MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 67—72

SUR LA FORMULE DE LA MOYENNE POUR DES FONCTIONS TYPIQUEMENT RÉELLES

par

DUMITRU RIPEANU

(Cluj — Napoca)

Dans cette note on désignera par $\mathcal{F}$ la famille des fonctions $f(z)$ de la variable complexe z qui dans le disque unité $\Delta : |z| < 1$ du plan de cette variable sont analytiques, typiquement réelles et normées dans le sens suivant :

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Dans le travail [1] de P. MOCANU, M. READE et E. ZLOTKIEWICZ on considère deux problèmes relatifs à la famille F, posés antérieurement par l'un des auteurs. L'un des problèmes s'énonce comme suit : Pour toute paire de points z_1 et z_2 de Δ, il existe un point $\xi = \xi(z_1, z_2, f)$ sur le segment de droite joignant les points z_1 et z_2 et un nombre (complexe) $\lambda = \lambda(z_1, z_2 ; f)$ $(|\lambda| \leqq 1)$, tels que l'on ait

$$f(z_2) - f(z_1) = \lambda f'(\xi)(z_2 - z_1). \tag{1}$$

On demande le nombre (non-négatif)

$$l = l(z_1, z_2) = \min_{f \in \mathcal{F}} |\lambda(z_1, z_2, f)|.$$

Les auteurs de [1] résolvent le problème dans le cas où

$$0 < r = z_1 < z_2 = r_2 < 1.$$

Dans la note présente on résout le même problème dans un cas particulier plus général, $-1 < r_1 = z_1 < z_2 = r_2 < 1$.

THÉORÈME. *Si* $r_1 + r_2 > 0$, *alors* $l = l_1(r_1, r_2) = \dfrac{(1 - r_2)(1 - r_1 r_2)}{(1 - r_1)^2(1 + r_2)}$.

Si $r_1 + r_2 < 0$, *alors* $l = l_2(r_1, r_2) = \dfrac{(1 + r_1)(1 - r_1 r_2)}{(1 - r_1)(1 + r_2)^2}$.

Si $r_2 = -r_1 = \rho(> 0)$, *alors* $l = \dfrac{(1 - \rho)(1 + \rho^2)}{(1 + \rho)^3}$.

Démonstration. On se servira des résultats suivants de [1]:

$$
(2) \quad \left\{
\begin{array}{l}
l = \dfrac{1 - r_1^2}{r_2 - r_1} \min\limits_{x \in [0,a]} E_1(x), \text{ où} \\[2ex]
E_1(x) = \left\{
\begin{array}{ll}
E_2(x) = \dfrac{(1 + x)^3}{(A + 2)(1 - x)(1 + r_1 x)^2} & \text{pour } 0 \leqq x \leqq A_1 \\[2ex]
E_3(x) = 4x \dfrac{1 - Ax + x^2}{(1 - x^2)(1 + r_1 x)^2} & \text{pour } A_1 < x < A_2 \\[2ex]
E_4(x) = \dfrac{(1 - x)^3}{(A - 2)(1 + x)(1 + r_1 x)^2} & \text{pour } A_2 \leqq x \leqq a,
\end{array}
\right. \\[2ex]
\text{et} \\
a = \dfrac{r_2 - r_1}{1 - r_1 r_2},\ 0 < a < 1\,;\ A = a + \dfrac{1}{a},\ A > 2. \\[2ex]
A_1 = A + 1 - \sqrt{A(A + 2)},\ A_2 = A - 1 - \sqrt{A(A - 2)},\ 0 < A_1 < A_2 < a,
\end{array}
\right.
$$

à la condition qu'il existe une fonction $f(z)$ de $\mathcal{F}$ pour laquelle on puisse choisir une valeur de ξ dans l'intervalle $[r_1, r_2]$ telle que la relation (1) ait lieu avec la valeur de l ci-dessus présentée. Les résultats présentés dans la formule (2) appartiennent, comme spécifié, aux auteurs de [1].

On en déduit

$$E_2'(x) = \frac{2}{A + 2}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 \frac{2 - r_1 + (2r_1 - 1)x}{(1 + r_1 x)^3} > 0 \quad \text{(vu que si } 2r_1 - 1 < 0,$$

alors $\dfrac{2 - r_1}{1 - 2r_1} > 1$).

$$E_4'(x) = -\frac{2}{A - 2}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 \frac{2 + r_1 + (1 + 2r_1)x}{(1 + r_1 x)^3} < 0$$

(vu que si $1 + 2r_1 < 0$, alors $-\dfrac{2 + r_1}{1 + 2r_1} > 1$). Par suite

$$(3) \qquad \min_{x \in [0, A_1]} E_2(x) = E_2(0) \text{ et } \min_{x \in [A_2, a]} E_4(x) = E_4(a).$$

Quand à

$$(4) \qquad E_3'(x) = 4\frac{1 - (2A + r_1)x + 4x^2 + 4r_1 x^3 - (1 + 2Ar_1)x^4 + r_1 x^5}{(1 - x^2)^2(1 + r_1 x)^3}$$

cette dérivée s'annule larsque

$$(5) \qquad r_1 = R(x) = \frac{1 - 2Ax + 4x^2 - x^4}{x(1 - 4x^2 + 2Ax^3 - x^4)}.$$

Il s'ensuit que si l'on pose $\Lambda = x + \dfrac{1}{x}$, la dérivée

$$R'(x) = -\frac{1 - 16x^2 + 24Ax^3 - 6(3 + 2A^2)x^4 + 24Ax^5 - 16x^6 + x^8}{x^2(1 - 4x^2 + 2Ax^3 - x^4)^2}$$

s'annule lorsque $P(\Lambda) = \Lambda^4 - 20\Lambda^2 + 24A\Lambda + 4(4 - 3A^2) = 0$.

On en déduit $\frac{1}{4}P'(\Lambda) = \Lambda^3 - 10\Lambda + 6A$, $\frac{1}{4}P''(\Lambda) = 3\Lambda^2 - 10$ et puisque $0 < x < 1$, (car $E_3'(0) \neq 0$), $\Lambda > 2$.
Par suite $\frac{1}{4}P''(\Lambda) > \frac{1}{4}P''(2) = 2$, $\frac{1}{4}P'(\Lambda) > \frac{1}{4}P'(2) = 6(A - 2) > 0$, $P(2) = -12(A - 2)^2 < 0$.
Le polynome $P(\Lambda)$ possède donc dans l'intervalle $(2, \infty)$ de la variable Λ une seule racine Λ_0. Par suite la dérivée $R'(x)$ possède dans l'intervalle (0, 1) de la variable x la seule racine $x_0 = \frac{1}{2}(\Lambda_0 - \sqrt{\Lambda_0^2 - 4})$.

Tableau 1

x	0		x_1		x_0		1
$R'(x)$			$-$		0		$+$
$R(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$R(x_0)$	$\nearrow$	-1

Tableau 2

x	0		A_1		x_2		A_2		1
$E_3'(x)$			$+$		0		$-$		
$E_3(x)$	0	$\nearrow$	$E_3(A_1)$	$\nearrow$	$E_3(x_2)$	$\searrow$	$E_3(A_2)$	$\searrow$	$-\infty$

D'autre part, le dénominateur de $R(x)$ ne s'annule pas pour $x \in (0, 1)$, car au cas contraire on aurait

$$2A = R_1(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} + x.$$

Or, $R_1'(x) = \dfrac{1}{x^4}(1 - x^2)(3 - x^2) > 0$

par suite pour $x \in (0, 1)$, $R_1(x) < R_1(1) = 4 < 2A$. (c'est d'ailleurs ce qui a permis d'écrire la relation $E_3'(x) = 0$ sous la forme (5)).

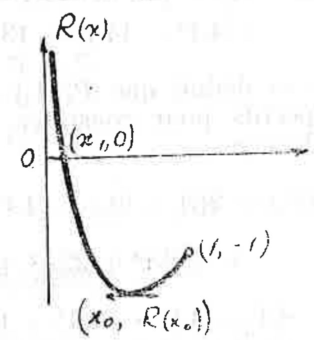

Fig. 1

Il en résulte le tableau 1 et la figure 1, sur la quelle on constate que $E_3'(x)$ de (4) a pour tout $r_1 \in (-1, 1)$ une racine (et une seule) dans l'intervalle (0, 1) de la variable. On en déduit le tableau 2. Pour y placer les valeurs A_1 et A_2 on peut, par exemple, remarquer que dans (4) on a (pour $x \in (0, 1)$) $sg\, E_3'(x) = sg\, P_1(x)$ avec $P_1(x) = 1 - (2A + r_1)x + 4x^2 + 4r_1x^3 - (1 + 2Ar_1)x^4 + r_1x^5$.

Or, $P_1(A_2) = 2(A-2)_1[-4A^3+8A^2-A-1+(4A^2-4A-1)\sqrt{A(A-2)}-$

$- r_1[8A^3 - 22A^2 + 14A - 1 - 2(4A^2 - 7A + 2)\sqrt{A(A-2)}]]_1$.

Il est facile de constater que pour $A \geqq 2$, on a $8A^3 - 22A^2 + 14A - 1 > 0$ et $4A^2 - 7A + 2 > 0$ et que

$$4A + 1 = [8A^3 - 22A^2 + 14A - 1 - 2(4A^2 - 7A + 2)\sqrt{A(A-2)}]\cdot$$

$$\cdot [8A^3 - 22A^2 + 14A - 1 + 2(4A^2 - 7A + 2)\sqrt{A(A-2)}].$$

On en déduit $8A^3 - 22A^2 + 14A - 1 - 2(4A^2 - 7A + 2)\sqrt{A(A-2)} > 0$ et $P_1(A_2) < 2(A-2)[-4A^3 + 8A^2 - A - 1 +$

$$+ (4A^2 - 4A - 1)\sqrt{A(A-2)} + 8A^3 - 22A^2 +$$

$$+ 14A - 1 - 2(4A^2 - 7A + 2)\sqrt{A(A-2)}] =$$

$$= 2(A-2)[4A^3 - 14A^2 + 13A - 2 -$$

$$- (4A^2 - 10A + 5)\sqrt{A(A-2)}].$$

Il est à nouveau facile de constater que l'on a $4A^3 - 14A^2 + 13A - 2 = (A-2)(4A^2 - 6A + 1) > 0$ et $4A^2 - 10A + 5 > 0$ (pour $A > 2$) to que pour $A > 2$,

$$2(2 - A) = [4A^3 - 14A^2 + 13A - 2 - (4A^2 - 10A + 5)\sqrt{A(A-2)}]\cdot$$

$$\cdot [4A^3 - 14A^2 + 13A - 2 + (4A^2 - 10A + 5)\sqrt{A(A-2)}] < 0.$$

On en déduit que $P_1(A_2) < 0$, donc, au tableau 2, $A_2 > x_2$. Les calculs respectifs pour constater qu'au même tableau $A_1 < x_2$ sont présentés ci-dessous.

$$P_1(A_1) = 2(A+2)_1[-(4A^3 + 8A^2 + A - 1) + (4A^2 + 4A - 1)\sqrt{A(A+2)} +$$

$$+ r_1[8A^3 + 22A^2 + 14A + 1 - 2(4A^2 + 7A + 2)\sqrt{A(A+2)}]]_1.$$

$$1 - 4A = [8A^3 + 22A^2 + 14A + 1 - 2(4A^2 + 7A + 2)\sqrt{A(A+2)}]\cdot$$

$$\cdot [8A^3 + 22A^2 + 14A + 1 + 2(4A^2 + 7A + 2)\sqrt{A(A+2)}].$$

$$P_1(A_1) > 2(A+2)[-(4A^3 + 8A^2 + A - 1) +$$

$$+ (4A^2 + 4A - 1)\sqrt{A(A+2)} + 8A^3 + 22A^2 + 14A +$$

$$+ 1 - 2(4A^2 + 7A + 2)\sqrt{A(A+2)}] =$$

$$= 2(A+2)[4A^3 + 14A^2 + 13A + 2 -$$

$$- (4A^2 + 10A + 5)\sqrt{A(A+2)}] \text{ et}$$

$$2(A+2) = [4A^3 + 14A^2 + 13A + 2 -$$

$$- (4A^2 + 10A + 5)\sqrt{A(A+2)}][4A^3 + 14A^2 + 13A + 2 +$$

$$+ (4A^2 + 10A + 5)\sqrt{A(A+2)}].$$

Par suite, $P_1(A_1) > 0$ et $A_1 < x_2$.

Or, (2) donne $E_2(A_1) = E_3(A_1) = \dfrac{4(A+2)A_1^2}{(1 - A_1^2)(1 + r_1A_1)^2}$,

et $E_3(A_2) = E_4(A_2) = \dfrac{4(A-2)A_2^2}{(1 - A_2^2)(1 + r_1A_2)^2}$. Le tableau 2 et (3) donnent alors pour $x \in (A_1, A_2): E_3(x) > \min(E_3(A_1), E_3(A_2)) = \min(E_2(A_1), E_4(A_2)) > \min(E_2(0), E_4(a))$. On déduit également de (3) que pour $x \in [0, A_1]$ on a $E_2(x) \geqq E_2(0) \geqq \min(E_2(0), E_4(a))$ et pour $x \in [A_2, a]$ on a $E_4(x) \geqq E_4(a) \geqq \min(E_2(0), E_4(a))$. Il en résulte que dans (2)

$$\min_{x \in [0, a]} E_1(x) = \min(E_2(0), E_4(a)). \tag{6}$$

Or, dans (2) $E_2(0) = \dfrac{a}{(1+a)^2}$ et $E_4(a) = \dfrac{a(1-a)}{(1+a)(1+r_1a)^2} = \dfrac{1 - r_2^2}{1 - r_1^2} E_2(0)$.

Si donc $r_1^2 < r_2^2$, alors $\min(E_2(0), E_4(a)) = E_4(a)$ et si $r_1^2 > r_2^2$, alors $\min(E_2(0), E_4(a)) = E_2(0)$. Il en résulte dans (2) à l'aide de (6)

$$l = \frac{1 - r_1^2}{r_2 - r_1} \min_{x \in [0,a]} E_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - r_1^2}{r_2 - r_1} E_4(a) & \text{si } r_1^2 < r_2^2 \\ \dfrac{1 - r_1^2}{r_2 - r_1} E_2(0) & \text{si } r_1^2 > r_2^2 \\ \dfrac{1 - r_1^2}{r_2 - r_1} E_2(0) & \text{si } r_2 = -r_1 = \rho (> 0), \end{cases}$$

ce qui avec la valeur (2) de a démontre le Théorème*

* Si l'on tient compte que (1) a lieu pour $f(z) = z/(1-z)^2$, $\xi = r_2$ et $l = l_1$ (voir [1]) et pour $f(z) = z/(1+z)^2$, $\xi = r_1$ et $l = l_2$. Nous remarquerons que ces deux fonctions sont univalentes dans Δ.

Remarques. 1°. Le cas $0 < r_1 < r_2$ traité par les auteurs de [1] rentre dans le cas $r_1 + r_2 > 0$ du théorème, qui donne la même expression pour l que les auteurs sus-mentionnés. 2°. Il est intéressant de constater que-au cas $r_2 = \rho$, $r_1 = -\rho$, lorsque ρ croît de 0 à 1, l décroît de 1 à 0.

Lorsque r_1 croît de -1 à r_2, $l_1(r_1, r_2)$ croît de $\frac{1 - r_2}{4}$ à 1. La forme de $l_1(r_1, r_2)$ exigeant seulement $r_2 \geqq 0$, il résulte que $l_1(r_1, r_2)$ peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1. La même conclusion a lieu pour la forme $l_2(r_1, r_2)$ de l, qui exige seulement $r_1 \leqq 0$ et qui, lorsque r_2, croît de r_1 à 1, décroît de 1 à $\frac{1 + r_1}{4}$. 3°. Pour la démonstration du théorème, il est inutile d'établir, ainsi que nous l'avons fait, la disposition mutuelle des nombres A_1, x_2 et A_2 dans le tableau 2. La manière dont varie la fonction $E_3(x)$ indique de suite que-quelle que soit la disposition des nombres A_1, x_2 et A_2, on a pour

$$x \in (A_1, A_2) : E_3(x) > \min (E_3(A_1), E_3(A_2)).$$

Ceci conduit comme ci-dessus à la conclusion du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mocanu, P., Reade, M. and Zlotkiewicz, E., *On the functional $f(z_1)/f'(z_2)$ for typically real functions*. Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation. 3, 2, 209–214 (1974).

Reçu le 11. III. 1974.

Institutul de matematică
Cluj-Napoca