MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 51—62

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA RÉSOLUTION APPROXIMATIVE DES ÉQUATIONS PAR LE PROCÉDÉ DE LA CORDE

par
RADU POPOVICI
(Cluj-Napoca)

L'étude présente une méthode de résolution approximative des équations qui représente une généralisation du procédé de la „corde''. Après un premier paragraphe introductif, en vue de la comparaison des deux méthodes, l'étude comprend deux pratiers distinctes : la première contient des considérations sur le procédé de la corde, la deuxième étant dédiée à la généralisation de ce procédé et à la discussion des résultats obtenus.

0. Soit f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction relativement à laquelle on formule les hypothèses suivantes :

(i) $f \in C[a, b]$;
(ii) $f(a) < 0 < f(b)$;
(ii)' $f(b) < 0 < f(a)$;
(iii) f nonconcave de premier ordre sur $[a, b]$;
(iii)' f nonconvexe de premier ordre sur $[a, b]$;

Soit $I_1(a, b)$ la classe des fonctions f qui satisfont aux hypothèses (i), (ii) et (iii). Par analogie, soit $I_2(a, b)$, $I_3(a, b)$ et $I_4(a, b)$ les classes des fonctions qui satisfont, respectivement, aux hypothèses (i), (ii)' et (iii) ; (i), (ii) et (iii)' ; et (i), (ii)', et (iii)'.

On a alors le théorème :

THÉORÈME 0.1. *Si* $f \in I_k(a, b)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$, *alors l'équation*

$$f(x) = 0 \tag{0.1}$$

a une racine unique $x^* \in\,]a, b[$.

Soit $f \in I_k(a, b)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$, et $z \in [a, b]$ un point arbitraire. On note :

$$A(f;\, z) = \{x \in [a, b] \mid f(z) f(x) \geqslant 0\}.$$

Alors $A^- = A(f;\, a)$ est l'ensemble des approximations par défaut de la racine x^* et $A^+ = A(f;\, b)$ est l'ensemble des approximations par exces. Nous introduisons les définitions suivantes :

D é f i n i t i o n 0.1. *Une fonction* $F\colon A^- \to \mathbf{R}$ *est „une fonction* $(-)$ *(attachée à la fonction f par rapport à l'intervalle* $[a, b]$*)", si les trois conditions suivantes sont ramplies :*

(1) $F(A^-) \subset A^-$ *et* $F \in C(A^-)$;

(2) $x \in A^- \Rightarrow x < F(x)$;

(3) $FP(F) \subset \ker (f)$,

où $FP(F) = \{x \mid F(x) = x\}$ *et* $\ker (f) = \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0\}$.

D é f i n i t i o n 0.2. *Une fonction* $G\colon A^+ \to \mathbf{R}$ *est „une fonction* $(+)$ *(attachée à la fonction f par rapport à l'intervalle* $[a, b]$*)", si les trois conditions suivantes sont ramplies :*

(1) $G(A^+) \subset A^+$ *et* $G \in C(A^+)$;

(2) $x \in A^+ \Rightarrow x > G(x)$;

(3) $FP(G) \subset \ker (f)$.

Soit $(f;\, -)$, respectivement $(f;\, +)$, la classe des fonctions $(-)$, respectivement la classe des fonctions $(+)$, attachées à la fonction f par rapport à l'intervalle $[a, b]$. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 0.2. *Si* $F \in (f;\, -)$, *alors la suite* (x_n) *définie comme suit :*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = F(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

converge en croissant vers x^*.

Démonstration. La démonstration est immédiate puisque l'on observe que la suite (x_n) est croissante et comprise dans l'intervalle $[a, x^*]$ et $FP(F) \subset$ $\subset \ker (f)$.

Nous présentons par analogie, le

THÉORÈME 0.3. *Si* $G \in (f;\, +)$, *alors la suite* (y_n) *définie comme suit :*

$$\begin{cases} y_0 = b \\ y_{n+1} = G(y_n), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

converge en décroissant vers x^*.

Dans ce qui suit, les raisonnements seront faits sur les fonctions de $I_1(a, b)$, la transposition des résultats ainsi obtenus aux autres classes de fonctions introduites étant formelle.

1. Dans ce paragraphe on présente le procédé de la corde par le

THÉORÈME 1.1. *Soit* $f \in I_1(a, b)$ *et considérons la suite* (x_n) *définie comme suit :*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{[x_n,\, b\,;\, f]}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

où

$$[x_n,\, b\,;\, f] = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$$

est la différence divisée de premier ordre de la fonction f.

Alors les trois affirmations suivantes sont vraies :

(1) $(x_n) \subset A^-$ *et* (x_n) *converge en croissant vers* x^* ;

(2) *La racine* x^* *peut etre écrite comme la somme d'une série convergeante, de la manière suivante :*

$$x^* = a - \frac{f(a)}{[a,\, b\,;\, f]}\left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} k_1 \ldots k_i\right),$$

où

$$k_{i+1} = f(b)\,\frac{[x_i,\, x_{i+1},\, b\,;\, f]}{[x_i,\, b\,;\, f][x_{i+1},\, b\,;\, f]}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

et

$$[x_i,\, x_{i+1},\, b\,;\, f] = \frac{[x_{i+1},\, b\,;\, f] - [x_i,\, x_{i+1}\,;\, f]}{b - x_i}$$

est la différence divisée de deuxième ordre de la fonction f sur les noeuds x_i, x_{i+1}, $b \in [a, b]$.

(3) *Soit*

$$\bar{n} = \min\{m \in \mathbf{N} \mid n \geqslant m \Rightarrow L(f;\, x_n,\, x_{n+1})(b) > 0\},$$

où

$$L(f;\, x_n,\, x_{n+1})(s) = \frac{x_{n+1} - s}{x_{n+1} - x_n} f(x_n) + \frac{s - x_n}{x_{n+1} - x_n} f(x_{n+1})$$

est le polynôme du premier degré de Lagrange attaché à la fonction f, et soit

$$\alpha = 1 - \frac{L(f;\, x_{\bar{n}},\, x_{\bar{n}+1})(b)}{f(b)}.$$

Alors $0 < \alpha < 1$ *et on a l'estimation suivante :*

$$n \geqslant \bar{n} \Rightarrow x^* - x_{\bar{n}+1} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}(x_{\bar{n}+1} - x_{\bar{n}}).$$

Démonstration. (1) Soit la fonction $T_f : A^- \to \mathbf{R}$ définie comme suit :

$$x \in A^- \Rightarrow T_f(x) = x - \frac{f(x)}{[x, b; f]}.$$

Pour démontrer la convergence de la suite (x_n) il suffit (en vertu du théorème 0.2) de montrer que $T_f \in (f; -)$. Soit $x \in A^- \setminus \{x^*\}$. En posant

$$\lambda = \frac{f(b)}{f(b) - f(x)},$$

et en remarquant que $\lambda \in]0, 1[$, de la nonconcavité de la fonction f, il résulte que

$$\begin{aligned} f(T_f(x)) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)b) \\ &\leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(b) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $T_f(x) \in A^-$. De plus, puisque $f(x) < 0 \Rightarrow T_f(x) > x$ et $T_f(s) = s \Rightarrow f(s) = 0$, il résulte que T_f est une fonction $(-)$.

(2) Soit maintenant $x, y \in A^-$. Par un calcul simple on obtient

(1.1) $$T_f(x) - T_f(y) = k_f(x, y)(x - y),$$

où

(1.2) $$k_f(x, y) = f(b)\frac{[x, y, b; f]}{[x, b; f][y, b; f]}.$$

De même, en tenant compte que

$$[x, y, b; f] = \frac{f(b) - L(f; x, y)(b)}{(b - x)(b - y)}$$

et en posant

$$\mu_f(x, y) = 1 - \frac{L(f; x, y)(b)}{f(b)},$$

on trouve facilement que

$$0 \leqslant k_f(x, y) < \mu_f(x, y).$$

On remarque aussi que, si $x, y, z \in A^-$ et $x < y < z$, alors :

$$\mu_f(x, y) \geqslant \mu_f(y, z),$$

la démonstration de ce fait résultant de la propriété suivante des polynômes du premier degré de *Lagrange* : si $z_1, z_2, z_3, x \in [a, b]$ et si $z_1 < z_2 < z_3 \leqslant x$, alors :

$$L(f; z_1, z_2)(x) \leqslant L(f; z_2, z_3)(x) < f(x).$$

Donc, pour tout $x, y \in A^-$, avec $x < y$, est vraie l'estimation suivante :

$$T_f(y) - T_f(x) < \mu_f(x, y)(y - x).$$

Puisque $x^* = \lim x_n$, il résulte que la racine x^* peut être écrite comme la somme de la rérie suivante :

$$x_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n).$$

En employant les relations (1.1) et (1.2), on obtient :

$$x^* = a - \frac{f(x)}{[a, b; f]}\left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} k_1 \ldots k_i\right),$$

ou $k_{i+1} = k_f(x_i, x_{i+1})$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

(3) Soit B l'ensemble des points $x \in A^- \setminus \{x^*\}$ avec la propriété suivante :

$$z_1, z_2 \in [x, x^*],\ z_1 < z_2 \Rightarrow L(f; z_1, z_2)(b) > 0.$$

L'ensemble B est non vide. En effet, pour $\rho \in \mathbf{R}$, soit :

$$\delta_\rho = \{(x, \rho(x - b)) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

et soit :

$$P = \{\rho \in \mathbf{R} \mid G(f) \cap \delta_\rho = \emptyset\},$$

où $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est le graph de la fonction f. Soit $\rho' = \inf P$. Si l'on prend maintenant

$$x' = \max pr_1(G(f) \cap \delta_{\rho'}),$$

alors :

$$x' \leqslant z_1 < z_2 \leqslant x^* \Rightarrow 0 < L(f; x', z_1)(b) \leqslant L(f; z_1, z_2)(b),$$

donc $x' \in B$. Comme la suite (x_n) converge en croissant vers x^* et comme $x' < x^*$, il résulte qu'il existe un nombre naturel m tel que :

$$n \geqslant m \Rightarrow L(f; x_n; x_{n+1})(b) > 0.$$

Soit alors :

$$\bar{n} = \min\{m \in \mathbf{N} \mid n \geqslant m \Rightarrow L(f; x_n, x_{n+1})(b) > 0\}.$$

Si l'on pose

$$\alpha = \mu_f(x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}),$$

et l'on tient compte que

$$0 < L(f;\ x^-_n,\ x^-_{n+1})(b) < f(b),$$

il est clair que $0 < \alpha < 1$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
x^-_{n+2} - x^-_{n+1} &= T_f(x^-_{n+1}) - T_f(x^-_n) \\
&< \mu_f(x^-_n,\ x^-_{n+1})(x^-_{n+1} - x^-_n) \\
&= \alpha(x^-_{n+1} - x^-_n), \\
x^-_{n+3} - x^-_{n+2} &= T_f(x^-_{n+2}) - T_f(x^-_{n+1}) \\
&< \mu_f(x^-_{n+1},\ x^-_{n+2})(x^-_{n+2} - x^-_{n+1}) \\
&< \alpha^2(x^-_{n+1} - x^-_n), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x^-_{n+p} - x^-_{n+p-1} &< \alpha^{p-1}(x^-_{n+1} - x^-_n).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x^-_{n+n+p} - x^-_{n+n} &= \sum_{j=0}^{p-1}(x^-_{n+n+j+1} - x^-_{n+n+j}) \\
&< \sum_{j=0}^{p-1}\alpha^{n+j}(x^-_{n+1} - x^-_n),
\end{aligned}$$

et donc

$$x^-_{n+n+p} - x^-_{n+n} < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}(1-\alpha^p)(x^-_{n+1} - x^-_n).$$

En faisant ici $p \to +\infty$, on obtient

$$x^* - x^-_{n+n} \leqq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}(x^-_{n+1} - x^-_n).$$

Interprétation géométrique. Soit $f \in I_1(a, b)$. Si $x \in A^-$, alors $T_f(x)$ représente l'abscisse où la corde $y = L(f;\ x, b)(t)$ coupe l'axe Ot (fig. 1).

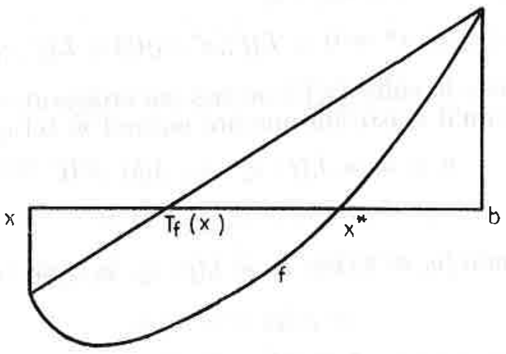

fig. 1

2. Dans ce paragraphe on présente une généralisation du procédé de la corde (par le théorème 2.1), pour qu'on discute (dans le théorème 2.3) les résultats obtenus.

Soit $\sigma : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction à la propriété suivante :

$$x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow \sigma(x, y) \in [x, y].$$

Soit $f \in I_1(a, b)$.

Pour tout $x \in A^-$, soit :

$$\overline{w}_x = \frac{[x,\ \sigma(x, b),\ b;\ f]}{b - x}\min\{\sigma(x, b) - x,\ b - \sigma(x, b)\},$$

$$w_x \in [0,\ \overline{w}_x],$$

$$P_u(t) = w_x(t - x)(t - b) + L(f;\ x, b)(t).$$

Soit $\tau : A^- \to A^-$ une fonction qui jouit de la propriété suivante :

$$x \in A^- \Rightarrow \tau(x) \in [T_f(x),\ x^*].$$

Pour tout $x \in A^-$ et tout $\xi \in \mathbf{R}$ on désigne par $m(\xi)$ la plus petite racine de l'équation du deuxième degré en t :

$$t^2 - 2bt + bx + (b - x)\xi + \frac{L(f;\ x, b)(\xi)}{w_x} = 0,$$

dans l'hypothèse où $w_x \neq 0$.

Pour tout $x \in A^-$ soit :

$$\begin{aligned}
u_x &\in [m(x),\ m(\tau(x))], \\
v_x &= 2b - u_x, \\
Q_x(t) &= w_x(t - u_x)(t - v_x).
\end{aligned}$$

On définie ensuite la fonction $U_f : A^- \to \mathbf{R}$ par

$$x \in A^- \Rightarrow U_f(x) = x - \theta_x \frac{f(x)}{[x,\ b;\ f]},$$

où

$$\theta_x = \frac{1 - \dfrac{Q_x(x)}{f(x)}}{1 + (b - x)\dfrac{w}{[x, b; f]}}.$$

Soit $d_f = U_f - T_f$. Alors :

$$x \in A^- \Rightarrow d_f(x) = (\theta_x - 1)\frac{-f(x)}{[x,\ b;\ f]}.$$

On a le

THÉORÈME 2.1. *Si la suite* (X_n) *est définie comme suit :*

$$\begin{cases} X_0 = a \\ X_{n+1} = U_f(X_n), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

alors elle converge en croissant vers x^*. *De plus :*

$$X_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} d_i h_i^*, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où

$$d_i = d_f(X_i), \quad h_i = k_f(x_i, X_i)$$

$$h_i^* = \begin{cases} h_{i+1} \ldots h_n, & (i < n) \\ 1, & (i = n) \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

Démonstration. On va montrer que $U_f \in (f; -)$. Soit $x \in A^-$. On remarque que :

$$P_x(x) = f(x),$$
$$P_x(b) = f(b)$$

et que

$$f < P_x < L(f; x, b) \text{ sur }]x, b[,$$

ce qui veut dire que la parabole $y = P_x(t)$ interpole la fonction f aux extrémités de l'intervalle $[x, b]$ et s'interpose entre f et la corde $L(f; x, b)$ (elle est donc nonconcave tout comme la fonction f).

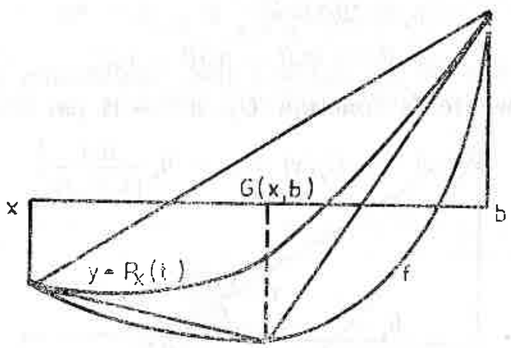

fig. 2

Les deux premières égalités sont évidentes ; l'inégalité provient du fait que

$$[x, \sigma(x, b); f] \leqslant m_x \leqslant [x, b; f] \leqslant m_b \leqslant [\sigma(x, b), b; f],$$

où par m_z on a désigné le coefficient angulaire de la tangente à la parabole $y = P_x(t)$ au point $(z, P_x(z))$, z étant un point de $[x, b]$.

Ensuite, du fait que $u_x < x^* < b < v_x$ et de la manière dont la parabole $y = Q_x(t)$ est définie, il résulte qu'elle est nonconcave et que

$$Q_x(t) \begin{cases} \leqslant 0, & \text{pour } t \in [u_x, b] \\ > 0, & \text{pour } t < u_x \end{cases}.$$

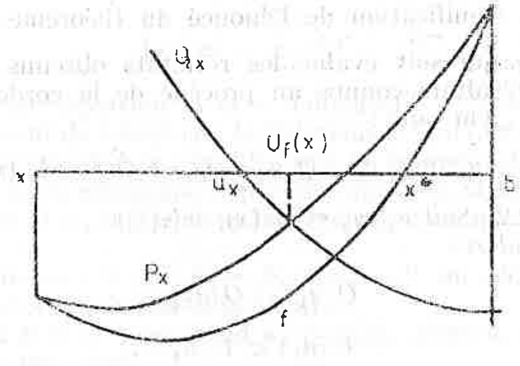

fig. 3

Enfin, on remarque que $U_x(x)$ est la solution de l'équation en t

$$P_x(t) = Q_x(t),$$

représentant l'abscisse du point unique d'intersection des deux paraboles. On obtient, par un calcul simple, que

$$P_x(U_f(x)) = Q_x(U_f(x)) = \frac{P_x(u_x)\, P_x(v_x)}{([x, b; f] + (b - x)w_x)^2}.$$

Puisque $P_x(u_x) < 0$ et $P_x(v_x) > 0$, il s'ensuit que

$$f(U_f(x)) < P_x(U_f(x)) < 0,$$

donc $U_f(x) \in A^-$. De même, dans les conditions du théorème, θ_x étant positif, il s'ensuit que $U_f(x) > x$ et que $FP(U_f) \subset \ker(f)$, et donc $U_f \in (f; -)$. En vertu du théorème 0.2 il résulte que la suite (X_n) converge en croissant vers x^*. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Soit ensuite :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - x_n &= U_f(X_n) - T_f(x_n) \\ &= (T_f(X_n) + d_f(X_n)) - T_f(x_n) \\ &= d_f(X_n) + (T_f(X_n) - T_f(x_n)) \\ &= d_f(X_n) + k_f(x_n, X_n)(X_n - x_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$X_{n+1} = x_{n+1} + d_n + h_n\,(X_n - x_n), \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

En usant de cette relation de récurrence, on obtient :

$$X_{n+1} = x_n + \sum_{i=0}^{n} d_i h_i^*, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ou les h_i^* ont la signification de l'énoncé du théorème.

Le théorème qui suit évalue les résultats obtenus ci-dessus, en les comparant aux résultats connus au procédé de la corde.

Soit $x \in A^-$. On onte :

$$u = u_x, \; v = v_x, \quad Q[u] = Q_x, \; U[u] = U_f(x).$$

L e m m a 2.2. *Soit* $u_1, u_2 \in [m(x), m(\tau(x))]$.

Si $u_1 < u_2$, *alors :*

(1) $$Q[u_1] < Q[u_2];$$

(2) $$U[u_1] < U[u_2].$$

Démonstration. La première affirmation résulte de :

$$Q[u_1] - Q[u_2] = w_x(u_1 - u_2)(2b - u_1 - u_2).$$

La deuxième affirmation résulte de la définition de la fonction U_f et de (1).

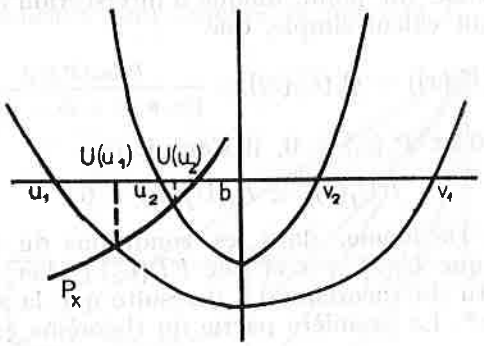

fig. 4

THÉORÈME 2.3. *Si* $x \in A^-$, *alors :*

$$d_f(x) \begin{cases} < o, \; si \; u_x \in [m(x), m(T_f(x))[\\ = o, \; si \; u_x = m(T_f(x)) \\ > o, \; si \; u_x \in \,]m(T_f(x)), m(\tau(x))]. \end{cases}$$

Démonstration. Conformément à la manière dont a été défini, $m(\xi)$ représente min $\{s, z\}$, ou s et z vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} s + z = 2b \\ sz = bx + (b - x)\xi + \dfrac{L(f;\, x, b)(\xi)}{w_x}, \end{cases}$$

ou bien le système équivalent :

$$\begin{cases} s + z = 2b \\ Q_x(\xi) = P_x(\xi), \end{cases}$$

ou, dans la deuxième équation, s et z remplacent u_x, réspectivement v_x. Il est facile maintenant de démontrer le théorème si l'on fait appel à la monotonie de U_f relativement à u_x, établie par le lemme 2.2.

Pour conclure cette étude on va préciser quelques algorythmes de résolution de l'équation (0.1), inclus dans la généralisation qui a fait l'objet de ce paragraphe.

1º Lorsque pour un $x \in A^-$, $\bar{w}_x = 0$, ou $w_x = 0$, on déduit que $U_f(x) = T_f(x)$, et les deux méthodes coïncident.

2º Si, pour un $x \in A^-$, on prend $u_x = m(x)$, alors $\theta_x = 0$ et $U_f(x) = x$: l'algorythme est „figé".

Si l'on prend $u_x = x$, alors :

$$\theta_x = \frac{[x, b; f]}{w_x(b - x) + [x, b; f]},$$

$$U_f(x) = x - \frac{f(x)}{w_x(b - x) + [x, b; f]}.$$

Les deux situations signalées convergent plus lentement que le procédé de la corde.

3º Si, pour un $x \in A^-$, l'on prend $u_x = m(T_f(x))$, alors $U_f(x) = T_f(x)$ et les deux méthodes conduisent à la même approximation de la racine.

Si l'on prend $u_x = T_f(x)$, alors

$$\theta_x = 1 + \frac{f(b)}{[x, b; f]} \cdot \frac{w_x}{w_x(b - x) + [x, b; f]}.$$

La convergence de l'algorythme ainsi obtenu est plus rapide que celle du procédé de la corde.

4º Enfin, on peut préciser aussi le choix de la fonction σ. De cette manière, si, pour un $x \in A^-$, on prend :

$$\sigma(x, b) = \frac{x + b}{2},$$

alors

$$\bar{w}_x = \frac{1}{2}\left[x, \frac{x + b}{2}, b; f\right].$$

Si, de plus $w_x = \bar{w}_x$, alors

$$w_x(b - x) + [x, b\,; f] = \left[\frac{x+b}{2}, b\,; f\right]$$

et $P_x = B_2(f\,; [x, b])$ est justement le polynôme du deuxième degré de *S. N. Bernstein* attaché à la fonction f, relativement à l'intervalle $[x, b]$. Avec ces choix, revenant au deuxième algorythme de 2^0, on obtient

$$\theta_x = \frac{[x, b\,; f]}{\left[\frac{x+b}{2}, b\,; f\right]},$$

$$U_f(x) = x - \frac{f(x)}{\left[\frac{x+b}{2}, b\,; f\right]};$$

en revenant au deuxième algorythme de 3^0, on obtient

$$\theta_x = 1 + \frac{f(b)}{2} \cdot \frac{\left[x, \frac{x+b}{2}, b\,; f\right]}{[x, b\,; f]\left[\frac{x+b}{2}, b\,; f\right]}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gurzău, O., Popluca, A., Popovici, R., *Asupra utilizării polinoamelor lui S. N. Bernstein la rezolvarea numerică a ecuaţiilor.* Gazeta Matematică, Seria A, **LXXV, Nr. 8, 314–315.**

[2] Popoviciu, E., — *Über die approximative Lösung von Gleichungen, Numerische Methoden der Approximationstheorie.* Band **1**, 147–154 (1972) (ISNM vol. 16), Oberwolfach.

[3] Popoviciu, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **X**, 49–54 (1934).

[4] Popoviciu, T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique.* Revue Roum. de Math. pures et appliquées, **XIII** 75–78, (1968).

Reçu le 4. IV. 1974.