MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 1, 1975, pp. 73—77

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ТОЧКИ ЛАМЕ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. ШМАТКОВ
(Москва)

Рассматривается следующая задача. Пусть G — выпуклое множество линейного нормированного пространства X, A — борелевское множество из X, μ — мера, определенная на σ — алгебре B_A борелевских подмножеств из A, $\varphi(x)$ — заданный на X выпуклый функционал такой, что $\varphi(x-y)$ μ — суммируем по x на множестве A при любом $y \in X$.

Элемент $y^* \in G$,, реализующий нижнюю грань в равенстве

$$\int_A \varphi(x-y^*)\mu(dx) = \inf_{y \in G} \int_A \varphi(x-y)\mu(dx),$$

назовем условной точкой Ламе множества A, а если $G = X$ — то точкой Ламе (ср. [2], стр. 468).

Частные случаи задачи о точке Ламе рассматривались в работах [1], [2], [3]. Нетрудно убедиться, что, если функционал φ — строго выпуклый, то для всякого множества $A \subset X$ в выпуклом множестве G существует не более одной условной точки Ламе. Если же функционал не строго выпуклый, то точка Ламе может оказаться не единственной.

В работе устанавливаются условия единственности условной точки Ламе в строго нормированном пространстве в случае, когда $\varphi(x) = \| x \|$. Пусть вначале пространство X одномерно. Отождествим его с числовой осью $X_1 = \{-\infty < x < \infty\}$ так, что $\varphi(x) = |x|$. Для краткости будем пользоватся следующими обозначениями:

$$[a, b) = \{x \in A : \ a \leqslant x < b\}, \quad \mu[a, b) = \mu\{x \in A ;\, a \leqslant x < b\},$$

$$a^* = \sup\left\{x : \mu(-\infty, x) < \frac{1}{2}\,\mu(A)\right\},$$

$$b^* = \inf\left\{x : \mu(x, \infty) < \frac{1}{2}\,\mu(A)\right\}.$$

Ясно, что $a^* \leqslant b^*$.

Лемма. *Точка $y_0 \in X_1 = \{-\infty < x < \infty\}$ является точкой Ламе множества A, лежащего на прямой X_1, тогда и только тогда, когда y_0 принадлежит отрезку $[a^*, b^*]$.*

Необходимость. Пусть y_0 — точка Ламе, тогда для любой точки $y \in X_1$ справедливо неравенство

$$\int_A |x - y|\,\mu(dx) \geqslant \int_A |x - y_0|\,\mu(dx). \tag{1}$$

Допустим, что $y > y_0$, и преобразуем левую часть (1) следующим образом

$$\int_A |x - y|\,\mu(dx) = \int_{(-\infty, y]} |x - y|\,\mu(dx) + \int_{(y, \infty)} |x - y|\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{(-\infty, y]} |x - y_0|\,\mu(dx) + |y - y_0|\,\mu(-\infty, y] +$$

$$+ \int_{(y, \infty)} |x - y_0|\,\mu(dx) - |y - y_0|\,\mu(y, \infty) =$$

$$= \int_A |x - y_0|\,\mu(dx) + |y - y_0|\,[\mu(-\infty, y] - \mu(y, \infty)].$$

Подставляя полученное выражение в (1), получаем

$$|y - y_0|\,[\mu(-\infty, y] - \mu(y, \infty)] \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\mu(-\infty, y] \geqslant \mu(y, \infty)$$

и значит,

$$\mu(-\infty, y] \geqslant \frac{1}{2}\,\mu(A).$$

Отсюда вытекает, что $a^* \leqslant y$. В силу произвольности выбора $y > y_0$ получаем

$$a^* \leqslant y_0. \tag{2}$$

Допустив теперь, что $y < y_0$ из аналогичных рассуждений будем иметь

$$y_0 \leqslant b^*. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $y_0 \in [a^*, b^*]$.

Достаточность. Пусть $y_0 \in [a^*, b^*]$ (мы не исключаем случая $y^* = b^*$). Рассмотрим произвольный $y \in X_1$, пусть для определенности $a > y_0$. Отметум, что из опредения конца a^* отрезка $[a^*, b^*]$ следует

$$\mu(-\infty, y_0] \geqslant \frac{1}{2}\,\mu(A) \geqslant \mu(y_0, \infty). \tag{4}$$

Для произвольной точки $y > y_0$ будем иметь

$$\int_A |x - y|\,\mu(dx) = \int_{(-\infty, y_0]} |x - y|\,\mu(dx) + \int_{(y_0, y]} |x - y|\,\mu(dx) +$$

$$+ \int_{(y, \infty)} |x - y|\,\mu(dx) = \int_{(-\infty, y_0]} |x - y_0|\,\mu(dx) + \int_{(-\infty, y_0]} |y_0 - y|\,\mu(dx) +$$

$$+ \int_{(y_0, y]} |x - y|\,\mu(dx) + \int_{(y, \infty)} |x - y_0|\,\mu(dx) - \int_{(y, \infty)} |y_0 - y|\,\mu(dx) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{(-\infty, y_0]} |x - y_0|\,\mu(dx) + \int_{(y, \infty)} |x - y_0|\,\mu(dx) + \int_{(y_0, y]} |x - y_0|\,\mu(dx) -$$

$$- \int_{(y_0, y]} |y_0 - y|\,\mu(dx) + \int_{(-\infty, y_0]} |y_0 - y|\,\mu(dx) + \int_{(y_0, y]} |x - y|\,\mu(dx) -$$

$$- \int_{(y, \infty)} |y_0 - y|\,\mu(dx) \geqslant \int_A |x - y_0|\,\mu(dx) + |y_0 - y| \cdot [\mu(-\infty, y_0] -$$

$$- \mu(y_0, \infty)] + \int_{(y_0, y]} |x - y|\,\mu(dx).$$

Отсюда в силу (4) заключаем, что для $y > y_0$,

$$\int |x - y|\,\mu(dx) \geqslant \int_A |x - y_0|\,\mu(dx).$$

Аналогично рассматривается случай $y < y_0$.

Таким образом, любая точка отрезка $[a^*, b^*]$ является точкой Ламе.

ТЕОРЕМА. *Пусть X — строго нормированное пространство, $A \subset X, G$ — выпуклое множество из X. Условная точка Ламе $y_0 \in G$ будет единственной в том и только в том случае, если множество A не содержит два непересекающиеся подмножества A_1 и A_2 такие, что*

а) $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \frac{1}{2}\mu(A)$,

в) *A_1 и A_2 можно заключить соответственно в непересекающиеся лучи γ_1 и γ_2, исходящие из точек множества G и лежащие на одной прямой.*

Необходимость. Пусть существуют подмножества A_1 и A_2 с указанными свойствами. Тогда множество A лежит (за исключением подмножества нулевой меры) на прямой X_1, которой принадлежат лучи γ_1 и γ_2. Можно считать X_1 подпространством. Поскольку нормированное пространство допускает линейную проекцию единичной нормы на одномерное подпространство, то всякая точка Ламе в X_1 будет также точкой Ламе в пространстве X. Подпространство X_1 можно отождествить с числовой осью $X_1 = \{-\infty < x < \infty\}$. Если точки z_1 и z_2 из G $(z_1 < z_2)$ — начальные точки лучей γ_1 и γ_2, то в силу условия а) и определения чисел a^* и b^*: $a^* \leqslant z_1 < z_2 \leqslant b^*$, и на основании леммы заключаем, что точки z_1 и z_2 являются точками Ламе в X_1 и тем самым условными точками Ламе.

Достаточность. Допустим, что во множестве G существуют две точки Ламе y_1 и y_2, то есть

$$\int_A \|x - y_1\|\,\mu(dx) = \int_A \|x - y_2\|\,\mu(dx) = \inf_{y \in G} \int_A \|x - y\|\,\mu(dx) = J.$$

Поскольку

$$J \leqslant \int_A \left\| x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right\| \mu(dx) \leqslant \frac{1}{2}\int_A \|x - y_1\|\,\mu(dx) + \frac{1}{2}\int_A \|x - y_2\|\,\mu(dx) = J$$

то в этих неравенствах везде должен стоять знак равенства, и, следовательно, для почти всех $x \in A$

$$\| x - y_1 + x - y_2 \| = \| x - y_1 \| + \| x - y_2 \|.$$

Так как X — строго нормированное пространство, то для почти всех x, $x - y_1 = c_x(x - y_2)$, $(c_x \neq 1)$, либо $x - y_2 = 0$; откуда $x = y_2 + \frac{1}{1 - c_x}(y_1 - y_2)$, либо $x = y_2$. Таким образом, множество A (за исключением подмножества нулевой меры) лежит на прямой X_1, проходящей через точки y_1 и y_2. Как и раньше, X_1 можно отождествить с числовой осью : $X_1 = \{-\infty < x < \infty\}$.

Поскольку G выпукло, то $[y_1, y_2] \subset G$ и всякий элемент $y \in [y_1, y_2]$ является условной точкой Ламе. Поскольку $y_1 \neq y_2$, то в силу выпуклости нормы эти точки являются точками Ламе множества A на прямой X_1. Поэтому по лемме в силу определения точек a^* и b^* можем утверждать, что $a^* \leqslant y_1 < y_2 \leqslant b^*$. Из этого неравенства следует, что $\mu(-\infty, y_1] = \mu[y_2, \infty) = \frac{1}{2}\mu(A)$. Но в таком случае для подмножеств $A_1 = A \cap (-\infty, y_1]$, $A_2 = A \cap [y_2, \infty)$ и лучей $\gamma_1 = (-\infty, y_1]$, $\gamma_2 = [y_2, \infty)$ выполняются условия а) и в). Теорема доказана полностью.

Более полные дальнейшие результаты о точке Ламе и ее обобщениях предполагается опубликовать в совместной статье А.Л.Гаркави и автора.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гольштейн, Е. Г., *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Москва, „Наука", 1971.

[2] Крейн, М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Москва, „Наука", 1973.

[3] Рубинштейн, Г. Ш. *Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве*, Сибирский матем. журнал, 6, 3, 183—215 (1965),

Поступило 15. I. 1974