MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 63–66

SUR UN PROBLÈME DE LA MEILLEURE APPROXIMATION

par

ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. Dans ce travail nous allons présenter un résultat concernant le problème de la meilleure approximation. Notamment il s'agit d'un cas particulier du problème suivant. Etant donné un éspace métrique E, considérons un sousensemble Y de E, tel que pour chaque $x \in E$ il existe dans Y un élément y_x et un seul, pour lequel on a $\rho(x, y_x) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y)$. Par ρ on désigne la métrique, $\rho : E \times E \to \mathbf{R}$. On se demande : 1) pour $x \in E$, fixé, de quelle manière faut-il ou peut-on choisir le sousensemble $Z \subset Y$, pour assurer l'existence et l'unicité de $z_x \in Z$, pour lequel $\rho(x, z_x) = \inf_{z \in Z} \rho(x, z)$; 2) $Y \subset E$ étant donné, quels sont les sousensembles $V \subset Y$, pour lesquels, quel que soit $x \in E$, il existe un élément $v_x \in V$ et un seul, tel que $\rho(x,v_x) = \inf_{v \in V} \rho(x, v)$?

On peut citer un grand nombre de travaux concernant les deux problèmes qu'on a formulé plus haut. Il y en a des nombreux résultats. On sait qu'on obtient des cas particulièrs intérésants quand on a $E = C[a, b]$, Y étant un ensemble interpolatoire sur $[a, b]$. Le symbol $C[a, b]$ dénote l'ensemble des fonctions réelles, définies sur l'intervalle $[a, b]$, continues sur $[a, b]$, organisé comme éspace métrique à l'aide de la norme uniforme, c'est à dire, pour $f_1, f_2 \in C[a, b]$, la distance est donnée par

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

On a ainsi étudié le cas $Y = \mathcal{P}_n$ où $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynomes de degrès au plus égal à n. Pour $f \in C[a, b]$ quelconque, on a considéré le problème de la meilleure approximation de la fonction f, par des éléments d'un sousensemble $\mathcal{P}_n^*(f; x_1, x_2, \ldots, x_l)$ de l'ensemble $\mathcal{P}_n$, soumis à la condition: $\mathcal{P}_n^*(f; x_1, x_2, \ldots, x_l) = \{P \in \mathcal{P}_n \mid P(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \ldots, l\}$, x_i étant des points distincts et fixés de l'intervalle $[a, b]$, $l \leq n$. Les résultats concernant ce problème sont devenus classiques. On a aussi consideré le problème de la meilleure approximation d'une fonction $f \in C[a, b]$ par des éléments d'un sousensemble de $\mathcal{P}_n$, qui s'obtient en imposant aux coefficients des éléments de $\mathcal{P}_n$ des conditions réstrictives.

Pour obtenir un cas plus général, on peut remplacer $\mathcal{P}_n$ par un ensemble interpolatoire quelconque.

2. Des nombreux travaux ont comme sujet le problème de la meilleure approximation d'une fonction $f \in C[a, b]$ par des elements d'un sousensemble $\mathcal{P}_n^*(f, A)$ où A este un fonctionnelle, $A : C[a, b] \to \mathbf{R}$ et $\mathcal{P}_n^*(f, A) = \{P \in \mathcal{P}_n | A(f) = A(P)\}$, $n \geq 1$. Ce problème a été généralisé en plusieures diréctions.

3. Nous considérons un ensemble interpolatoire d'ordre n, $n \geq 2$, sur un intervalle $[a, b]$ et nous allons désigner cet ensemble par F. Les éléments de l'ensemble F sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et pour chaque système $x_1, x_2, \ldots x_n$ de points distincts de l'intervalle $[a, b]$ et quels que soient les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe dans F une fonction et une seule qui prend sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, les valeurs y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectivement. Si les y_i sont les valeurs d'une fonction g sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, alors la fonction, uniquement déterminée de l'ensemble F qui coincide avec g sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sera désignée par le symbole $L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; g)$. C'est à dire $L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; g)(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Considérons maintenant les points

$$(1) \qquad u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1}$$

situés dans l'intervalle $[a, b]$ et les nombres

$$(2) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}.$$

L'ensemble dont les éléments sont les fonctions de l'ensemble F, prenant sur les points u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, les valeurs y_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, correspondantes, sera désigné par

$$(3) \qquad S\left(F; \begin{matrix} u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right).$$

On a donc

$$S\left(F; \begin{matrix} u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right) = \{h \mid h \in F,\ h(u_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

L'ensemble (3) s'appelle épi interpolatoire, d'ordre 1, de l'ensemble F. Pour chaque système (1) de points et chaque système correspondant (2) de $n-1$ nombres, on obtient un épi interpolatoire, d'ordre 1 de l'ensemble F. Les points (1) s'appellent les noeuds de l'épi (3). On peut remarquer que pour chaque point $x_0 \in [a, b]$, où $x_0 \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et quel que soit le nombre y_0, l'épi (3) contient une fonction et une seule qui prend sur x_0 la valeur y_0. Une consequence importante en est la suivante: si $x_0 \in [a, b]$ et $x_0 \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, alors l'ensemble des valeurs, sur x_0, des fonctions qui appartienent à l'épi (3) est un intervalle. Nous désignons par

$$(4) \qquad S\left(F; \begin{matrix} u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right)_{x_0}$$

cet intervalle.

Si les fonctions distinctes g_1 et g_2 appartienent à l'épi (3), alors les nombres $g_1(x_0)$ et $g_2(x_0)$ sont dans l'intervalle (4). On ne peut pas avoir $g_1(x_0) = g_2(x_0)$, l'ensemble F étant interpolatoire d'ordre n.

Si le point x_0 satisfait l'inégalité $u_i < x_0 < u_{i+1}$ et $g_1(x_0) < g_2(x_0)$ (ou bien $g_1(x_0) > g_2(x_0)$) alors, pour $u_{i-1} < x < u_i$ et pour $u_{i+1} < x < u_{i+1}$, on a $g_1(x) > g_2(x)$ (respectivement $g_1(x) < g_2(x)$). Pour $n = 2$ il faut considérer seulement les cas $a < u_1 < b$, $u_1 < x_0 \leq b$, $a \leq x < u_1$ ou $a \leq x_0 < u_1$, $u_1 < x \leq b$. Quand on a $n = 3$ il faut éliminer le cas $a = u_1$, $b = u_2$. Pour preciser donc l'inégalité remplie par les valeurs $g_1(x)$ et $g_2(x)$ pour $x \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, quelconque, il suffit d'étudier le comportement des fonctions g_1 et g_2 sur un points fixe, $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Soit donnée maintenant l'épi (3). Soit $x_0 \in [a, b]$ $x_0 \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, choisit d'une manière arbitraire et puis fixé. Soit, par exemple $u_{n-2} < x_0 < u_{n-1}$ et supposons que pour tous les épis que nous considérons, le point intermedier, qui a le rolle de x_0, sera situé entre les deux derniers noeuds de l'épi. Considérons une fonctionnelle $A : F \to \mathbf{R}$. Pour chaque épi de la forme (3) on peut considérer l'ensemble

$$(5) \qquad \left\{A(g) \mid g \in S\left(F; \begin{matrix} u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right)\right\},$$

que nous appellons l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle A sur l'épi (3).

DEFINITION 1. *On entend par l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle A sur les épis de l'ensemble F, l'intersection de tous les ensembles de la forme* (5) *quand on choisit de toutes les manières possibles les points* (1) *et les nombres* (2). *On désigne cet ensemble par A_S.*

Compte tennant de la définition 1, si $C \in A_S$, alors chaque épi de l'ensemble F contient au moins une fonction pour laquelle A prend la valeur C.

DEFINITION 2. *Nous disons que la fonctionnelle A est monotone par rapport à l'épi* (3) *si quelles que soient les fonctions g_1 et g_2 de l'épi, satisfaisantes l'inégalité $g_1(x_0) < g_2(x_0)$, on a toujours $A(g_1) < A(g_2)$ ou bien toujours $A(g_1) > A(g_2)$.*

DEFINITION 3. *On dit que la fonctionnelle A est monotone par épi si elle est monotone par rapport à chque épi de l'ensemble F et le sens de la monotonie est gardé quand on change un épi par un autre.*

THÉORÈME 1. *Si la fonctionnelle A est monotone par épis, alors, quel que soit $\alpha \in A_S$, chaque épi contient une fonction et une seule pour laquelle A prend la valeur α.*

La démonstration du théorème 1 résulte du fait que la fonctionnelle A ne peut pas se réduire à une constante sur aucun sousensemble d'un épi et de la définition de l'ensemble A_S.

THÉORÈME 2. *Si la fonctionnelle A est monotone par épis et $\alpha \in A_S$, alors l'ensemble $\{g | g \in F,\ A(g) = \alpha\}$ est interpolatoire d'ordre $n - 1$ sur l'intervalle $[a, b]$.*

Pour démontrer le théorème 2, on remarque, à l'aide du théorème 1, que pour chaque système $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de points distincts de l'intervalle $[a, b]$ et quels que soient les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ l'ensemble

$$\{g | g \in F,\ A(g) = \alpha\} = F^*(A, \alpha) \tag{6}$$

contient *une* fonction et *une seule* qui prend respectivement les valeurs y_i sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

THÉORÈME 3. *Si $f \in C[a, b]$, alors l'ensemble (6) contient un et un seule élément g_f pour lequel*

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g_f(x)| = \inf_{g \in F^*(A, \alpha)} \{\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|\}$$

Le théorème 3 est une conséquence de la propriété d'interpolation contenue dans l'énoncé du théorème 2.

Pour faire intervenir les propriétés de la fonction f, dans ce problème de la meilleure approximation, on peut remplacer le nombre α par la valeur d'une fonctionnelle $B : C[a, b] \to \mathbf{R}$, sur f c'est à dire on peut considérer au lieu de l'ensemble (6), l'ensemble

$$\{g | g \in F,\ A(g) = B(f)\}$$

où l'on suppose que $B(f) \in A_S$.

Dans un futur travail nous allons montrer que les fonctionnelles monotones par épis généralisent les différences divisées d'un ordre donné [2]. Les fonctions $L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; g)$ qui ont un rolle semblable au cel des polynomes de Lagrange, sont le point de départ dans cette généralisation

BIBLIOGRAPHIE

[1] Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, 1972.

[2] — *Sur une propriété de monotonie des différences divissées*, Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Sofia, 399–403, 1975.

Reçu le 15. V. 1975.