $V \leqslant U$ il existe un élément $f_0 \in X$ tel que les égalités :

1) $$U = V + f_0 F;$$

2) $$FU = F;$$

3) $$F(S) = 0;$$

4) $$F(f_0) = 1.$$

soient remplies.

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{U}$, $V(X) = S$, $V \leqslant U$. Conformément au théorème 3 $f = Vf + \bar{V}f$, $\forall f \in X$; $Uf = UVf + U\bar{V}f = Vf + U\bar{V}f$, $\forall f \in X$. Soit $y \in V(X) \cap U\bar{V}(X)$, donc il existe $f_1, f_2 \in X$ tels que :

$$y = Vf_1 = U\bar{V}f_2,$$

$$Vy = VU\bar{V}f_2 = V\bar{V}f_2 = 0 f_2 = 0,$$

$$0 = Vy = V^2 f_1 = Vf_1 = y.$$

On peut écrire : $U(X) = V(X) \oplus U\bar{V}(X)$. On sait que $V(X)$ est un sous-espace maximal de $U(X)$. C'est pourquoi $\dim U\bar{V}(X) = 1$. Il en résulte l'existence d'un élément $f_0 \in U(X)$ tel que :

$$U\bar{V}(X) = \{kf_0 /\ k \in K\}.$$

On constate facilement que l'application $A : U\bar{V}(X) \to K$ définie par l'égalité : $g = A(g) f_0$, $\forall g \in U\bar{V}(X)$, est linéaire et $A(f_0) = 1$.
On voit que :

$$f_0 = Vf_0 + U\bar{V}f_0,\quad f_0 = 0 + f_0.$$

La représentation étant unique il en résulte : $Vf_0 = 0$, $U\bar{V}f_0 = f_0$. Écrivons $F(f) = A(U\bar{V}f)$. On constate que l'application $F : X \to K$ est linéaire. Soit $f \in X$. $Uf - Vf \in U\bar{V}(X)$ donc :

$$Uf - Vf = A(Uf - Vf) f_0 = F(f) f_0,$$

$$F(f_0) = A(U\bar{V}f_0) = A(f_0) = 1.$$

Si $y \in S$ alors $y = Vf$ et $F(y) = A(U\bar{V}y) = A(U\bar{V}Vf) = A(0) = 0$,

$$FU(f) = A(UIf - UVf) = A(Uf - Vf) = F(f).$$

On a montré donc que :

$$U = V + f_0 F,\quad FU = F,\quad F(S) = 0.$$

On constate que f_0 est unique abstraction faite d'un facteur scalaire. Il nous reste à démontrer que F ne dépend pas de V.

Soit $W \in \mathcal{U}$, $W(X) = S$, $W \leqslant U$. Il en résulte l'existence d'une fonctionnelle G et d'un élément g_0 tels que :
$U = W + g_0 G$, $GU = G$, $G(S) = 0$. On voit que :

$$F(f) = F(Uf) = FW(f) + F(g_0)G(f) = 0 + F(g_0)G(f),$$

donc $F(f) = F(g_0)G(f)$. Il en résulte $1 = F(g_0)G(f_0)$ donc $F(g_0) \neq 0$. Nous écrivons $f_1 = g_0/F(g_0)$ et nous obtenons :

$$Uf = Wf + (g_0/F(g_0))F(g_0)G(f) = Wf + f_1 F(f) \text{ où } F(f_1) = F(g_0)/F(g_0) = 1.$$

Le théorème est ainsi complètement démontré. Il nous permet d'associer à un couple (U, S) où $U \in \mathcal{U}$ et S est un sous-espace maximal de $U(X)$, une fonctionnelle linéaire F et de définir la convexité d'un élément de l'espace X par l'intermède de cette fonctionnelle F que nous avons appelée différence divisée.

E x e m p l e 6. Soit X l'ensemble des fonctions définies sur R,

$$Uf = L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f),\qquad Vf = L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}; f),$$

où $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ sont n points distincts des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous pouvons écrire : $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) = L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f) + (x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_n})[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$.
Dans cet exemple la fonctionnelle F du théorème 4 constitue la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$, et l'élément f_0 le polynôme $(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_n})$. On remarque l'indépendance de la fonctionnelle différence divisée par rapport aux points $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}$ extraits de la suite $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

E x e m p l e 7. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ points distincts sur l'axe réel et $f_0, f_1, \ldots, f_n$ un système de fonctions qui vérifient les conditions

$$\begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_0(x_1) & \ldots & f_0(x_k) \\ f_1(x_0) & f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_k(x_0) & f\,(x_1) & \ldots & f_k(x_k) \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 0,1, \ldots, n.$$

Il existe alors les combinaisons linéaires :

$$L_n f = \sum_{k=0}^{n} F_k(f) f_k, \quad L_{n-1} f = \sum_{k=0}^{n-1} G_k(f) f_k,$$

telles que
$$L_n f(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1 \ldots, n,$$
$$L_{n-1} f(x_i) = f(x_i). \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Écrivons
$$V_{n-1} f = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(f) f_k.$$

On remarque que $V_{n-1} \leqslant L_n$, $L_{n-1} \leqslant L_n$ et que $L_n f = L_{n-1} f + f_n F_n(f)$. Conformément au théorème 4 il existe g tel que :

$$L_n f = L_{n-1} f + g F_n(f).$$

Pour $f = f_n$ il en résulte :

$$g = f_n + L_{n-1} f_n.$$

Nous avons obtenu la formule de récurrence pour les polynômes de Lagrange généralisés :

$$L_n f = L_{n-1} f + (f_n - L_{n-1} f_n) F_n(f).$$

On remarque que le coefficient de la fonction f_n du polynôme de Lagrange est une différence divisée.

THÉORÈME 5. *Si les espaces $S_{n-2} \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n$ sont interpolatoires par rapport aux opérateurs $U^i_{n-2} \leqslant U^i_{n-1} \leqslant U_n$, $i = a, b$, alors nous avons les représentations :*

$$U_n f = U^i_{n-2} f + f^i_{n-1} F^i_{n-1}(f) + f^i_n F_n(f), \ i = a, b,$$

où les fonctionnelles F^i_{n-1}, F_n sont des différences divisées et

$$F^a_{n-1}(f^b_{n-1}) = 1.$$

Démonstration. Conformément au théorème 4, nous avons :

$$U_n f = U^a_{n-2} f + f^a_{n-1} F^a_{n-1}(f) + f^a_n F_n(f),$$
$$U_n f = U^b_{n-2} f + g_{n-1} G_{n-1}(f) + f^b_n F_n(f).$$

où $F^a_{n-1}(f^a_{n-1}) = 1$, $G_{n-1}(g_{n-1}) = 1$. On voit que $F^a_{n-1}(g_{n-1}) \neq 0$ parce que au cas contraire $g_{n-1} = U_n g_{n-1} = U^a_{n-2} g_{n-1} \in S_{n-2}$ en contradiction avec le fait que $S_{n-1} \neq S_{n-2}$.
En écrivant $F^b_{n-1} = F^a_{n-1}(g_{n-1}) G_{n-1}$, $f^b_{n-1} = f_{n-1}/F^a_{n-1}(g_{n-1})$ le théorème est démontré.

THÉORÈME 6. *Les fonctionnelles F^a_{n-1}, F^b_{n-1}, F_n et le vecteur f^b_n de l'énoncé du théorème 5 vérifient la formule de récurrence :*

$$F_n(f) F^a_{n-1}(f^b_n) = F^a_{n-1}(f) - F^b_{n-1}(f).$$

Démonstration. Nous appliquons la fonctionnelle F^a_{n-1} à l'égalité :

$$U_n f = U^b_{n-2} f + f^b_{n-1} F^b_{n-1}(f) + f^b_n F_n(f)$$

en tenant compte des résultats du théorème 5 et du fait que $F^a_{n-1} U^b_{n-1} = 0$.

Il est à remarquer que dans des conditions assez peu restrictives les fonctionnelles du type différence divisée vérifient une formule de récurrence qui généralise la formule de récurrence des fonctionnelles du type différence divisée ordinaires.

E x e m p l e 8. Dans le cas où

$$U_n f = L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f),$$
$$U_{n-1} f = L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f),$$

$i = a, b$, on sait que

$$F_n(f) = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f],$$
$$F_{n-1}(f) = [x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f].$$

Le théorème 6 contient la formule :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{a-1}, x_{a+1}, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_{b-1}, x_{b+1}, \ldots, x_{n+1}; f]}{x_b - x_a}$$

bien connue dans l'analyse mathématique.

Nous tâchons d'utiliser certaines propriétés des opérateurs d'interpolation pour trouver certaines bases de type Schauder dans différents espaces linéaires.

D é f i n i t i o n 2. *On appelle base de type Schauder d'un espace normé X une suite d'éléments $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que pour n'importe quel $f \in X$ il existe une seule suite de scalaires $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pour laquelle*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n.$$

THÉORÈME 7. *Si X est l'espace des fonctions continues sur* $[0, 1]$ *aux valeurs dans un espace vectoriel Y, alors il existe une suite* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions de X, et il existe trois suites de nombres dans* $[0, 1]$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *telles que pour n'importe quelle* $f \in X$ *a lieu la relation d'égalité suivante :*

$$f = f(0) + x[0, 1\,; f] + \sum_{n=2}^{\infty} g_n[a_n, b_n, c_n\,; f]$$

la convergence étant au sens de la norme uniforme.

Démonstration. Nous construisons les ensembles de nombres en $[0, 1]$:

$$A_0 = \{0\},$$
$$A_1 = \{0, 1\},$$
$$A_2 = \{0, 1/2, 1\},$$
$$\dots$$
$$A_{2^n} = \{k/2^n \; k = 0, 1, \dots, 2^n\},$$
$$A_{2^n+i} = A_{2^n} \cup \{1/2^{n-1}, 3/2^{n+1}, \dots, (2i-1)/2^{n-1}\}, \; i = 1, 2, \dots, 2_n, \text{ donc}$$
$$A_n = \{x_n^0, x_n^1, \dots, x_n^n\}\, 0 = x_n^0 < x_n^1 < \dots < x_n^n = 1,$$
$$A_n = A_{n-1} \cup \{a_n\}, \; a_n = x_n^k, \; 0 < k < n.$$

Nous définissons les opérateurs :

$$U_0 f(t) = f(0), \; t \in [0, 1]$$
$$U_n f(t) = L(x_n^i, x_n^{i+1}\,; f)(t), \;\; t \in [x_n^i, x_n^{i+1}],$$

$i = 0, 1, \dots, n-1,$

$n = 1, 2, \dots, .$

Des calculs simples nous montrent que $U_n^2 = U_n$, $U_n U_{n+1} = U_{n+1} U_n = U_n$, $n = 0, 1, \dots$

Conformément au théorème 5 il existe une suite de lignes polygonales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et une suite de fonctionnelle $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ telles que :

$$U_n f = U_{n-1} f + f_n F_n(f), \; n = 1, 2, \dots$$

En remarquant que $\|f(t) - U_n f(t)\| \leqslant \sup \|f(x) - f(y)\|$ pour $|x - y| \leqslant \max |x_n^i - x_n^{i+1}|\, i = 0, 1, \dots, n-1$ et en considérant la structure des ensembles A_n on peut constater que la suite $U_n f$ converge uniformément vers f. Nous pouvons supposer que les vecteurs f_n sont normés : $\|f_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$

Vu que $\|U_n f\| \leqslant \|f\|$ il en résulte $\|F_n\| \leqslant 2$. On sait que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n F_n(f).$$

Supposons que $$f = \sum_{n=0}^{\infty} t_n f_n.$$

Nous écrivons $$f = \sum_{k=0}^{n} t_k f_k + r_n.$$

On voit que $F_k(f) = t_k + F_k(r_n)$, $n > k$, $k = 0, 1, \dots$ $r_n \to 0$ et F_k sont continues. Il en résulte que $t_k = F_k(f)$, $k = 0, 1, \dots$. Il s'agit donc d'une véritable base de Schauder,

$$f = f(0) + x[0, 1\,; f] + \sum_{n=2}^{\infty} f_n F_n(f),$$

donc :

$$U_n f(a_n) = U_{n-1} f(a_n) + f_n(a_n) F_n(f), \quad n = 2, 3, \dots$$
$$f_n(a_n) = 1, \text{ (Voir } \|f_n\| = 1).$$
$$f(a_n) - L(x_n^{k-1}, x_n^{k+1}\,; f)(a_n) = F_n(f).$$

En écrivant $g_n = (a_n - x_n^{k-1})(a_n - x_n^{k+1}) f_n$, $b_n = x_n^{k-1}$, $c_n = x_n^{k+1}$ on voit que que $g_n = (a_n - b_n)(a_n - c_n)((x - b_n)_+ - 2(x - a_n)_+ + (x - c_n)_+)$ où $(x-t)_+ = (|x - t| + x - t)/2$

et que $$f = f(0) + x[0, 1\,; f] + \sum_{n=2}^{\infty} g_n[a_n, b_n, c_n\,; f],$$

le théorème étant complètement démontré.

Nous allons présenter un théorème qui assure l'existence d'une base de type Schauder dans les espaces linéaires où les projections vérifient certaines conditions.

Soit $Y \subseteq X$, dim $Y < \infty$. On sait que $\forall x \in X \; \exists y \in Y$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|$. Dans le cas où l'élément y est unique on définit l'opérateur de projection $P_Y : X \to Y$ par l'égalité $P_Y(x) = y$.

THÉORÈME 8. *Si X est un espace séparable et si pour tout sous-espace de dimension finie les opérateurs de projection sont linéaires, alors X admet une base de type Schauder.*

Démonstration. Supposons que X soit séparable. Il existe donc un ensemble formé des vecteurs indépendents, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que span $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = X$. En désignant par Y_n l'ensemble span $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et par P_n l'opérateur de projection de X sur Y_n on peut montrer que :

$$P_n \leqslant P_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

ou $P_0 = 0$. (Voir l'exemple 5).

Conformémment au théorème 4 nous obtenons la suite d'éléments $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et la suite de fonctionnelles $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tels que :

$$P_n f = P_{n-1} f + f_n F_n(f),$$
$$\|f_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vu que $\|f - P_n f\| \leqslant \|f\|$ il s'ensuit $\|F_n\| \leqslant 2, \; n = 1, 2, \ldots$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n(\varepsilon)$ et il existe aussi $y \in Y_{n(\varepsilon)}$ tels que $\|f - P_n f\| \leqslant \|f - P_{n(\varepsilon)} f\| \leqslant \|f - y\| < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon)$

donc
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n F_n(f).$$

En nous servant du fait que F_n sont continues et que $F_n(f_k) = \delta_{nk}$ nous pouvons montrer que la représentation de f est unique.

Remarque. Dans le cas où X est un espace pré-hilbertien les conditions du théorème précedent sont remplies et il est possible de démontrer que $F_n(f) = (f, f_n)$ (le produit scalaire), et nous obtenons le développement de f en série de Fourier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Popoviciu E., *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*. Ed. Dacia, Cluj 1972.

Reçu le 4. IV. 1974.